MP*2 LLG
2024/2025

Révisions d'algèbre linéaire

Noyaux, images et rangs

Exercice 1 *(Mines)** Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :
   (i) $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$ (ii) $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$ (iii) $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)$.
2. Donner des exemples d'endomorphismes vérifiant ces propriétés.
3. L'équivalence est-elle vraie en dimension infinie ? Montrer que (i) et (ii) équivaut à (iii).

Exercice 2 *(Mines)* Soit E un espace vectoriel de dimension n. Montrer que, pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre

1. $\ker f = \mathrm{Im} f$
2. $\begin{cases} f \circ f = 0 \\ \exists h \in \mathcal{L}(E),\ f \circ h + h \circ f = \mathrm{Id} \end{cases}$

Exercice 3 *(Mines-CCINP)*

1. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifiant $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$; montrer que $E = \ker u \oplus \mathrm{Im} v$.
2. Quelle relation peut-on en déduire entre les rangs de u et v ?
3. (Mines) Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, E_1 tel que $E = \ker u \oplus E_1$ et F_1 tel que $F = \mathrm{Im} u \oplus F_1$; montrer qu'il existe une unique application linéaire v de F dans E, de noyau F_1, d'image E_1, et telle que $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

Exercice 4 *(CCINP*)* Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $u^3 + u = 0$.

1. Montrer que $E = \ker u \oplus \mathrm{Im}(u)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \ker(u^2 + \mathrm{Id})$.
3. Montrer qu'en dimension impaire u n'est pas injective (on pourra raisonner par l'absurde).
4. On suppose désormais $n = 3$. En déduire que $\mathrm{rg}(u) = 2$.
5. Montrer qu'il existe une base e de E dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 *(ENS Lyon)* Soit E un K-espace vectoriel. On dit que $u \in Gl(E)$ est un échangeur s'il existe des sous-espaces vectoriels F, G tels que $E = F \oplus G$, $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$. Montrer que u est un échangeur si et seulement si il existe des endomorphismes a et b tels que $u = a + b$ avec $a^2 = b^2 = 0$.

Exercice 6 *(Mines)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si U et V sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'endomorphisme $\Phi_{U,V}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par l'égalité $\Phi_{U,V}(M) = UMV$.

1. Si A, B, C et D sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, exprimer $\Phi_{A,B} \circ \Phi_{C,D}$.
2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer $\mathrm{rg}\Phi_{A,A}$.

Exercice 7 *(Mines)* Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe U et V inversibles telles que $\mathrm{rg}(UA + BV) = \min\{n,\ \mathrm{rg}A + \mathrm{rg}B\}$.
2. Montrer que, si $\mathrm{rg}A + \mathrm{rg}B \geq n$, il existe U et V inversibles telles que $UA + BV$ soit inversible.

Exercice 8 *(X-Mines)* Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1, $t = \mathrm{Tr}(A^{-1}B)$.

1. On suppose que $t \neq -1$. Montrer que $A + B$ est inversible d'inverse $A^{-1} - \dfrac{A^{-1}BA^{-1}}{1+t}$.
2. On suppose que $t = -1$. Montrer que $A + B$ n'est pas inversible.

Exercice 9 *(Mines)* Soient n et p deux éléments de $\mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Montrer que $p + \mathrm{rg}(I_n + AB) = n + \mathrm{rg}(I_p + BA)$.

Exercice 10 *(X)** Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur u pour qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u + v$ soit inversible et $u \circ v = 0$.

Exercice 11 *(Ulm)** Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{rg}(AB) + \mathrm{rg}(BC) \leq \mathrm{rg}B + \mathrm{rg}(ABC)$.

Exercice 12 *(Ulm)* Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

1. Comparer le rang de M dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{Q}$ et dans $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier.
2. Existe-t-il toujours p premier tel que $\mathrm{rg}_{\mathbb{Q}}(M) = \mathrm{rg}_{\mathbb{F}_p}(M)$?

