

Feuille d'exercices : Réduction

Éléments propres : recherche pratique

Exercice 1 (CCINP) Trigonaliser ou diagonaliser si cela est possible, en précisant les matrices de passage :

$$1. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 2. B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 3. C = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (CCINP-IMT-Mines) Soit A fixée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; montrer que f , défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $f(M) = (\text{Tr}A)M - (\text{Tr}M)A$ est un endomorphisme dont on donnera le noyau et l'image. En donner les éléments propres. Est-il diagonalisable ?

Exercice 3 (Mines) Soient A et B deux matrices réelles, non nulles, carrées d'ordre n . Trouver une CNS pour que $\phi(X) = X + \text{Tr}(AX)B$ soit diagonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4 (X-Mines) On considère $I = [0, 1]$ ou $I = [-1, 1]$. Soient $E = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$, g une surjection continue croissante de I sur lui-même et Φ l'endomorphisme de E défini par $\forall f \in E, \Phi(f) = f \circ g$. Soit V un sous-espace de dimension finie de E stable par Φ .

1. Montrer que 1 est la seule valeur propre de ϕ .
2. En déduire que $\phi = \text{Id}_V$.
3. Que peut-on dire des valeurs propres possibles de ϕ si g n'est plus supposée surjective ?

Exercice 5 (X) On considère $A \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. On note ϕ_A qui à $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par $X^n - 1$.

1. Montrer que ϕ_A est un endomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et déterminer sa matrice dans la base canonique.
2. Montrer que ϕ_A est diagonalisable et déterminer ses valeurs et vecteurs propres.

Exercice 6 (X) On considère la matrice $M = \left(\binom{i-1}{j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

1. La matrice M est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer l'ordre de nilpotence de $M - I_{n+1}$.
3. Calculer M^{-1} .

Exercice 7 (X-SR) On considère la matrice $S = (\delta_{i+j, n+1})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer le déterminant de M .
2. Montrer que M est diagonalisable, déterminer son spectre et une base orthonormale de vecteurs propres de S .
3. Caractériser les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ stables par S .
4. Soient $\omega = \exp(2i\pi/n)$ et $A = \left(\frac{\omega^{jk}}{\sqrt{n}} \right)_{1 \leq j, k \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer les puissances de A . En déduire que A est diagonalisable.
5. On suppose n impair. Déterminer les valeurs propres de A et leurs multiplicités.

Exercice 8 (PLSR) Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $\zeta = e^{2i\pi/n}$ et $S = \left(\zeta^{(r-1)(s-1)} \right)_{1 \leq r, s \leq n}$.

1. Donner une expression simple de $\det(S)$. Ind. On pourra calculer S^2 .
2. On pose $G_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik^2\pi}{n}}$. Donner une expression simple de $|G_n|^2$ par un calcul direct.
3. On suppose que n est impair. Déterminer le spectre de S et la multiplicité de chacune de ses valeurs propres.

Éléments propres : étude théorique

Exercice 9 (Centrale-X) * Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1.$$

1. Montrer que 1 est valeur propre et que les valeurs propres complexes de A sont de module inférieur ou égal à 1.
2. On suppose dans cette question que pour tout (i, j) , $a_{i,j} > 0$. Montrer que 1 est la seule valeur propre de M sur le cercle unité.
3. Soit λ une valeur propre de A de module 1. Montrer qu'il existe $m \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\lambda^m = 1$.

Exercice 10 (Mines) Existe-t-il une forme linéaire Φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\Phi(A) \in \text{sp}(A)$?

Exercice 11 (TPE) Soient n et q dans $\mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^q = I_n$. Montrer que l'espace propre de A associé à 1 a pour dimension $\frac{1}{q} \sum_{k=1}^q \text{Tr}(A^k)$.

Exercice 12 (Mines) * Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si $p \neq n$, alors AB ou BA est non inversible.
2. Montrer que $X^p \chi_{AB} = X^n \chi_{BA}$.
3. En déduire que si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ et que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 13 (X) Soit $(A, B, M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^3$ tel que $AM = MB$ et $\chi_A = \chi_B$. Montrer que $A - MX$ et $B - XM$ ont même polynôme caractéristique pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 14 (Mines)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall (A, t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+$, $\det(A^2 + tI_n) \geq 0$.
2. On suppose $n \in \mathbb{N}$ impair. Montrer que $-I_n$ n'est pas somme de deux carrés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15 (SR) *

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, on pose $L_i(A) = \sum_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}} |a_{i,k}|$ et $C_j(A) = \sum_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}} |a_{k,j}|$.

Montrer que toute valeur propre de A appartient à $\bigcup_{i=1}^n D_f(a_{i,i}, L_i)$ et à $\bigcup_{j=1}^n D_f(a_{j,j}, C_j)$.

2. Soit $a_0, \dots, a_{n-1}$ dans $\mathbb{C}$. On pose $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ ainsi que

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}. \text{ Montrer que } \chi_{C(P)} = P.$$

3. Avec les données de la question précédente, montrer que toute racine de P est dans $D_f(0, M)$ où $M = \max_{0 \leq i \leq n-1} (1 + |a_i|)$.

Exercice 16 (Centrale) * Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont toutes les valeurs propres (complexes) sont de module au plus 1.

1. Montrer que $\chi_A \in \mathbb{Z}[X]$ et que $\text{Tr}(A^k) \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que les valeurs propres non nulles de A sont de module 1, puis que ce sont des racines de l'unité.
3. Exhiber $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont l'ensemble des valeurs propres est $\mathbb{U}_n$.

Exercice 17 (X) * Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ des nombres complexes de module au plus 1, $P = \prod_{i=1}^d (X - \lambda_i)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$f(n) = \sum_{i=1}^d \lambda_i^n. \text{ On suppose que } P \in \mathbb{Z}[X].$$

1. Montrer que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$.
2. Montrer que f est périodique à partir d'un certain rang et que pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, λ_i est nul ou racine de l'unité.

