

Algèbre linéaire sans réduction

Noyaux, images et rangs

Exercice 1 (*Mines*)* Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :
(i) $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$ (ii) $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$ (iii) $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$.
2. Donner des exemples d'endomorphismes vérifiant ces propriétés.
3. L'équivalence est-elle vraie en dimension infinie ? Montrer que (i) et (ii) équivaut à (iii).

Exercice 2 (*Mines-CCINP*)

1. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifiant $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$; montrer que $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } v$.
2. Quelle relation peut-on en déduire entre les rangs de u et v ?
3. (*Mines*) Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, E_1 tel que $E = \text{Ker } u \oplus E_1$ et F_1 tel que $F = \text{Im } u \oplus F_1$; montrer qu'il existe une unique application linéaire v de F dans E , de noyau F_1 , d'image E_1 , et telle que $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

Exercice 3 (*CCINP*)* Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $u^3 + u = 0$.

1. Montrer que $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im}(u)$.
2. Montrer que $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u^2 + \text{Id})$.
3. Montrer qu'en dimension impaire u n'est pas injective (on pourra raisonner par l'absurde).
4. On suppose désormais $n = 3$. En déduire que $\text{rg}(u) = 2$.

5. Montrer qu'il existe une base e de E dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (*ENS Lyon*) Soit E un K -espace vectoriel. On dit que $u \in \text{Gl}(E)$ est un échangeur s'il existe des sous-espaces vectoriels F, G tels que $E = F \oplus G$, $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$. Montrer que u est un échangeur si et seulement si il existe des endomorphismes a et b tels que $u = a + b$ avec $a^2 = b^2 = 0$.

Exercice 5 (*Mines*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si U et V sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'endomorphisme $\Phi_{U,V}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par l'égalité $\Phi_{U,V}(M) = UMV$.

1. Si A, B, C et D sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, exprimer $\Phi_{A,B} \circ \Phi_{C,D}$.
2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer $\text{rg} \Phi_{A,A}$.

Exercice 6 (*Mines*) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe U et V inversibles telles que $\text{rg}(UA + BV) = \min\{n, \text{rg} A + \text{rg} B\}$.
2. Montrer que, si $\text{rg} A + \text{rg} B \geq n$, il existe U et V inversibles telles que $UA + BV$ soit inversible.

Exercice 7 (*X-Mines*) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1, $t = \text{Tr}(A^{-1}B)$.

1. On suppose que $t \neq -1$. Montrer que $A + B$ est inversible d'inverse $A^{-1} - \frac{A^{-1}BA^{-1}}{1+t}$.
2. On suppose que $t = -1$. Montrer que $A + B$ n'est pas inversible.

Exercice 8 (*Mines*) Soient n et p deux éléments de $\mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Montrer que $p + \text{rg}(I_n + AB) = n + \text{rg}(I_p + BA)$.

Exercice 9 (*X*)* Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur u pour qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u + v$ soit inversible et $u \circ v = 0$.

Exercice 10 (*Ulm*)* Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{rg}(AB) + \text{rg}(BC) \leq \text{rg} B + \text{rg}(ABC)$.

Exercice 11 (*Ulm*) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

1. Comparer le rang de M dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{Q}$ et dans $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier.
2. Existe-t-il toujours p premier tel que $\text{rg}_{\mathbb{Q}}(M) = \text{rg}_{\mathbb{F}_p}(M)$?

Exercice 12 (SR) Soient $n, r, k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq r \leq n$ et $r + k \leq n$. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, où $A \in \text{GL}_r(\mathbb{C})$. Montrer que M est de rang $r + k$ si et seulement si $D - CA^{-1}B$ est de rang k .

Exercice 13 (X) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Si M est inversible, combien de coefficients de M faut-il modifier au minimum pour la rendre non-inversible ?
2. Si M n'est pas inversible, combien de coefficients de M faut-il modifier au minimum pour la rendre inversible ?