Sous-espaces vectoriels, dimensions

Exercice 13 *(IMT)* Montrer que l'ensemble A des applications linéaires u d'un espace E dans un espace F, tous deux de dimension finie, telles que $\ker u$ contienne le sous-espace W de E, est un espace vectoriel. Trouver sa dimension.

Exercice 14 *(Mines)* Soient $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E ayant même dimension. Montrer que F et G ont un supplémentaire commun.

Exercice 15 *(Mines)* Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comparer la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AM = MB\}$ et celle du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AM = MB\}$.

Exercice 16 *(Mines)* Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ AMB = 0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en calculer la dimension.

Endomorphismes nilpotents

Exercice 17 *(Mines)* Si A et B sont deux matrices complexes, carrées de taille n vérifiant $(AB)^n = 0$, a-t-on aussi $(BA)^n = 0$?

Exercice 18 *(Mines)* Soient E un espace vectoriel de dimension $n > 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent de rang $n-1$.

1. Soit F un sous-espace vectoriel stable par u. Montrer que $F = \{0\}$ ou que $\ker u \subset F$.
2. Montrer que $\mathrm{rg}(u^2) = \mathrm{rg}(u) - 1$.
3. Soit F tel que $u(F) \subset F$. Montrer que $\dim u(F) = \dim F - 1$. En déduire que, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\dim \ker u^k = k$.
4. Déterminer les sous-espaces vectoriels stables par u.

Exercice 19 *(Mines)* Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(u^2) \leq n$.
2. Montrer que $2\,\mathrm{rg}(u^2) \leq \mathrm{rg}(u)$.

Exercice 20 *(TPE)* Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A^3 = 0$, $AB = BA$ et B est inversible. Montrer que $(A + B)$ est inversible.

Exercice 21 *(X)* Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ nilpotente. Montrer que $I_n + M$ a une racine carrée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

Autres exercices sur les endomorphismes et les matrices

Exercice 22 *(Mines)** Que dire d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie qui stabilise toute droite vectorielle ?

Exercice 23 *(X)* Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^{10}$ qui stabilise tous les sous-espaces de dimension 5. Que dire de f ?

Exercice 24 *(X)** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Quels sont les endomorphismes de E qui stabilisent les hyperplans de E ?

Exercice 25 *(Mines)**

1. Que dire d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans toute base est la même ?
2. Que dire d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui commute avec tout projecteur ?

Exercice 26 *(Mines-Centrale)** Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, tel que $\forall x \in E$, $\big(x, u(x)\big)$ est lié. Montrer que u est une homothétie.
2. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ si et seulement si A est semblable à une matrice de diagonale nulle.
3. Soit A telle que $\mathrm{Tr}(A) = 0$. En déduire qu'il existe $(B, C) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})^2$ telle que $A = BC - CB$.

Exercice 27 *(Théorème d'Hadamard) ** Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

Montrer que A est inversible.

Exercice 28 *(Mines)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent à toutes les matrices de permutation de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 29 *(X)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si A est un sous-anneau de $\mathbb{R}$, on note $\mathrm{SL}_n(A)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(A)$ de déterminant 1.

1. Montrer que $\mathrm{SL}_n(A)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q})$ ne possède pas de partie génératrice finie.
3. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.
4. * Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 30 *(Ulm)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver les fonctions f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ f(XY) \leq \min\{f(X), f(Y)\}$.

Exercice 31 *(SR)** On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite bistochastique lorsque tous ses coefficients sont positifs et que la somme de ses coefficients sur une ligne ou une colonne quelconque vaut 1. On note $D_n(\mathbb{R})$ l'ensemble formé par ces matrices.

