MP*2 LLG
2026/2027

Programme de colles - Semaine 7 - du 16/11 au 20/11

Réduction : Exercices de révisions sur tout le chapitre.

Topologie des espaces vectoriels normés : exercices élémentaires, proches du cours, sur le début du chapitre pour vérifier l'assimilation des notions. Nous avons avancé le cours mais corrigé aucun exercice. Les étudiants manqueront donc de pratique, surtout en début de semaine.

Normes et espaces vectoriels normés : Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Structure d'espace vectoriel normé. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel. Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$. Normes $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$, $\|\ \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes. Norme sur un produit fini d'espaces vectoriels normés.

Distance associée à une norme. Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules.

Topologie d'un espace normé : Ouvert d'un espace normé. Stabilité par réunion quelconque, par intersection d'une famille finie. Une boule ouverte est un ouvert. Voisinage d'un point.

Fermé d'un espace normé. Stabilité par intersection quelconque, par réunion finie. Une boule fermée, une sphère, sont fermées.

Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé : Parties, suites, fonctions bornées. Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Suites extraites, valeurs d'adhérence. Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge. Suite à valeurs dans un espace produit. Caractérisation séquentielle des fermés.

Comparaison des normes : Norme plus fine. Normes équivalentes. Invariance du caractère borné d'une suite (utilisation des suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes). Invariance du caractère borné et de la convergence d'une suite par passage à des normes équivalentes. Utilisation des suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes. Comparaison des normes usuelles de $\mathbb{K}^n$ (avec constantes optimales). La comparaison de normes définies sur des espaces fonctionnels fait partie des capacités attendues des étudiants. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente. Nous avons énoncé le résultat d'équivalences des normes en dimension finie et les étudiants peuvent l'utiliser (mais il ne sera démontré que plus tard).

Intérieur, adhérence : Point intérieur, point adhérent. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie. Définitions et caractérisations. Adhérence d'une boule ouverte, intérieur d'une boule fermée. Parties denses dans E, dans X.

Topologie induite : Si X est une partie d'un espace normé, boules, ouverts et fermés relatifs de X. Voisinage relatif. Par définition, une partie U de X est un ouvert relatif si elle est voisinage relatif de chacun de ses points. Caractérisation comme intersection avec un ouvert de E. Définition des fermés relatifs comme complémentaire dans X des ouverts relatifs. Caractérisation séquentielle, caractérisation comme intersection avec X de fermés de E.

Étude locale d'une application, continuité : Limite en un point adhérent à une partie A. Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée. Caractérisation séquentielle. Limite d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.
Continuité en un point. Caractérisation séquentielle. Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues.

Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé, par une application continue.
Applications uniformément continues, applications lipschitziennes. Exemple : l'application $x \mapsto d(x, A)$ où A est une partie de E.