Sous-espaces vectoriels, dimensions

Exercice 14 (IMT) Montrer que l'ensemble A des applications linéaires u d'un espace E dans un espace F , tous deux de dimension finie, telles que $\ker u$ contienne le sous-espace W de E , est un espace vectoriel. Trouver sa dimension.

Exercice 15 (Mines)* Soient $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E ayant même dimension. Montrer que F et G ont un supplémentaire commun.

Exercice 16 (Mines) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comparer la dimension du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MB\}$ et celle du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AM = MB\}$.

Exercice 17 (Mines) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; AMB = 0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en calculer la dimension.

Endomorphismes nilpotents

Exercice 18 (Mines) Si A et B sont deux matrices complexes, carrées de taille n vérifiant $(AB)^n = 0$, a-t-on aussi $(BA)^n = 0$?

Exercice 19 (Mines) Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = 0$.

1. Montrer que $\text{rg}(u) + \text{rg}(u^2) \leq n$.
2. Montrer que $2 \text{rg}(u^2) \leq \text{rg}(u)$.

Exercice 20 (TPE) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A^3 = 0$, $AB = BA$ et B est inversible. Montrer que $(A + B)$ est inversible.

Exercice 21 (X) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ nilpotente. Montrer que $I_n + M$ a une racine carrée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

Autres exercices sur les endomorphismes et les matrices

Exercice 22 (X) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^{10}$ qui stabilise tous les sous-espaces de dimension 5. Que dire de f ?

Exercice 23 (X)* Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Quels sont les endomorphismes de E qui stabilisent les hyperplans de E ?

Exercice 24 (Mines)*

1. Que dire d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans toute base est la même ?
2. Que dire d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui commute avec tout projecteur ?

Exercice 25 (Mines-Centrale-SR)* Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, tel que $\forall x \in E, (x, u(x))$ est lié. Montrer que u est une homothétie.
2. Montrer que $\text{Tr}(A) = 0$ si et seulement si A est semblable à une matrice de diagonale nulle.
3. Soit A telle que $\text{Tr}(A) = 0$. En déduire qu'il existe $(B, C) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})^2$ telle que $A = BC - CB$.

Exercice 26 (Théorème d'Hadamard) * Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.
Montrer que A est inversible.

Exercice 27 (Mines) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent à toutes les matrices de permutation de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 28 (X) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si A est un sous-anneau de $\mathbb{R}$, on note $\text{SL}_n(A)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(A)$ de déterminant 1.

1. Montrer que $\text{SL}_n(A)$ est un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\text{SL}_n(\mathbb{Q})$ ne possède pas de partie génératrice finie.

3. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

4. * Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 29 $(X)^*$ Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de permutation associée et, pour tout k , $n_k(\sigma)$ le nombre de cycles de longueur k dans la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints.

1. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Calculer, pour tout k , $\mathrm{Tr}(P_\sigma^k)$ en fonction des $n_r(\sigma)$.
2. En déduire que deux permutations $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$ sont conjuguées dans $\mathcal{S}_n$ si et seulement si les matrices P_σ et P_τ sont semblables.

Exercice 30 $(SR)^*$ Lorsque $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $n_k(\sigma)$ le nombre de k -cycles dans la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints. Ainsi $n_1(\sigma)$ est le nombre de points fixes de σ . On note également $m(\sigma) = \sum_{k=1}^n n_k(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ .

1. Soient $i, k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ordre de i dans $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, +)$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$. On dit que σ et τ sont conjuguées s'il existe $\phi \in \mathcal{S}_n$ tel que $\sigma = \phi\tau\phi^{-1}$.
Montrer que σ et τ sont conjuguées si et seulement si : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, n_k(\sigma) = n_k(\tau)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\det(i \wedge j)_{1 \leq i, j \leq n}$.
Ind. Considérer les matrices $A = (\mathbb{1}_{i|j})$ et $B = (\varphi(j)\mathbb{1}_{j|i})$.
4. Montrer que σ et τ sont conjuguées si et seulement si : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, m(\sigma^i) = m(\tau^i)$.
5. Montrer que σ et τ sont conjuguées si et seulement si les matrices de permutation P_σ et P_τ sont semblables.

