Programme de colles - Semaine 1 - du 23/9 au 27/9

Séries numériques :
Série numérique dont le terme général est réel ou complexe. La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$. Somme et restes d'une série convergente. En cas de convergence, notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Linéarité de la somme. Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Divergence grossière.

Lien suite-série, séries télescopiques : la suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ ont même nature.
Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.

Séries à termes positifs : ne série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ (idem avec $u_n = O(v_n)$), la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$. Règle de d'Alembert. La règle de Raab-Duhamel a été vue mais doit être redémontrée à chaque utilisation.

Comparaison série-intégrale : Technique de comparaison série-intégrale. Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes, notamment dans le cas d'une fonction monotone. Interprétation géométrique.
Exemple des séries de Riemann. Exemple des séries de Bertrand (ces dernières sont hors programme ; résultat à redémontrer).

Séries numériques non nécessairement positives : Série absolument convergente. Une série absolument convergente de réels ou complexes est convergente.
Critère des séries alternées. Signe et encadrement des restes.
Pas de théorème de comparaison pour les séries de signe quelconque. Étude d'exemples.
Si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

La transformation d'Abel a été vue et utilisée (mais est officiellement hors-programme, les étudiants doivent donc réécrire la transformation).

Sommation des relations de comparaison : Sommation des relations de domination, négligeabilité, équivalence dans le cas des séries convergentes, des séries divergentes (la suite de référence est positive à partir d'un certain rang). Cas particulier : théorème de Cesàro (pour une limite finie ou infinie).

Application au développement asymptotique de la série harmonique et à d'autres exemples de recherches d'équivalents et de développements asymptotiques.

Familles sommables :
Familles positives : Somme d'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$, définie comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$ de l'ensemble des sommes $\sum_{i\in F} u_i$ quand F décrit l'ensemble des parties finies de I. La somme est notée $\sum_{i\in I} u_i$.
Cas où I est fini, où $I = \mathbb{N}$ (lien avec les séries). On note $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$ si la série $\sum u_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ diverge.
Invariance de la somme par permutation.
La famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ est dite sommable si $\sum_{i\in I} u_i < +\infty$. On souligne que les calculs sont justifiés par la seule positivité et qu'ils fournissent un moyen d'étudier la sommabilité. Opérations : somme, multiplication par un réel positif.

Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j \in J$ et si $(u_i)_{i\in I}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, alors $\displaystyle\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i$. Cas où I est un produit : théorème de Fubini positif.

Familles sommables de nombres complexes : La famille $(u_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{C}^I$ est dite sommable si $\displaystyle\sum_{i\in I}|u_i| < +\infty$. Notation $\ell^1(I)$. Pour $I = \mathbb{N}$, lien avec les séries. Sommabilité d'une sous-famille d'une famille sommable. Somme d'une famille sommable de nombres complexes. Si $(a_i)_{i\in I}$ est sommable et si $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, il existe une partie finie F de I telle que $\displaystyle\left|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in F} a_i\right| \leqslant \varepsilon$.. Invariance de la somme par permutation.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes et soit (v_i) une famille sommable de réels positifs vérifiant, pour tout $i \in I$, $|u_i| \leqslant v_i$. Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable. Linéarité de la somme.

Théorème de sommation par paquets : si I est réunion disjointe des I_j pour $j \in J$, si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $\displaystyle\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i$. Cas où I est un produit : théorème de Fubini.

Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_{i'})_{i'\in I'}$ sont sommables alors $(a_i b_{i'})_{(i,i')\in I\times I'}$ est sommable et

$$\sum_{(i,i')\in I\times I'} a_i b_{i'} = \sum_{i\in I} a_i \times \sum_{i'\in I'} b_{i'}.$$

Extension, sans rédaction de la démonstration, au produit d'un nombre fini de familles sommables.

Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Intégration sur un intervalle quelconque : Les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, corps des réels ou des complexes.

Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a,b[$ $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$*, ou* $]a,b]$ *:* Pour f continue par morceaux de $[a,b[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ a une limite finie en b. (Dans le cas où b réel et f continue par morceaux sur $[a,b]$ cette limite existe et vaut $\displaystyle\int_a^b f$). Si tel est le cas, on note $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ ou cette limite. Équivalence entre la convergence de $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_c^b f$. Linéarité de l'intégrale sur $[a,b[$, positivité. Si f est continue, dérivation de $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f$. Adaptation aux intervalles $]a,b]$.

Intégration des fonctions positives sur un intervalle de la forme $[a,b[$ *:* Si f est positive sur $[a,b[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est majorée. Écriture $\displaystyle\int_a^b f = +\infty$ en cas de divergence.

Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$. Adaptation à $]a,b]$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t$. Pour $a \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\ \mathrm{d}t$.

Intégrabilité sur un intervalle de la forme $]a,b]$ *ou* $[a,b[$ *:* Une fonction f est dite intégrable sur $[a,b[$ si elle est continue par morceaux sur $[a,b[$ et si $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge. On utilise indifféremment les expressions : f est intégrable sur $[a,b[$ et l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge absolument.

Pour f de signe constant, $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a,b[$. Un calcul montrant que $\displaystyle\int_I |f| < +\infty$ vaut preuve d'intégrabilité.

Si f est intégrable sur $[a,b[$, alors $\displaystyle\int_a^b f$ converge. Idem sur $]a,b]$. L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[b,a[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$:

— si $f(x) \underset{x\to a}{=} O\left(g(x)\right)$, l'intégrabilité de g sur $[b, a[$ implique celle de f ;

— si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, l'intégrabilité de g sur $[b, a[$ équivaut à celle de f.

Intégration sur un intervalle quelconque : Intégrale généralisée d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$. Notations $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,t$. Intégrale convergente en b, en a. Écriture $\displaystyle\int_a^b f = +\infty$ si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et d'intégrale divergente. Pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence. Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

Intégration par parties sur un intervalle quelconque : Notation $[fg]_a^b$; l'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature et en cas de convergence : $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

Changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a, b[$ et une fonction $\varphi\ :\ ]\alpha, \beta[\to]a, b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence. Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. On applique ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable usuels.

Espace $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$: Pour f intégrable de I dans $\mathbb{K}$, notation $\displaystyle\int_I f$. Inégalité triangulaire. Si f est continue et intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\displaystyle\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{|x-a|^\alpha} x$. La fonction f est intégrable en a (resp. b) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.

Intégration des relations de comparaison (la fonction de référence est positive) : domination, négligeabilité, équivalence, pour les restes dans le cas où la fonction de référence est intégrable, pour les intégrales partielles dans le cas contraire.