Automorphismes de $\mathcal{L}(E)$

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. On se propose de déterminer les *automorphismes* de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire les éléments $\Psi \in GL(\mathcal{L}(E))$ vérifiant en plus :

$$\forall (f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2,\ \Psi(f\circ g) = \Psi(f)\circ\Psi(g).$$

On admettra que tout sous-espace vectoriel F de E possède un supplémentaire G (non unique en général).

I. (1) Vérifier rapidement que si Ψ est un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ (au sens ci-dessus) alors Ψ^{-1} aussi.

(2) Soit $h \in GL(E)$. On définit $\Psi_h : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \to \mathcal{L}(E) \\ f & \mapsto h\circ f\circ h^{-1} \end{cases}$. Vérifier que Ψ_h est un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.

Les automorphismes de ce type sont appelés automorphismes intérieurs de $\mathcal{L}(E)$. On souhaite montrer que ce sont les seuls automorphismes de $\mathcal{L}(E)$.

On se fixe Ψ un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$.

II. **Ψ et les projecteurs**

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des projecteurs non nuls de E. On définit sur $\mathcal{P}$ la relation $\leq$ par :

$$\forall (p,q) \in \mathcal{P}^2,\ (p \leq q) \Leftrightarrow (p\circ q = q\circ p = p)$$

La notation $p < q$ signifiera $(p \leq q)$ *et* $(p \neq q)$.

On dit que a est dit *minimal* dans $\mathcal{P}$ si $\forall p \in \mathcal{P},\ (p \leq a \Rightarrow p = a)$.

(1) a. Démontrer que pour tout $(p,q) \in \mathcal{P}^2$, $p \leq q$ *ssi* $\begin{cases} \ker q \subset \ker p \\ \mathrm{Im} p \subset \mathrm{Im} q \end{cases}$

b. Vérifier que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}$.

c. Vérifiez que les projecteurs de rang 1 sont minimaux.

d. Réciproquement soit q un projecteur de $\mathcal{P}$ qui n'est pas de rang 1. Construire un projecteur $p \in \mathcal{P}$ tel que $p < q$.

En déduire tous les éléments minimaux de $\mathcal{P}$.

(2) a. Montrer que $\Psi(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ (on montrera les deux inclusions).

b. Montrer que Ψ est strictement croissante (si $p < q$ alors $\Psi(p) < \Psi(q)$).

c. En déduire que l'image par Ψ d'un projecteur de rang 1 est un projecteur de rang 1.

III. **Sous-espace vectoriel d'endomorphismes**

Dans cette partie, on se fixe q projecteur de rang 1. On introduit $A_q = \{u \in \mathcal{L}(E),\ u\circ q = u\}$. On considère $x_0 \in E$ tel que $\mathrm{Im} q = Vect(x_0)$.

(1) a. Vérifier brièvement que A_q est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, stable par composition à gauche.

b. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $u \in A_q$ *ssi* $\ker q \subset \ker u$.

c. Soit u un élément de A_q. Vérifier que $\mathrm{Im} u = Vect(u(x_0))$.

(2) a. Montrer que l'application $\theta : \begin{cases} A_q & \to E \\ u & \mapsto u(x_0) \end{cases}$ est un isomorphisme.

b. Pour tout $x \in E$, on notera $u_x = \theta^{-1}(x) \in A_q$. Que vaut u_{x_0} ?

c. Établir que pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et pour tout $x \in E$, $u_{f(x)} = f\circ u_x$?

IV. **Un cas particulier**

Dans cette partie, on suppose de plus qu'il existe un projecteur q de rang 1 tel que $\Psi(q) = q$.

(1) a. Montrer que A_q est stable par Ψ.

b. En déduire que pour tout $x \in E$, il existe un unique $h(x) \in E$ tel que $\Psi(u_x) = u_{h(x)}$.

c. Montrer que h est linéaire. Que vaut $h(x_0)$?

d. Vérifier que $h \in GL(E)$.

(2) a. Démontrer que pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, pour tout $x \in E$, $u_{h\circ f(x)} = u_{\Psi(f)\circ h(x)}$

b. En déduire que Ψ est l'automorphisme intérieur Ψ_h.

V. **Cas général**

Soit p un projecteur de rang 1 quelconque. Posons $q = \Psi(p)$.

(1) a. Expliquer qu'il existe un isomorphisme de Imq vers Imp.

b. En déduire qu'il existe $g \in GL(E)$ tel que $\begin{cases} g(\ker q) = \ker p \\ g(\mathrm{Im} q) = \mathrm{Im} p \end{cases}$

c. Montrer qu'alors $q = g^{-1}\circ p\circ g$.

(2) a. Prouver que l'application $\Phi : f \to g\circ\Psi(f)\circ g^{-1}$ est un automorphisme de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant l'hypothèse du IV.

b. Conclure.