Exercice 31 (Ulm) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver les fonctions f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, f(XY) \leq \min\{f(X), f(Y)\}$.

Exercice 32 $(SR)^*$ On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite bistochastique lorsque tous ses coefficients sont positifs et que la somme de ses coefficients sur une ligne ou une colonne quelconque vaut 1. On note $D_n(\mathbb{R})$ l'ensemble formé par ces matrices.

1. Montrer que $D_n(\mathbb{R})$ est convexe.
2. Un élément P de $D_n(\mathbb{R})$ est dit extrémal lorsque :
 $\forall (A, B) \in D_n(\mathbb{R})^2, \forall t \in]0, 1[, (1-t)A + tB = P \Rightarrow A = B$.
Montrer que toute matrice de permutation est un élément extrémal de $D_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que tout élément extrémal de $D_n(\mathbb{R})$ est une matrice de permutation.

Exercice 33 $(X)^*$ Soient $(n, p, a) \in \mathbb{N}^{*3}$, $U_1, \dots, U_p$ des parties distinctes de $\{1, \dots, n\}$ telles que, si $1 \leq i < j \leq p$, $|U_i \cap U_j| = a$. Montrer que $p \leq n$.

Ind. Considérer la matrice $(\mathbf{1}_{k \in U_i})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq i \leq p}}$.

Exercice 34 (X) Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, $n \geq 2$ un entier, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note $C(J) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) ; AJ = JA\}$, $\Gamma_n = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) ; M^n = J\}$.

1. Déterminer $C(J)$. Vérifier que $C(J)$ est une sous-algèbre commutative de la $\mathbb{K}$ -algèbre $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
2. Montrer que, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la $\mathbb{R}$ -algèbre $C(J)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Déterminer Γ_n .
3. Montrer que, si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, la $\mathbb{Q}$ -algèbre $C(J)$ est isomorphe à $\mathbb{Q}[i]$. Déterminer Γ_n . On admettra que les éléments d'ordre fini de $(\mathbb{Q}[i]^*, \times)$ sont ± 1 et $\pm i$.
4. Montrer que, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la $\mathbb{C}$ -algèbre $C(J)$ est isomorphe à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Déterminer Γ_n .

Exercice 35 (Ulm) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que, pour tout $v \in \mathbb{C}^n$ non nul, on a $\{Mv ; M \in A\} = \mathbb{C}^n$. Montrer que $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Familles libres

Exercice 36 $(Mines-ENS)^*$ Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $f_a : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto |x - a| \end{cases}$. Montrer que la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 37 $(X)^*$ Soit A un ensemble non vide, $\mathbb{K}$ un corps. Rappeler que $E = \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On considère $(f_j)_{1 \leq j \leq n} \in E^n$. Montrer que cette famille est libre si et seulement si il existe $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in A$ tel que $\det(f_j(x_i))_{i,j} \neq 0$.

Exercice 38 (CCINP)* Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. F_0, F_1, G_0 et G_1 des s.e.v. de E . Soit f (resp. g) le projecteur de E de noyau F_0 (resp. G_0) et d'image F_1 (resp. G_1). Supposons que $f \circ g = g \circ f$.

1. Démontrer que $h = f \circ g$ est un projecteur de E et que son image est $F_1 \cap G_1$.
2. Déterminer le noyau de h .

Exercice 39 (CCINP)* Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, soient p et q deux projecteurs définis sur E .