Exercice 18 (Lyon-PLSR) * Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que soit A a une valeur propre de module strictement supérieur à 1, soit il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k - I_n$ est nilpotente.

Exercice 19 (PLSR) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ impair, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $A + iB$ admet un vecteur propre réel.

Endomorphismes et matrices diagonalisables

Exercice 20 (Mines) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Étudier le caractère diagonalisable de $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -1/a & 0 & c \\ -1/b & -1/c & 0 \end{pmatrix}$ pour $(a, b, c) \in (\mathbb{K}^*)^3$.

Exercice 21 (CCINP) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a et b dans $\mathbb{C}$, M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les termes diagonaux (resp. non diagonaux) valent a (resp. b).

1. Calculer le polynôme caractéristique de M .
2. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. Calculer le polynôme minimal de M .
4. Calculer le déterminant de $I_n + M$.

Exercice 22 (X) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A_{i,i} = \lambda_i$ si $1 \leq i \leq n$, $A_{i,i+1} = 1$ si $1 \leq i \leq n-1$ et $A_{i,j} = 0$ si $j \notin \{i, i+1\}$. À quelle condition A est-elle diagonalisable ?

Exercice 23 (Centrale) Soient $n \geq 2$ un entier et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $d_n(\mathbb{K})$ la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne contenant que des matrices diagonalisables.

1. Que dire du spectre réel d'une matrice antisymétrique réelle ? Dans le cas où n est impair, peut-on être plus précis ?
2. Déterminer $d_n(\mathbb{R})$.
3. Déterminer $d_2(\mathbb{C})$.

Exercice 24 (PLSR) À quelle condition sur la matrice A , la comatrice de A est-elle diagonalisable ?

Exercice 25 (CCP-Mines-Centrale-X) * Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

1. On suppose $\det(f) \neq 0$ et f^2 diagonalisable. Trouver un polynôme annulateur de f et en déduire que f est diagonalisable.
2. Dans le cas général, montrer que : f est diagonalisable si et seulement si f^2 est diagonalisable et $\ker(f) = \ker(f^2)$.
3. Qu'en est-il si E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ?

Exercice 26 (Mines) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que B soit diagonalisable et $AB^3 = B^3A$. Montrer que $AB = BA$. Proposer une généralisation.

Exercice 27 (Mines) Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E . Montrer que f est diagonalisable si et seulement s'il existe n hyperplans $H_1, \dots, H_n$ de E stables par f tels que $H_1 \cap \dots \cap H_n = \{0\}$.

Exercice 28 (PLSR) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $|\det A| = 1$. On suppose que les valeurs propres complexes de $\mathbb{C}$ sont de module différent de 1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 29 (Paris) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Donner une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simple semblable à M sur $\mathbb{R}$.

Exercice 30 (Lyon) On dit que la propriété $MT(n, \mathbb{K})$ est vraie si, pour tout couple (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A + \lambda B$ soit diagonalisable, A et B commutent.

1. Montrer que, si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, diagonalisables et commutent, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A + \lambda B$ est diagonalisable.
2. On suppose que $n \geq 2$. La propriété $MT(n, \mathbb{R})$ est-elle vraie ?
3. Montrer que $MT(2, \mathbb{C})$ est vraie.
4. On suppose que $n \geq 2$. La propriété $MT(n, \mathbb{F}_2)$ est-elle vraie ?
5. Soit $p \geq 3$ un nombre premier. La propriété $MT(2, \mathbb{F}_p)$ est-elle vraie ?

Polynômes d'endomorphismes

Exercice 31 (Mines) Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $x \in E$. On note :

$$I_x = \{P \in \mathbb{C}[X], P(u)(x) = 0\} \text{ et } E_x = \{P(u)(x), P \in \mathbb{C}[X]\}.$$

1. Montrer que I_x est un idéal non nul de $\mathbb{C}[X]$. On note μ_x le polynôme minimal unitaire qui l'engendre.
2. Soient $x, y \in E$ tels que $\mu_x \wedge \mu_y = 1$. Montrer que $\mu_{x+y} = \mu_x \mu_y$, puis que $E_{x+y} = E_x \oplus E_y$.
3. Que dire dans le cas de n éléments $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$?
4. Montrer que si π_u est le polynôme minimal de u , il existe $x \in E$ tel que $\mu_x = \pi_u$.

Exercice 32 (X) * Soient $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Quels sont les $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(u) \in \text{GL}(E)$?
2. À quelle condition sur u est-il vrai que $\mathbb{K}[u] \subset \text{GL}(E) \cup \{0\}$?

Exercice 33 (X) * Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ son polynôme minimal et p l'exposant de X dans sa décomposition en irréductibles (la valuation de ce polynôme).

1. Si $p = 0$ que dire de u ?
2. Montrer que $E = \ker u^p \oplus \text{Im} u^p$.
3. Montrer que le projecteur sur $\ker u^p$ parallèlement à $\text{Im} u^p$ est un polynôme en u .
4. Montrer que $p = \min\{k \in \mathbb{N}, \ker u^k = \ker u^{k+1}\}$.

Exercice 34 (CCINP) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I_n$ et $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est une famille libre. Montrer que $\text{tr}(A) = 0$.

Exercice 35 (IMT) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 36 (Mines)

1. Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\text{Tr} M = 0$ et $M(M - I_n) = 0$.
2. Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\text{Tr} M = n$ et $M^n = I_n$.

Exercice 37 (Mines) Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^5 - 2A^4 - 2A^3 + A^2 + 4A + 4I_n = 0$, $\text{Tr}(A) = 0$ et $\det(A) = \pm 1$.