1. Montrer que $D_n(\mathbb{R})$ est convexe.
2. Un élément P de $D_n(\mathbb{R})$ est dit extrémal lorsque :
   $\forall (A,B) \in D_n(\mathbb{R})^2,\ \forall t \in]0,1[\,,\ (1-t)A + tB = P \Rightarrow A = B.$
   Montrer que toute matrice de permutation est un élément extrémal de $D_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que tout élément extrémal de $D_n(\mathbb{R})$ est une matrice de permutation.

Exercice 32 *(X)* Soient $(n,p,a) \in {\mathbb{N}^*}^3$, $U_1, \ldots, U_p$ des parties distinctes de $\{1, \ldots, n\}$ telles que, si $1 \leq i < j \leq p$, $|U_i \cap U_j| = a$. Montrer que $p \leq n$.
Ind. Considérer la matrice $(\mathbf{1}_{k \in U_i})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq i \leq p}}$.

Exercice 33 *(X)* Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, $n \geq 2$ un entier, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On note $C(J) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})\ ;\ AJ = JA\}$, $\Gamma_n = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})\ ;\ M^n = J\}$.

1. Déterminer $C(J)$. Vérifier que $C(J)$ est une sous-algèbre commutative de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
2. Montrer que, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la $\mathbb{R}$-algèbre $C(J)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Déterminer Γ_n.
3. Montrer que, si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, la $\mathbb{Q}$-algèbre $C(J)$ est isomorphe à $\mathbb{Q}[i]$. Déterminer Γ_n. On admettra que les éléments d'ordre fini de $(\mathbb{Q}[i]^*, \times)$ sont ± 1 et $\pm i$.
4. Montrer que, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la $\mathbb{C}$-algèbre $C(J)$ est isomorphe à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Déterminer Γ_n.

Familles libres

Exercice 34 *(Mines-ENS)** Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $f_a : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto |x-a| \end{cases}$. Montrer que la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 35 *(X)** Soit A un ensemble non vide, $\mathbb{K}$ un corps. Rappeler que $E = \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On considère $(f_j)_{1 \leq j \leq n} \in E^n$. Montrer que cette famille est libre si et seulement si il existe $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in A$ tel que $\det(f_j(x_i))_{i,j} \neq 0$.

Projecteurs

Exercice 36 *(CCP)** Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. F_0, F_1, G_0 et G_1 des s.e.v. de E. Soit f (*resp.* g) le projecteur de E de noyau F_0 (*resp.* G_0) et d'image F_1 (*resp.* G_1). Supposons que $f \circ g = g \circ f$.

1. Démontrer que $h = f \circ g$ est un projecteur de E et que son image est $F_1 \cap G_1$.
2. Déterminer le noyau de h.

Exercice 37 *(CCP)** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient p et q deux projecteurs définis sur E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q + q \circ p = 0$, si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Interpréter cette condition en terme de noyaux et d'images de p et q.
3. Si $r = p + q$ est un projecteur, montrer que $\ker r = \ker p \cap \ker q$ et que $\mathrm{Im} r = \mathrm{Im} p + \mathrm{Im} q$. Montrer que cette somme est directe.
4. On suppose dans cette question que $r = p + q - p \circ q$ et $\mathrm{Im} p \subset \ker q$; montrer que r est un projecteur dont on déterminera le noyau.

Exercice 38 *(CCP)* Soient L_1 et L_2 deux sous-espaces supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$, où E est de dimension finie n, tels que $\forall (u,v) \in L_1 \times L_2$, $u \circ v + v \circ u = 0$.

1. Montrer qu'il existe deux projecteurs p_1 et p_2 dans $L_1 \times L_2$ tels que $Id = p_1 + p_2$.
2. Montrer que $n = \operatorname{rg}(p_1) + \operatorname{rg}(p_2)$.
3. Soit $u \in L_1$; montrer que, si $x \in \operatorname{Im} p_2$, $u(x) = 0$ et si $x \in \ker p_2$, $u(x) \in \ker p_2$.
4. En déduire que $\dim(L_1) \leq \big(n - \operatorname{rg}(p_2)\big)^2$; quelle inégalité a-t-on pour $\dim(L_2)$?
5. Justifier que $\dim \mathcal{L}(E) = \dim(L_1) + \dim(L_2)$.
6. Montrer que $\operatorname{rg}(p_1)\big(n - \operatorname{rg}(p_1)\big) \leq 0$ et en déduire que $\operatorname{rg}(p_1) = 0$ ou $\operatorname{rg}(p_1) = n$, puis que $L_1 = \{0\}$ ou $L_2 = \{0\}$.