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q + q \circ p = 0$, si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Interpréter cette condition en terme de noyaux et d'images de p et q .
3. Si $r = p + q$ est un projecteur, montrer que $\ker r = \ker p \cap \ker q$ et que $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$. Montrer que cette somme est directe.
4. On suppose dans cette question que $r = p + q - p \circ q$ et $\operatorname{Im} p \subset \ker q$; montrer que r est un projecteur dont on déterminera le noyau.

Exercice 40 (CCINP) Soient L_1 et L_2 deux sous-espaces supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$, où E est de dimension finie n , tels que $\forall (u, v) \in L_1 \times L_2, u \circ v + v \circ u = 0$.

1. Montrer qu'il existe deux projecteurs p_1 et p_2 dans $L_1 \times L_2$ tels que $Id = p_1 + p_2$.
2. Montrer que $n = \operatorname{rg}(p_1) + \operatorname{rg}(p_2)$.
3. Soit $u \in L_1$; montrer que, si $x \in \operatorname{Im} p_2, u(x) = 0$ et si $x \in \ker p_2, u(x) \in \ker p_2$.
4. En déduire que $\dim(L_1) \leq (n - \operatorname{rg}(p_2))^2$; quelle inégalité a-t-on pour $\dim(L_2)$?
5. Justifier que $\dim \mathcal{L}(E) = \dim(L_1) + \dim(L_2)$.
6. Montrer que $\operatorname{rg}(p_1)(n - \operatorname{rg}(p_1)) \leq 0$ et en déduire que $\operatorname{rg}(p_1) = 0$ ou $\operatorname{rg}(p_1) = n$, puis que $L_1 = \{0\}$ ou $L_2 = \{0\}$.

Exercice 41 (ENS Lyon-X)*

1. Soient n dans $\mathbb{N}^*, A$ une partie finie de cardinal m de $\operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ stable par produit. Montrer que $\sum_{M \in A} \operatorname{Tr}(M) \in m\mathbb{Z}$.
2. Soit G un sous-groupe fini de $\operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\sum_{g \in G} \operatorname{Tr}(g) = 0$. Montrer que $\sum_{g \in G} g = 0$.

Exercice 42 (Mines) Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et $(p_i)_{1 \leq i \leq r}$ une famille de projecteurs de E tels que $p = \sum_{j=1}^r p_j$ vérifie $p^2 = p$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} p = \bigoplus_{j=1}^r \operatorname{Im} p_j$.
2. Pour tout $i \neq j$, montrer que $p_j \circ p_i = 0$.

Exercice 43 (Paris) Soient $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, A_1, \dots, A_m$ des éléments idempotents de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire vérifiant $A_k A_k = A_k$. Montrer que $\sum_{i=1}^m (n - \operatorname{rg}(A_i)) \geq \operatorname{rg}\left(I_n - \prod_{i=1}^m A_i\right)$.

Formes linéaires, hyperplans et traces

Exercice 44 (Mines)* Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une unique $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(A) = \operatorname{Tr}(AC)$
2. On suppose que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, f(AB) = f(BA)$. Montrer que $f = \lambda \operatorname{Tr}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 45 (Centrale) Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $E_n = \mathbb{R}_n(X)$ et $u_n : \begin{cases} E_n & \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto (\phi_0(P), \dots, \phi_n(P)) \end{cases}$, avec $\phi_k : \begin{cases} E_n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ P & \mapsto \frac{P^{(k)}(k)}{k!} \end{cases}$.

Par ailleurs, on note $(e_0, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

1. Montrer que $(\phi_0, \dots, \phi_n)$ est libre dans E_n^* .
2. Montrer que si $(\psi_0, \dots, \psi_n)$ est une famille libre dans E_n^* , alors il existe une unique base $(B_0, \dots, B_n)$ de E_n telle que pour tout $P \in E_n, P = \sum_{k=0}^n \psi_k(P) B_k$.
3. Calculer cette famille $(B_0, \dots, B_n)$ dans le cas où :

- (a) $\psi_k : P \mapsto \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$
 (b) $\psi_k : P \mapsto P(k)$.