Exercice 38 (Mines) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; A^3 + A = 10 I_n\}$. Déterminer l'image de E_n par $\det$.

Exercice 39 (Centrale) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice de nilpotence d .
 - (a) Montrer que $d \leq n$.
 - (b) Montrer que $M^2 - I_n$ est inversible, formuler son inverse.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^4 + M^3 + M^2 + M + I_n = 0$.
 - (a) Montrer que $|\text{Tr}(M)| \leq n$.
 - (b) Étudier le cas d'égalité.
 - (c) Étudier le cas $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 40 (Mines) À quelle condition sur n existe-il $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 - 2A^4 - 2A^3 + A^2 + 4A + 4I_n = 0$, $\text{Tr}(A^3) = 0$ et $\det(A) = 1$?

Exercice 41 (Mines) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que A est de rang pair.

Exercice 42 (CCINP) * Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Étudier la parité du polynôme caractéristique χ_A . Montrer que si n est impair alors $\det A = 0$.

Exercice 43 (CCP-Mines) Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que le rang de u est pair (on pourra considérer l'application induite par u sur $\text{Im} f$ et montrer qu'il s'agit d'un automorphisme de $\text{Im} f$).
2. Montrer qu'il existe une base e de E telle que la matrice de u dans e soit de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_s \\ 0 & I_s & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 44 (Mines)

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $P(M) = A$.
2. Donner un exemple montrant que le résultat précédent ne se généralise pas au cas où A n'est pas diagonalisable.

Exercice 45 (X) Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels qu'existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de polynôme minimal $X^3 + 2X + 2$. Même question dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

Matrices par blocs

Exercice 46 (Mines) * Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$.

1. Montrer que B est semblable à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$.
2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si B l'est.

Exercice 47 (X-Mines) * Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Á quelle CNS sur A , B est-elle diagonalisable ?

Exercice 48 (Mines) Soient A , B et C , trois matrices complexes de taille n tels que $AB = BC$; trouver une CNS pour que $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 49 (Mines) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On suppose B diagonalisable et $AB = BA$. Trouver une CNS pour que $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 50 (Mines)

1. Donner le rang de $A = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$.
2. Sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.
3. Sont-elles diagonalisables ?

Exercice 51 (Mines) Soient $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, $B = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^{-1} & I_n \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Exercice 52 (Mines) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que B soit diagonalisable.

Exercice 53 (PLSR-Mines) * Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$. Montrer que $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si A et B sont diagonalisables et il existe $X \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ tels que $AX - XB = C$.

Exercice 54 (X) Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ une matrice diagonalisable. On définit une suite $(A_n)_{n \geq 1}$ de matrices en posant $A_1 = A$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{1,1}A_n & a_{1,2}A_n \\ a_{2,1}A_n & a_{2,2}A_n \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs propres de A_n en fonction des valeurs propres de A_1 .

Sous-espaces stables

Exercice 55 (CCP-Mines) * Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie; on note μ_f son polynôme minimal.

1. Soit P un diviseur de μ_f dans $\mathbb{K}[X]$. Expliquer qu'il existe $v \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $P(f)(v) = 0_E$.
2. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Montrer que f admet au moins une droite vectorielle ou un plan vectoriel stable.

Exercice 56 (CCINP) * Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n , impaire; et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un hyperplan de E que u laisse stable.

Exercice 57 (Mines) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A .

2. Déterminer les $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

Exercice 58 (Mines) * Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie n , $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme minimal μ est de degré 2 et est irréductible sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $P_x = \text{Vect}(x, u(x))$ est un plan stable par u
2. Montrer que, si F est un sous-espace stable par u et $x \notin F$ alors $F \cap P_x = \{0\}$.
3. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de taille 2, le polynôme minimal de chaque bloc étant μ .

Exercice 59 (Centrale/Mines) * Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E de dimension finie.

1. Montrer que si u est diagonalisable alors tout sous-espace de E admet un supplémentaire stable par u .
2. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace F de E admet un supplémentaire stable par u .
3. Montrer l'équivalence entre
 - Tout F sous-espace vectoriel de E stable par u et non réduit à $\{0_E\}$ admet au moins un vecteur propre.
 - Le polynôme caractéristique χ_u est scindé.
4. On suppose χ_u scindé. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace de E , stable par u , admet un supplémentaire stable par u .

Exercice 60 (Mines) * Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E de dimension finie. Montrer l'équivalence entre

- χ_f est irréductible.
- Les seuls sous-espaces vectoriels stables par f sont E et $\{0_E\}$.

Exercice 61 (Ulm) * Soient $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les deux conditions suivantes :

- tout sous-espace de E stable par u a un supplémentaire stable par u ;
- le polynôme minimal de u est produit de facteurs irréductibles unitaires distincts.

Endomorphismes cycliques

Exercice 62 (Mines) Soit u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel de dimension n . Démontrer l'équivalence entre :

- (i) $(\text{Id}, u, \dots, u^{n-1})$ est une famille libre ;
- (ii) il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une famille libre.

Exercice 63 (X-Mines-ENS) * Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E = \{P(u)(x) ; P \in \mathbb{C}[X]\}$.

1. On suppose que u est cyclique. Montrer que tout endomorphisme induit par u est cyclique.
2. Montrer que $I \mapsto \{Q(u)(x), Q \in I\}$ réalise une correspondance bijective entre les idéaux de $\mathbb{C}[X]$ contenant P et les sous-espaces de E stables par u .
3. Montrer que l'ensemble des sous-espaces de E stables par u est fini.
4. Réciproquement, montrer que si l'ensemble des sous-espaces de E stables par u est fini, alors u est cyclique.

Exercice 64 (SR) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Un élément u de $\mathcal{L}(E)$ est dit cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $(u^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$ soit une base de E .

