

Programme de colles - Semaine 4 - du 14/09 au 18/10

Polynômes et fractions rationnelles : Exercices de révisions sur le programme de la semaine précédente.

Algèbre linéaire sans réduction :

Somme d'un nombre fini de sous-espaces : Somme de deux sous-espaces. Somme directe de deux sous-espaces. La somme $F + G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F + G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique. Caractérisation par l'intersection. Somme d'un nombre fini de sous-espaces. Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces. La somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F_1 + \dots + F_p$ sous la forme $x_1 + \dots + x_p$ avec $x_i \in F_i$ est unique. Caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul. Sous-espaces supplémentaires. Espaces supplémentaires, caractérisations. Cas de la dimension finie.

Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation des endomorphismes vérifiant $p^2 = p$ et $s^2 = \text{Id}$. Projecteurs associés à une décomposition $E = \bigoplus_{j=1}^s F_j$.

Changements de bases : Matrice de changement de base. La matrice de passage $P_e^{e'}$ de e à e' est la matrice de la famille e' dans la base e . Inversibilité et inverse de $P_e^{e'}$. Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire.

Matrices équivalentes et semblables : Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang r , il existe une base e de E et une base f de F telles que : $\text{Mat}_{e,f}(u) = J_r$. Matrices équivalentes. Interprétation géométrique. Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r . Classification des matrices équivalentes par le rang. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.

Matrices semblables. Interprétation géométrique.

Pivot de Gauss : matrices de transvection et leur effet par multiplication à gauche et à droite. Algorithme du pivot de Gauss. Les transvections engendrent $Sl_n(\mathbb{K})$.

Formes linéaires et hyperplans Forme linéaire. Hyperplan. Si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle, alors pour toute droite D non contenue dans H : $E = H \oplus D$. Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est le noyau d'une forme linéaire non nulle. En dimension n , les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n - 1$. Comparaison de deux équations d'un même hyperplan. Si E est un espace de dimension finie n , l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n - m$.

D'autres résultats classiques autour des bases duales, de la dimension exacte de l'intersection de m hyperplans ont été vues mais sont hors programme ; tous ces résultats doivent être redémontrés avant d'être utilisés.

Formes n -linéaires alternées : Forme n -linéaire alternée. Antisymétrie, effet d'une permutation. Pour une application n -linéaire équivalence entre antisymétrie et caractère alterné. Si f est une forme n -linéaire alternée et si (x_1, \dots, x_n) est une famille liée, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base : Si E est de dimension n , l'espace des formes n -linéaires alternées est de dimension 1. Si e est une base, il existe une et une seule forme n -linéaire alternée f pour laquelle $f(e) = 1$. Toute forme n -linéaire alternée est un multiple de \det_e . Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées. Comparaison, si e et e' sont deux bases, de \det_e et $\det_{e'}$. La famille (x_1, \dots, x_n) est une base si et seulement si $\det_e(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

Déterminant d'un endomorphisme : Déterminant d'un endomorphisme. La définition est indépendante de la base. Déterminant d'une composée. Caractérisation des automorphismes.

Déterminant d'une matrice carrée : Déterminant d'une matrice carrée. Lien avec le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base ; lien avec le déterminant d'un endomorphisme. Déterminant d'un produit. Caractérisation des matrices inversibles. Déterminant d'une transposée.

Caractérisation du rang d'une matrice avec les mineurs.

Comatrice : Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Comatrice. Relation $A {}^t\text{Com}(A) = {}^t\text{Com}(A)A = \det(A)I_n$.

Polynômes d'interpolation de Lagrange et déterminant de Vandermonde.

Suite des images et noyaux itérés : les résultats classiques.