4. Dans le cas de la famille libre $(\phi_0, \dots, \phi_n)$, montrer que la base obtenue est la famille $(u_n^{-1}(e_0), \dots, u_n^{-1}(e_n))$.

Exercice 46 (*Mines*)* Soit $n \geq 2$ et soit H un hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que H contient au moins une matrice inversible.
2. On suppose que H est stable par multiplication. Montrer que $I_n \in H$.

Exercice 47 (*X*) Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, H un hyperplan affine de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $H \cap \text{GL}_n(\mathbb{R})$ est non vide.

Exercice 48 (*X*)* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \dots, X_{n^2}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^{n^2}$. On pose

$$\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto (\text{Tr}(MX_k))_{1 \leq k \leq n^2} \in \mathbb{C}^{n^2}.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(X_1, \dots, X_{n^2})$ pour que φ soit un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. Donner une relation entre la dimension du noyau de φ et le rang de $(X_1, \dots, X_{n^2})$.

Exercice 49 (*X*) Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que (V, A, B) est une réalisation de M si :

- V est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension d ,
- $A = (a_1, \dots, a_n)$ est une famille libre de formes linéaires sur V ,
- $B = (b_1, \dots, b_n)$ est une famille libre de vecteurs de V ,
- pour tous i, j , $a_i(b_j) = m_{i,j}$.

On dit que d est la dimension de la réalisation.

1. Montrer que si M est réalisée par un espace de dimension d , elle l'est aussi par un espace de dimension $d' > d$.
2. Trouver une réalisation de la matrice $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
3. Trouver la dimension minimale d'une réalisation de M_0 .

Systèmes linéaires, pivot de Gauss et déterminants

Exercice 50 (*CCINP*)

1. Soient $P_0, P_1, \dots, P_n$ tels que chaque P_k soit unitaire de degré k . Soient $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice $(P_j(x_i))_{0 \leq i,j \leq n}$.
2. Soient $\theta_0, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice $(\cos(j\theta_i))_{0 \leq i,j \leq n}$.

Exercice 51 (*Mines*) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & y & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & y^2 & 2y & 2 \\ x^3 & 3x^2 & y^3 & 3y^2 & 6y \\ x^4 & 4x^3 & y^4 & 4y^3 & 12y^2 \end{vmatrix}$. Montrer que $D = 0$ si et seulement si $x = y$.

Exercice 52 (*X*)

1. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, a, b) \in \mathbb{R}^{n+2}$. Calculer $\det M$, où $M(i, i) = \alpha_i$, $M(i, j) = a$ si $i > j$ et $M(i, j) = b$ si $i < j$.
2. Calculer le déterminant de la matrice M telle que $M(i, j) = i \wedge j$ pour $1 \leq i \leq j \leq n$.

Exercice 53 (*X*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^4$ où A est inversible et $AB = BA$. Montrer que :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(DA - CB).$$

Pour plus tard : Étendre le résultat au cas où D est non-inversible.

Exercice 54 (*Mines*) Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $C \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$. Montrer que $\det(A + BC) = \det(A)(1 + CA^{-1}B)$.

Exercice 55 (*X*)* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. On suppose que les coefficients diagonaux de A sont tous nuls et que les coefficients en dehors de la diagonale sont dans $\{-1, 1\}$. Montrer que A est inversible.

Exercice 56 (*Centrale*) On s'intéresse aux matrices A de coefficients a_{ij} entiers, de diagonale nulle et dont les termes non diagonaux valent 1 ou -1 . On note la A_0 matrice de ce type dont tous les termes non diagonaux valent 1.