1. Quels sont les endomorphismes de E diagonalisables et cycliques ?
2. Montrer que, si u est cyclique, le commutant $C(u)$ de u dans $\mathcal{L}(E)$ est égal à $\mathbb{K}[u]$.

3. Montrer que, si $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et des sous-espaces $E_1, \dots, E_r$ de E stables par u , tels que $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$ et que, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, l'induit de u sur E_i soit cyclique.

Exercice 65 (Lyon) * Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ dans $\mathbb{K}[X]$. On note $x_1, \dots, x_n$ ses racines comptées à mesure de leur multiplicité, et on pose $S_k = \sum_{i=1}^n (x_i)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En considérant la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

montrer la relation $\forall k \geq n, S_k + a_{n-1}S_{k-1} + \dots + a_0S_{k-n} = 0$. *Facultatif* : Démontrer que $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, S_k + a_{n-1}S_{k-1} + \dots + a_{n-k+1}S_1 = -k a_{n-k}$.

Sous-groupes de $GL_n(\mathbb{K})$ et matrices de $M_n(\mathbb{Z})$

Exercice 66 (Mines-X) * Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n .

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = \text{Id}$. Montrer que u est diagonalisable. Quelle est la nature de $\frac{u + \text{Id}}{2}$?
2. Montrer que le cardinal d'une famille d'endomorphismes distincts $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u^2 = \text{Id}$ et commutant deux à deux est majoré par une constante que l'on déterminera.
3. Soit G un sous-groupe fini de $GL(E)$ tel que, pour tout $g \in G, g^2 = \text{Id}_E$. Montrer que G est abélien et que son cardinal est une puissance de 2. Quel est le cardinal maximal d'un tel sous-groupe ?
4. Que peut-on dire de m et n dans $\mathbb{N}^*$ tels que $GL_m(\mathbb{C})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ soient isomorphes ?

Exercice 67 (ULSR) Déterminer le cardinal minimal p d'un sous-groupe G de $GL_2(\mathbb{C})$ tel que $\text{Vect}(G) = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Si G_1 et G_2 conviennent et sont de cardinal p , sont-ils conjugués ?

Exercice 68 (X) Soient V un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe de $GL(V)$.

1. On suppose que $G = GL(V)$. Que vaut $\text{Vect}(G)$? La réciproque est-elle vraie ?
On suppose maintenant que, pour tout $g \in G, g - \text{id}$ est nilpotent.
2. Quels sont les éléments diagonalisables de G ?
3. On suppose que G est fini et que $\text{Vect}(G) = \mathcal{L}(V)$. Quelle est la dimension de V ?
4. Si G n'est plus fini mais que $\text{Vect}(G) = \mathcal{L}(V)$, quelle est la dimension de V ?

Exercice 69 (ULSR) Soit $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On note $C_H = \{M \in GL_2(\mathbb{Z}), MH = HM\}$.

1. Montrer que C_H est un sous-groupe infini de $GL_2(\mathbb{Z})$.
2. Montrer que $C_H = \mathbb{Z}(H) \cap GL_2(\mathbb{Z})$, où $\mathbb{Z}(H) = \{xI + yH, (x, y) \in H^2\}$.
3. Montrer que C_H est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et donner un système de générateurs.

Exercice 70 (PLSR) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{F}_3)$. On admet que $A^{13} = -I_3$.

1. Quels calculs auriez-vous fait pour justifier que $A^{13} = -I_3$?
2. Montrer que $A \in GL_3(\mathbb{F}_3)$ et que A est d'ordre 26 dans ce groupe.
3. On note G le sous-groupe de $GL_3(\mathbb{F}_3)$ engendré par A , et on pose $V = G \cup \{0\}$. Montrer que $V = \text{Vect}(I_3, A, A^2)$.
4. On pose $W = \text{Vect}(I_3, A)$. Montrer que, pour tout $M \in G$, il existe $N, P \in W \setminus \{0\}$ telles que $M = P^{-1}N$.
5. On note H le sous-groupe de $GL_3(\mathbb{F}_3)$ engendré par A^2 . Montrer que H est isomorphe à $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, puis que $|H \cap W| = 4$.

Exercice 71 (Paris) * Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe fini de $GL(E)$. Montrer que si F un sous-espace vectoriel de E stable par tous les éléments de G alors F possède un supplémentaire stable par tous les éléments de G .

Exercice 72 (SR)

1. Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que le groupe $GL_n(\mathbb{Z})$ des inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ de déterminant ± 1 .
2. Soit $M \in GL_3(\mathbb{Z})$ n'admettant ni 1 ni -1 comme valeur propre. Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 73 (X) Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ engendrant l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On se donne une base $(g_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée d'éléments de G .

1. Montrer que la fonction $M \in G \mapsto (\text{tr}(Mg_i))_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$ est injective.
2. Montrer que, si l'ensemble des classes de similitude des éléments de G est fini, alors G est fini.

Exercice 74 (X) Soit V un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. On considère G un sous-groupe de $GL_n(V)$.

1. On suppose que $G = GL_n(V)$. Que vaut $\text{Vect}(G)$? La réciproque est-elle vraie ?
2. On suppose que pour tout $g \in G, g - \text{Id}_V$ est nilpotent. Quels sont les éléments diagonalisables de G ?
3. On suppose que G est fini et que $\text{Vect}(G) = \text{End}(V)$. Quelle est la dimension de V ?

4. Si G n'est plus fini mais que $\text{Vect}(G) = \text{End}(V)$, quelle est la dimension de V ?

Exercice 75 (ENS Lyon) * Soit G un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ dont tous les éléments d'ordre fini, majoré par $m \in \mathbb{N}^*$.