Exercice 39 *(ENS Lyon-X)**

1. Soient n dans $\mathbb{N}^*$, A une partie finie de cardinal m de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ stable par produit. Montrer que $\displaystyle\sum_{M\in A} \mathrm{Tr}(M) \in m\mathbb{Z}$.
2. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\displaystyle\sum_{g\in G} \mathrm{Tr}(g) = 0$. Montrer que $\displaystyle\sum_{g\in G} g = 0$.

Exercice 40 *(Mines)* Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $(p_i)_{1\leq i\leq r}$ une famille de projecteurs de E tels que $p = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} p_j$ vérifie $p^2 = p$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} p = \oplus_{j=1}^{r} \operatorname{Im} p_j$.
2. Pour tout $i \neq j$, montrer que $p_j \circ p_i = 0$.

Exercice 41 *(Paris)* Soient $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $A_1, \ldots, A_m$ des éléments idempotents de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire vérifiant $A_k A_k = A_k$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} (n - \operatorname{rg}(A_i)) \geq \operatorname{rg}\left(I_n - \prod_{i=1}^{m} A_i\right)$.

Formes linéaires, hyperplans et traces

Exercice 42 *(Mines)** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une unique $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(A) = Tr(AC)$
2. On suppose que pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $f(AB) = f(BA)$. Montrer que $f = \lambda Tr$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 43 *(Mines)** Soit $n \geq 2$ et soit H un hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que H contient au moins une matrice inversible.
2. On suppose que H est stable par multiplication. Montrer que $I_n \in H$.

Exercice 44 *(X)* Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, H un hyperplan affine de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $H \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est non vide.

Exercice 45 *(X)* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \ldots, X_{n^2}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^{n^2}$. On pose

$$\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto (\mathrm{Tr}(MX_k))_{1\leq k\leq n^2} \in \mathbb{C}^{n^2}.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(X_1, \ldots, X_{n^2})$ pour que φ soit un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. Donner une relation entre la dimension du noyau de φ et le rang de $(X_1, \ldots, X_{n^2})$.

Exercice 46 *(Centrale 2)* Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $E_n = \mathbb{R}_n(X)$ et $u_n : \begin{cases} E_n & \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto (\phi_0(P), \ldots, \phi_n(P)) \end{cases}$, avec $\phi_k : \begin{cases} E_n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ P & \mapsto \dfrac{P^{(k)}(k)}{k!} \end{cases}$.
Par ailleurs, on note $(e_0, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

1. Écrire une fonction python qui prend en paramètre n et qui renvoie la matrice de u_n dans les bases canoniques de E_n et $\mathbb{R}^{n+1}$.
   Faire une conjecture sur l'inversibilité de u_n.
2. Pour tout $1 \leq k \leq 5$, écrire un programme python qui renvoie la matrice de u_k et son inverse. Faire une conjecture sur les polynômes $u_k^{-1}(e_j)$ (degré, coefficient dominant, nature de la famille).
3. Montrer que $(\phi_0, \ldots, \phi_n)$ est libre dans E_n^*.
4. Montrer que si $(\psi_0, \ldots, \psi_n)$ est une famille libre dans E_n^*, alors il existe une unique base $(B_0, \ldots B_n)$ de E_n telle que pour tout $P \in E_n$, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \psi_k(P) B_k$.