1. Calculer $\det(A_0)$. En déduire dans le cas général que si n est pair, alors A est inversible (on pourra raisonner modulo 2). Que dire du rang de A si n est impair ?
2. Soit un tas de n cailloux tel que, si l'on en retire un, on puisse toujours faire deux tas de même masse avec les $n - 1$ cailloux restants : montrer que n est impair.
3. Montrer que, pour n impair, il existe un nombre fini de masses $m_1, \dots, m_n$ (à une constante multiplicative près) qui permettent de réaliser la condition précédente.
4. On impose désormais que, pour $n = 2k + 1$ et quel que soit le caillou que l'on retire, il soit possible de former deux tas de k cailloux de même masse. Montrer que tous les cailloux ont la même masse.

Exercice 57 (X) Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ distincts. Calculer le déterminant de $\left(\frac{1}{a_i - b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Exercice 58 * Soient A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe P dans $GL_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On veut montrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = Q^{-1}AQ$.

1. Écrivons $P = R + iS$ avec $(R, S) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $RB = AR$ et $SB = AS$.
2. En déduire que : $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (R + \lambda S)B = A(R + \lambda S)$. Conclure.
3. Étendre ce résultat à une extension plus générale $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$.

Exercice 59 (*Centrale-Mines-X*) * Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculer $\text{rg}(\text{Com}M)$ en fonction de $\text{rg}M$.
2. Montrer que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\text{Com}(AB) = (\text{Com}B)(\text{Com}A)$. On pourra commencer par le montrer pour des matrices inversibles et traiter le cas général plus tard.
3. L'application Com est-elle injective ?
4. Quelle est son image dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Même question sur $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 60 (X -Mines) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'équation $M = \text{Com}(M)$.

Exercice 61 (X) Soient $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$ avec $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 1$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. On suppose que la suite de terme général $u_p = \sum_{j=1}^n a_j \cos(\pi p \theta_j)$ tend vers 0. Montrer : $\forall j \in \{1, \dots, n\}, a_j = 0$.

Exercice 62 ($ULSR$) *

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det A = \pm 1$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $(a, b)^T$ soit la première colonne d'une matrice de taille 2 à coefficients entiers de déterminant ± 1 .
3. Soient $a_1, \dots, a_n$ des entiers relatifs premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que $(a_1, \dots, a_n)^T$ est la première colonne d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ de déterminant ± 1 .
4. Soient $U, V \in \mathbb{Z}^n$. Donne une condition nécessaire et suffisante sur U et V pour qu'il existe $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ dont la première colonne soit U et la deuxième V .

Exercice 63 ($ULSR$) * Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\nu(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ . Calculer

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma), \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \nu(\sigma) \quad \text{et} \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma) + 1}.$$

Exercice 64 (Ulm) * Montrer que la projection de $SL_d(\mathbb{Z})$ sur $SL_d(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est surjective.

Exercice 65 ($ULSR$) Soit R un anneau commutatif. On note $SL_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(R) ; ad - bc = 1_R \right\}$. Soit p un nombre premier et $k \in \mathbb{N}^*$, on admet que $SL_2(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})$ est un groupe pour le produit matriciel.

1. Soit $\Pi: SL_2(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ la réduction modulo p . Montrer qu'il s'agit d'un morphisme de groupes surjectif.
2. Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ nilpotente. On suppose à présent $p > 3$. Montrer que si $A \equiv I_2 + X \pmod{p}$ alors $A^p \equiv I_2 + pX \pmod{p^2}$.
3. Soit H un sous-groupe de $SL_2(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ tel que $\Pi(H) = SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Montrer que $H = SL_2(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$.
4. Montrer le même résultat avec $SL_2(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})$ à la place de $SL_2(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$.

Exercice 66 (X -Ulm) Soit V un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments sont de rang inférieur ou égal à r . Montrer que $\dim V \leq n \times r$. Étudier les cas d'égalité.

Exercice 67 (ENS) Soit $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ surjective telle que pour tous A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout $t \in \mathbb{C}$ on ait $\det(A + tB) = \det(f(A) + t f(B))$. Montrer que f est bijective et préserve le rang.