1. Que peut-on dire de $\{\text{Tr}(g), g \in G\}$?
2. Montrer que G est un groupe fini (théorème de Burnside).

Exercice 76 (X) * Soient $n \in \mathbb{N}^*$, G un sous-groupe fini de $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $|G| \leq \prod_{i=0}^{n-1} (3^n - 3^i)$.

Exercice 77 (X) * Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ non nulle et $M = I_n + 3R$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M^k \neq I_n$.

Exercice 78 (ULSR-X) * Soit p premier et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\text{Tr}(A^p) \equiv \text{Tr}(A)[p]$.

Calculs de puissances de matrices et Équations matricielles

Exercice 79 (Mines) Calculer les puissances A^n ($n \in \mathbb{N}$) :

$$1. M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 2. M = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix}$$

Exercice 80 (CCINP) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Trouver un polynôme annulateur P de A .
2. Si $k \in \mathbb{N}$, effectuer la division euclidienne de X^k par P . En déduire A^k .
3. On définit (X_n) par $X_0 = {}^t(1, 1, 1)$ et $\forall k \in \mathbb{N}, X_{k+1} = AX_k$. Calculer X_k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 81 (Mines) Soit $P = (n+1)X^{n+1} - \sum_{j=0}^n X^j \in \mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que toutes les racines de P sont simple et de module inférieur à 1. Quelles sont les racines de P de module 1.
2. Soit u une suite définie par $(u_0, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ $u_{p+n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n u_{p+j}$. Déterminer la limite de la suite $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$.

Exercice 82 (CCP-Centrale) Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geq 2$) nilpotente d'ordre n . Peut-il exister $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = M$?

Exercice 83 (Mines) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trigonaliser A .
2. Résoudre $X^n = A$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 84 (IMT)

1. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que $-2, 1, 2, -3$ sont les valeurs propres possibles de M , vérifiant $M^2 + M = A$.
3. Montrer que M est diagonalisable et résoudre l'équation $M^2 + M = A$.

Exercice 85 (Mines) Résoudre l'équation $X^2 - 2X = A$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 86 (Mines) Résoudre l'équation $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 87 (Centrale-Mines) Déterminer les matrices A telles que $A^2 = M$ où :

$$1. M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$2. M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$3. M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4. M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5. M = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 5 \\ -5 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

Exercice 88 (SR) Montrer que toute matrice de $GL_n(\mathbb{C})$ admet une racine carrée.

Exercice 89 (X) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on pose $R(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), M^2 = A\}$.

1. Déterminer le cardinal maximal d'une famille de matrices de $R(I_n)$ non semblables deux à deux.
2. On suppose A diagonalisable avec n valeurs propres distinctes. Déterminer le cardinal de $R(A)$.
3. Est-il vrai que, si A est diagonalisable, toutes les matrices de $R(A)$ le sont ?
4. Toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet-elle une racine carrée ?
5. On pose $U_n = \{I_n + N, N \text{ nilpotente}\}$. Montrer que toute matrice A de U_n admet une unique racine carrée dans U_n .

Exercice 90 (SR) * Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est toute puissante sur le corps $\mathbb{K}$ (TP $\mathbb{K}$) si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B^k = A$.

1. Trouver les matrices TP $\mathbb{K}$ pour $n = 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$.
2. On suppose que $\chi_A = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ où les λ_i sont distincts dans $\mathbb{K}$ et les α_i dans $\mathbb{N}^*$.
 - (a) Montrer qu'il existe $N_1, \dots, N_k$ nilpotentes telles que A soit semblable à une matrice diagonale par blocs avec comme blocs diagonaux $\lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1, \dots, \lambda_k I_{\alpha_k} + N_k$.
 - (b) Montrer que A est TP $\mathbb{K}$ si et seulement si les $\lambda_i I_{\alpha_i} + N_i$ le sont.
 - (c) En déduire que les matrices de $GL_n(\mathbb{C})$ sont toutes puissantes.

Exercice 91 (PLSR) Une matrice A est dite *surpuissante* si, pour tout entier $n \geq 1$, il existe une matrice B telle que $B^n = A$. On se place dans tout l'exercice en dimension $d = 2$.

1. Identifier, parmi les matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, les matrices surpuissantes.
2. Sur $\mathbb{R}$ cette fois-ci, montrer que

$$\{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ surpuissante}\} = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \exists C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), C^2 = A\}.$$

3. Sur $\mathbb{Q}$, montrer que les matrices surpuissantes admettent une racine de déterminant 1.

Exercice 92 (PLSR) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non inversible et m la multiplicité de 0 dans χ_A . Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :

- (i) $\ker A = \ker A^2$,
- (ii) il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^m = A$,
- (iii) pour tout $k \geq 1$, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^k = A$.

Exercice 93 (X) On note $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $M(f) : n \in \mathbb{N}^* \mapsto \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k) \in E$.

1. Montrer que pour tout $f \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^k(f)(n) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f(1)$.
2. Montrer que si f est polynomiale, $M(f)$ l'est également.

Exercice 94 (Lyon) Déterminer les matrices $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $k \geq 2$, on dispose de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ vérifiant $A = M^k$.

Exercice 95 (PLSR) Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'équation $(E) : X - AXB = C$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$ les spectres complexes de A et B .

1. On suppose que, pour tout $(\alpha, \beta) \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \times \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$, $\alpha\beta \neq 1$. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution.
2. Que se passe-t-il dans le cas général ?

Exercice 96 (CCINP-ENS Lyon)

- * Montrer que A , matrice carrée complexe de rang 1, est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.
- Donner le rang de la matrice complexe $M = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{pmatrix}$

À quelle(s) condition(s) est-elle diagonalisable ? Qu'en est-il s'il s'agit d'une matrice réelle ?

Exercice 97 (Mines) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 2. Exprimer son polynôme caractéristique en fonction de $\text{Tr} A$ et $\text{Tr}(A^2)$.