5. Calculer cette famille $(B_0, \dots B_n)$ dans le cas où :

   (a) $\psi_k : P \mapsto \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$

   (b) $\psi_k : P \mapsto P(k)$.

6. Dans le cas de la famille libre $(\phi_0, \dots \phi_n)$, montrer que la base obtenue est la famille $\big(u_n^{-1}(e_0), \dots u_n^{-1}(e_n)\big)$.

Systèmes linéaires, pivot de Gauss et déterminants

Exercice 47 *(PLSR)**

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det A = \pm 1$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $(a, b)^T$ soit la première colonne d'une matrice de taille 2 à coefficients entiers de déterminant ± 1.
3. Soient $a_1, \dots a_n$ des entiers relatifs premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que $(a_1, \dots, a_n)^T$ est la première colonne d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ de déterminant ± 1.
4. Soient $U, V \in \mathbb{Z}^n$. Donne une condition nécessaire et suffisante sur U et V pour qu'il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ dont la première colonne soit U et la deuxième V.

Exercice 48 *(CCP)*

1. Soient $P_0, P_1, \dots, P_n$ tels que chaque P_k soit unitaire de degré k. Soient $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice $\big(P_j(x_i)\big)_{0 \le i,j \le n}$.
2. Soient $\theta_0, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice $\big(\cos(j\theta_i)\big)_{0 \le i,j \le n}$.

Exercice 49 *(Mines)* Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & y & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & y^2 & 2y & 2 \\ x^3 & 3x^2 & y^3 & 3y^2 & 6y \\ x^4 & 4x^3 & y^4 & 4y^3 & 12y^2 \end{vmatrix}$. Montrer que $D = 0$ si et seulement si $x = y$.

Exercice 50 (SR)

1. Redémontrer la formule du déterminant de Vandermonde.
2. Calculer $\det((i^j))_{1 \le i,j \le n}$.
3. Soit $(a_i)_{1 \le i \le n}$ des réels distincts. On note (L_i) les polynômes d'interpolation associés. Quel est le déterminant de la famille des (L_i) dans la base canonique ?
4. On considère l'application qui à $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ associe $(P(a_i))_{1 \le i \le n}$; montrer que c'est un isomorphisme. Quel est le lien avec le déterminant de Vandermonde ?

Exercice 51 *(X)*

1. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, a, b) \in \mathbb{R}^{n+2}$. Calculer $\det M$, où $M(i,i) = \alpha_i$, $M(i,j) = a$ si $i > j$ et $M(i,j) = b$ si $i < j$.
2. Calculer le déterminant de la matrice M telle que $M(i,j) = i \wedge j$ pour $1 \le i \le j \le n$.

Exercice 52 *(Mines)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^4$ où D est inversible et $D^tC = C^tD$. Montrer que : $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A^tD - B^tC)$.

Pour plus tard : Étendre le résultat au cas où D est non-inversible.

Exercice 53 *(X)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^4$ où A est inversible et $AB = BA$. Montrer que : $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(DA - CB)$.

Pour plus tard : Étendre le résultat au cas où D est non-inversible.

Exercice 54 *(Mines)* Soit $A \in Gl_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $C \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$. Montrer que $\det(A + BC) = \det(A)(1 + CA^{-1}B)$.

Exercice 55 *(X)** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. On suppose que les coefficients diagonaux de A sont tous nuls et que les coefficients en dehors de la diagonale sont dans $\{-1, 1\}$. Montrer que A est inversible.

Exercice 56 *(Centrale)* On s'intéresse aux matrices A de coefficients a_{ij} entiers, de diagonale nulle et dont les termes non diagonaux valent 1 ou -1. On note la A_0 matrice de ce type dont tous les termes non diagonaux valent 1.