Exercice 98 (Mines) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\text{rg}(A) = 2$, $\text{Tr}(A) = 0$, $A^n \neq 0$.

- Montrer que A est diagonalisable
- Calculer la dimension de $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AM = MA\}$.
- On suppose de plus que $\text{Tr}(A^2) = 2$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 99 (X) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit u et v dans $\mathcal{L}(E)$, $c = u \circ v - v \circ u$, on suppose $\text{rang} c = 1$.

- Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de c est égale à $E_{n-1,n}$.
- Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(\text{Im} c) \subset \ker c$.
- Montrer que χ_u n'est pas irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace vectoriel de E non trivial tel que $u(F) \subset F$. Montrer que χ_u n'est pas irréductible dans $\mathbb{K}[X]$. Étudier la réciproque.

Commutant et bicommutant

Exercice 100 (CCINP-Mines) * Soient u et v deux endomorphismes qui commutent, u ayant n valeurs propres distinctes (avec n dimension de E).

- Montrer que u et v sont codiagonalisables.
- Montrer que le commutant de u est $\mathbb{R}[u]$ et en déduire qu'il est de dimension n .
- Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $A = P(M)$.

Exercice 101 (X) Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension finie, et qui commutent deux à deux. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall i \in I$, $f_i \in \mathbb{C}[g]$.

Exercice 102 (Centrale-Mines-X) * Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable. On note :

$\text{Com}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = g \circ f\}$. On note $(\lambda)_{1 \leq j \leq p}$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f , et pour tout j , E_j l'espace propre associé à la valeur propre λ_j , et $d_j = \dim(E_j)$.

- Montrer qu'un endomorphisme g appartient à $\text{Com}(f)$ si et seulement si il laisse stable tous les sous-espaces propres E_j .
- On considère e une base de diagonalisation de f (obtenue comme union de bases des E_j), et $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Caractériser les matrices dans la base $\mathcal{B}$ des $g \in \text{Com}(f)$.
- En déduire la dimension de $\text{Com}(f)$. A-t-on $\text{Com}(f) = \mathbb{K}[f]$?
- Soit $\text{Bicom}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E), \forall h \in \text{Com}(f), h \circ g = g \circ h\}$. Montrer que $\text{Bicom}(f) = \mathbb{K}[f]$.

Exercice 103 (Mines) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, $\mathcal{C}(M) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- M possède n valeurs propres distinctes,
- $\dim \mathcal{C}(M) = n$,
- $\forall A \in \mathcal{C}(M), \exists P \in \mathbb{R}[X], A = P(M)$,
- $\forall (A, B) \in \mathcal{C}(M)^2, AB = BA$.

Exercice 104 (X) Soient E un espace vectoriel de dimension finie n , $u \in \mathcal{L}(E)$, $C(u)$ la sous-algèbre des endomorphismes de E commutant à u .

- On suppose que u est diagonalisable. À quelle condition a-t-on $C(u) = \mathbb{K}[u]$?
- On revient au cas général. Montrer que, si $\mathbb{K}[u]$ est de dimension n , alors $C(u) = \mathbb{K}[u]$. La réciproque est-elle vraie ?

Classes de similitude

Exercice 105 (Mines) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant même polynôme minimal et même polynôme caractéristique. Les matrices A et B sont-elles semblables ?

Exercice 106 (Mines) Soient A une matrice carrée à coefficients complexes ; montrer que si $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ sont semblables, alors A est nilpotente.

Exercice 107 (Centrale) Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice de nilpotence égal à k . Montrer que $k \leq \text{rg}(u) + 1$
2. Soient u, v nilpotents de rang 1. Montrer qu'il existe deux bases dans lesquelles u et v ont la même matrice. On dira que u et v sont semblables.
3. Soient u et v deux endomorphismes de rang 2.
 - (a) On suppose que u et v ont pour polynôme minimal $X^2(X-1)$. Montrer que u et v sont semblables.
 - (b) On suppose que u et v sont nilpotents de même indice k . Montrer que u et v sont semblables.

Exercice 108 (X-Lyon) Quelles sont les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que M soit semblable à $2M$?

Exercice 109 (ENS) * Déterminer les matrices de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec tous les éléments de leur classe de conjugaison.

Exercice 110 (ENS) * Déterminer les matrices de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ dont la classe de similitude est finie.

Exercice 111 (Lyon) Montrer que deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ qui ont le même polynôme caractéristique, de discriminant non nul, sont semblables.

Exercice 112 (X) * Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice de permutation associée à σ . Montrer que, si σ et σ' sont dans $\mathcal{S}_n$, σ et σ' sont conjuguées dans $\mathcal{S}_n$ si et seulement si P_σ et $P_{\sigma'}$ sont semblables.

Trigonalisabilité ; endomorphismes nilpotents

Exercice 113 (Mines) Soient A et B dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = B^2 = 0$, $\text{rg} A \geq n$ et $\text{rg} B \geq n$. Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 114 (CCP-Centrale) * Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E tels que $uv = vu$ et v est nilpotente. Montrer que $\chi_{u+v} = \chi_u$ (et que $\det(u+v) = \det(u)$). Qu'en est-il pour un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ?

Exercice 115 (Mines-X) Soient A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0_{\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})}$. Montrer qu'elles admettent un vecteur propre commun, puis que A et B sont cotrigonalisables.

Exercice 116 (X-Mines-Centrale) * Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que $uv - vu = u$.

1. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k v - v u^k$. En déduire que u est nilpotent.
2. (ENS) A-t-on le même résultat pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$? $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?
3. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun, puis qu'ils sont cotrigonalisables.
4. Montrer le même résultat dans le cas $uv - vu \in \text{Vect}(u, v)$.

Exercice 117 (Ulm-Lyon) * Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que $\text{rg}(uv - vu) \leq 1$. Montrer que u et v sont cotrigonalisables.

Exercice 118 (Mines) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes. Étudier l'équivalence entre :

- (i) A est diagonalisable ;
- (ii) $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(A) \in \mathcal{N} \Rightarrow P(A) = 0$.

Exercice 119 (SR) * Montrer qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ $\text{tr}(N^k) = 0$.

Exercice 120 (X-Mines-Centrale) * Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$. On suppose : $\forall k \in \mathbb{N}, \text{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$.

1. Montrer que les λ_i sont les valeurs propres de A avec multiplicité.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\text{Tr}(A^k) = \text{Tr}(B^k)$. Les matrices A et B sont-elles semblables ?
Montrer que $\chi_A = \chi_B$.

Exercice 121 (Ulm) Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, u et v dans $\mathcal{L}(E)$ admettant exactement les mêmes sous-espaces stables. Montrer que u et v sont cotrigonalisables. Commutent-ils ?

Exercice 122 (Ulm) Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, u et v dans $\mathcal{L}(E)$ admettant exactement les mêmes sous-espaces stables. Montrer que u et v sont cotrigonalisables. Commutent-ils ?

Exercice 123 (ENS)

1. Soit $G \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. On suppose que G^k est semblable à G pour tout entier $k \geq 1$. Montrer que $G - I_n$ est nilpotente.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. On pose $M = I_n + A$. Montrer que M^k est semblable à M pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 124 (PLSR)

1. Quelle est la dimension maximale d'une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendrée par une matrice nilpotente ?
2. Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \dots, A_m$ des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent deux à deux, $\mathcal{A}$ la sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendrée par $A_1, \dots, A_m$. Montrer que la dimension de $\mathcal{A}$ est majorée par $n(n - \min\{\text{rg}(A_i) ; 1 \leq i \leq m\})$.

Exercice 125 (PLSR) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice m , $x \in E$ tel que $f^{m-1}(x) \neq 0$.

1. Montrer que la famille $(f^k(x))_{0 \leq k \leq m-1}$ est libre. On note V le sous-espace de E engendré par cette famille.
2. Soit $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(f^{m-1}(x)) \neq 0$, W le sous-espace de E^* engendré par $(\varphi \circ f^i)_{0 \leq i \leq m-1}$, $W^\perp$ l'ensemble des $y \in E$ tels que $\forall \psi \in W^\perp$, $\psi(y) = 0$. Montrer que $W^\perp$ est un supplémentaire de V dans E stable par f .
3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f soit diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de la forme J_k avec $k \in \mathbb{N}^*$, où $J_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ est une matrice dont tous les coefficients sont nuls en dehors de ceux de la sur-diagonale qui sont égaux à 1.

Autour des décompositions matricielles

Exercice 126 (SR) *

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables. À quelle condition existe-t-il $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que PAP^{-1} et PBP^{-1} soient diagonales ?
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A s'écrit de manière unique $A = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$.
3. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\pi_A = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\beta_i}$ son polynôme minimal et $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(A)$ est diagonalisable si et seulement si $P^{(j)}(\lambda_i) = 0$ pour tous $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, \beta_i - 1 \rrbracket$.

Exercice 127 (Paris)

1. Montrer que toute $M \in \text{SL}_n(\mathbb{C})$ s'écrit de façon unique UD où $U \in \text{SL}_n(\mathbb{C})$ est de la forme $I_n + N$ avec N nilpotente, $D \in \text{SL}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable et $UD = DU$.
2. Soit ρ un morphisme de groupes de $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ dans $\text{SL}_m(\mathbb{C})$ tel que les coefficients de $\rho(M)$ soient des fonctions polynomiales de ceux de M . Montrer que ρ respecte la décomposition de la question précédente.

Exercice 128 (PLSR) Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et $v, w \in \mathcal{L}(E)$. On note $u = vw - wv$. Pour $\lambda \in \text{Sp}(u)$, on note $F_u(\lambda) = \bigcup_{m \geq 1} \ker(u - \lambda \text{Id})^m$

1. Montrer que $F_u(\lambda)$ est un sous-espace vectoriel stable par u et qu'il admet un supplémentaire stable par u .
2. On écrit $\pi_u = (X - \lambda)^p Q$ avec $(X - \lambda) \wedge Q = 1$. Montrer que $E = F_u(\lambda) \oplus \ker Q(u)$.
On suppose de plus que u commute avec v . On note p_λ le projecteur sur $F_u(\lambda)$ parallèlement à $\ker Q(u)$.
3. Montrer que p_λ commute avec v .
4. Montrer que $\text{Tr}(up_\lambda) = \lambda \text{rang}(p_\lambda) = 0$.
5. En déduire que u est nilpotent.
6. On suppose désormais que $vw^2 - w^2v = w$. Montrer qu'il existe un entier d impair tel que $\pi_w = X^d$.

Applications et sous-algèbre de $L(E)$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Exercice 129 (CCP-Mines-Centrale-X) * Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On note P_A le polynôme caractéristique de A .

Pour $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $u(X) = AX - XB$.

1. Montrer l'équivalence entre :

- (a) A et B n'ont aucune valeur propre commune.
- (b) $P_A(B) \in GL_n(\mathbb{C})$.
- (c) $\forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), AX = XB \Rightarrow X = 0_{\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})}$ (on pourra dans un premier temps vérifier que si $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $AX = XB$, alors pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)X = XP(B)$).
- (d) $\forall Y \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \exists! X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), AX - XB = Y$.

2. Montrer que, si α est valeur propre de A et β valeur propre de B , $\alpha - \beta$ est valeur propre de u .

3. Soit λ une valeur propre de u . Montrer que λ s'écrit $\alpha - \beta$ où α (resp. β) est valeur propre de A (resp. B).