1. Calculer $\det(A_0)$. En déduire dans le cas général que si n est pair, alors A est inversible (on pourra raisonner modulo 2). Que dire du rang de A si n est impair ?
2. Soit un tas de n cailloux tel que, si l'on en retire un, on puisse toujours faire deux tas de même masse avec les $n-1$ cailloux restants : montrer que n est impair.
3. Montrer que, pour n impair, il existe un nombre fini de masses $m_1, \ldots, m_n$ (à une constante multiplicative près) qui permettent de réaliser la condition précédente.
4. On impose désormais que, pour $n = 2k+1$ et quel que soit le caillou que l'on retire, il soit possible de former deux tas de k cailloux de même masse. Montrer que tous les cailloux ont la même masse.

Exercice 57 *(X)* Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ distincts. Calculer le déterminant de $\left(\dfrac{1}{a_i - b_j}\right)_{1 \leq i,j, \leq n}$.

Exercice 58 * Soient A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe P dans $Gl_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On veut montrer qu'il existe $Q \in Gl_n(\mathbb{R})$ telle que $B = Q^{-1}AQ$.

1. Ecrivons $P = R + iS$ avec $(R,S) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $RB = AR$ et $SB = AS$.
2. En déduire que : $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ (R + \lambda S)B = A(R + \lambda S)$. Conclure.

Exercice 59 *(Centrale-Mines-X)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculer $\operatorname{rg}(\mathrm{Com}M)$ en fonction de $\operatorname{rg}M$.
2. Montrer que, pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\mathrm{Com}(AB) = (\mathrm{Com}B)(\mathrm{Com}A)$. *On pourra commencer par le montrer pour des matrices inversibles et traiter le cas général plus tard.*
3. L'application Com est-elle injective ?
4. Quelle est son image dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Même question sur $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{Q}$. ?

Exercice 60 *(X-Mines)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'équation $M = \mathrm{Com}(M)$.

Exercice 61 *(X)* Soient $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}$ avec $0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n < 1$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. On suppose que la suite de terme général $u_p = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j \cos(\pi p\, \theta_j)$ tend vers 0. Montrer : $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, $a_j = 0$.

Exercice 62 *(Ulm)* Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, vérifiant pour tout $(i,j) \in [\![1,m]\!]^2$, $A_{i,j} \geq 0$. Pour $1 \leq i \leq m$, on définit $d_i = \mathrm{pgcd}\left\{k \in \mathbb{N}^*, (A^k)_{i,i} > 0\right\}$.

1. On suppose : $\exists k \in \mathbb{N},\ \forall (i,j) \in [\![1,m]\!]^2,\ (A^k)_{i,j} > 0$. Montrer que $d_1 = 1$.
2. On suppose : $\forall (i,j) \in [\![1,m]\!]^2,\ \exists k \in \mathbb{N},\ (A^k)_{i,j} > 0$. Montrer que les d_i sont tous égaux.
3. Avec la même hypothèse, montrer la réciproque de la première question.

Exercice 63 *(ULSR)* On considère $\phi \colon (\mathbb{R}^4)^2 \to \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui à (u,v) associe la matrice dont le cœfficient en (i,j) vaut $\begin{vmatrix} u_i & v_i \\ u_j & v_j \end{vmatrix}$.

1. Que peut-on dire si $\phi(u,v) = \phi(u',v') \neq 0$?
2. Que dire de la réciproque ?
3. Montrer que A s'écrit comme $\phi(u,v)$ avec (u,v) libre *ssi* $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $det(A) = 0$ et $A \neq 0$.
4. Décrire l'image et le noyau d'une telle matrice.

Exercice 64 *(ULSR)* Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\nu(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ. Calculer

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma), \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\nu(\sigma) \quad \text{et} \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma)+1}.$$

Exercice 65 *(Ulm)* Montrer que la projection de $SL_d(\mathbb{Z})$ sur $SL_d(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est surjective.

Exercice 66 *(X-Ulm)* Soit V un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments sont de rang inférieur ou égal à r. Montrer que $\dim V \leq n \times r$. Étudier les cas d'égalité.