4. Déterminer le spectre de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : X \mapsto AX - XB$.

Exercice 130 (Mines-X-Centrale-ENS) * Soient $\mathbb{K}$ un corps, n, p, r dans $\mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, P dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r telle que $MP = PN$. Montrer que $\chi_M \wedge \chi_N$ est de degré supérieur ou égal à r .

Exercice 131 (SR) * Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique $\chi_A = \prod_{i=1}^r \underbrace{(X - \lambda_i)^{\alpha_i}}_{=P_i}$.

- 1. Montrer que P_i est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par A sur $\ker P_i(A)$.
- 2. Montrer qu'il existe D diagonalisable et N nilpotente telles que $A = D + N$ et $ND = DN$.
- 3. Si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\text{Comm}_X : M \mapsto MX - XM$. On reprend les notations précédentes. Montrer que $\text{Comm}_A = \text{Comm}_D + \text{Comm}_N$, que Comm_D et Comm_N commutent et sont respectivement diagonalisable et nilpotente.

Exercice 132 (Mines-Centrale) * Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E . On note ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par $\phi(v) = v \circ u - u \circ v$.

- 1. On suppose que u est nilpotent. Montrer que ϕ est nilpotent.
- 2. On suppose que u est diagonalisable. Montrer que ϕ est diagonalisable.
- 3. Étudier les réciproques.

Exercice 133 (X-Lyon) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $T_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM - MA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- 1. Montrer que si A est nilpotente alors T_A est nilpotent.
- 2. Montrer que si A possède une unique valeur propre alors T_A est nilpotent.
- 3. Montrer que si A possède plusieurs valeurs propres alors T_A n'est pas nilpotent.
- 4. Que peut-on dire de T_A si A est diagonalisable?
- 5. Et si A est trigonalisable?
- 6. Quel est le rang maximal de T_A ?
- 7. Montrer que s'il existe $\lambda \in \text{Spec}(A)$ tel que $\dim \ker(A - \lambda I_n) \geq 2$, alors T_A n'est pas de rang maximal.

Exercice 134 (Paris) Soient E un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel, $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur, φ l'élément de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ défini par $\forall u \in \mathcal{L}(E), \varphi(u) = u \circ p + p \circ u$. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable?

Exercice 135 (ENS-Centrale) * Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- 1. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si pour tout $\mu \in \mathbb{C}$, $I_n - \mu A$ est inversible.
- 2. On suppose que $f(\text{GL}_n(\mathbb{C})) \subset \text{GL}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\text{rg}(f(M)) = \text{rg}(M)$.

Exercice 136 (PLSR) Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = 1$ et $\text{Im} A = \text{Im} B$.

- 1. Montrer qu'il existe $P, Q \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$ et $B = P \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$.
- 2. Pour $P, Q \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$, on pose $\Psi_{P,Q} : M \mapsto PMQ$. On pose $\tau : M \mapsto M^T$. Soit $\Psi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ qui conserve le rang. Montrer qu'il existe $P, Q \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ telles que $\Psi = \Psi_{P,Q}$ ou $\Psi = \Psi_{P,Q} \circ \tau$.

Exercice 137 (SR) Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $[A, B] = AB - BA$. Soit $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \text{Tr}(M) = 0\}$.

- 1. Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ stable par $[\cdot, \cdot]$; en exhiber une base.
- 2. Calculer les $[A, B]$ pour les $A, B \in \{X, Y, H\}$ où $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Soit $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ linéaire telle que, pour tous $A, B \in \mathcal{A}$, $\rho([A, B]) = [\rho(A), \rho(B)]$. Montrer que $\rho(H)$ admet une valeur propre α .
Montrer que $\rho(X)(E_\alpha(\rho(H))) \subset \ker(\rho(H) - (\alpha + 2)I_n)$.
Montrer que $\rho(Y)(E_\alpha(\rho(H))) \subset \ker(\rho(H) - (\alpha - 2)I_n)$.
4. Montrer que la suite $(\rho(X))^k(x)$ stationne à 0 si $x \in E_\alpha$.
5. On suppose désormais ρ irréductible : pour tout V sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$,

$$\forall A \in \mathcal{A}, \rho(A)(V) \subseteq V \implies V = \{0\} \text{ ou } \mathbb{C}^n.$$

Montrer que $\rho(H)$ est diagonalisable.

6. Montrer que $\text{Sp}(\rho(H)) = \{-m, -m+2, \dots, m-2, m\}$ avec $m \in \mathbb{N}$.
7. Déterminer les ρ possibles.

Exercice 138 (X) Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le seul élément nilpotent est la matrice nulle. Montrer que les éléments de $\mathcal{A}$ sont simultanément diagonalisables.

Exercice 139 (PLSR) Soit A une $\mathbb{R}$ -algèbre commutative non triviale de dimension finie. On note $\mathcal{N}il(A) = \{x \in A \mid x \text{ nilpotent}\}$.

1. Rappeler la définition d'un idéal et montrer que $\mathcal{N}il(A)$ est un idéal.
2. Montrer que Si $x \in \mathcal{N}il(A)$ alors $1 - x$ est inversible.
3. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall x_1, \dots, x_M \in \mathcal{N}il(A) : x_1 \dots x_M = 0$.
4. Montrer que $M = \dim A$ convient.
5. Soit $\mathcal{L}_x$ l'endomorphisme de A qui à y associe xy . Montrer que : $x \in \mathcal{N}il(A) \iff \chi_{\mathcal{L}_x} = X^{\dim A}$.
6. Montrer que : $\forall x \in A : \chi_{\mathcal{L}_x}(x) = 0$.

Exercice 140 (Ulm) * Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que pour tout $v \in \mathbb{C}^n$ non nul, on a $\{Mv, M \in \mathcal{A}\} = \mathbb{C}^n$. Montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.