Feuille d'exercices : Réduction

Éléments propres : recherche pratique

Exercice 1 (CCINP) Trigonaliser ou diagonaliser si cela est possible, en précisant les matrices de passage :

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Exercice 2 (CCINP-IMT-Mines) Soit A fixée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; montrer que f, défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $f(M) = (\mathrm{Tr}A)M - (\mathrm{Tr}M)A$ est un endomorphisme dont on donnera le noyau et l'image. En donner les éléments propres. Est-il diagonalisable ?

Exercice 3 (Mines) Soient A et B deux matrices réelles, non nulles, carrées d'ordre n. Trouver une CNS pour que $\phi(X) = X + \mathrm{Tr}(AX)B$ soit diagonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4 (Mines) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle et $\phi : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{Tr}(A)\, X^T + \mathrm{Tr}(X)\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 5 (Mines) Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{C})$, g une surjection continue croissante de $[0,1]$ sur lui-même et Φ l'endomorphisme de E défini par $\forall f \in E,\ \Phi(f) = f \circ g$. Soit V un sous-espace de dimension finie de E stable par Φ. Montrer que Φ induit un automorphisme ϕ de V dont la seule valeur propre est 1. En déduire que $\phi = \mathrm{Id}_V$.

Exercice 6 (X) On considère $A \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. On note ϕ_A qui à $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par $X^n - 1$.

1. Montrer que ϕ_A est un endomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et déterminer sa matrice dans la base canonique.
2. Montrer que ϕ_A est diagonalisable et déterminer ses valeurs et vecteurs propres.

Exercice 7 (X) On considère la matrice $M = \left(\binom{i-1}{j-1} \right)_{1 \leq i,j \leq n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

1. La matrice M est-elle daigonalisable ?
2. Déterminer l'ordre de nilpotence de $M - I_{n+1}$.
3. Calculer M^{-1}.

Exercice 8 (X) On considère la matrice $M = (\delta_{i+j,n+1})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer le déterminant de M.
2. Montrer que M est diagonalisable, déterminer son spectre et ses sous-espaces propres.

Éléments propres : étude théorique

Exercice 9 (Centrale-X) * Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ a_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

1. Montrer que 1 est valeur propre et que les valeurs propres complexes de A sont de module inférieur ou égal à 1.
2. On suppose dans cette question que pour tout (i,j), $a_{i,j} > 0$. Montrer que 1 est la seule valeur propre de M sur le cercle unité.
3. Soit λ une valeur propre de A de module 1. Montrer qu'il existe $m \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\lambda^m = 1$.

Exercice 10 (Mines) Existe-t-il une forme linéaire Φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\,,\ \Phi(A) \in \mathrm{sp}(A)$?

Exercice 11 (TPE) Soient n et q dans $\mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^q = I_n$. Montrer que l'espace propre de A associé à 1 a pour dimension $\dfrac{1}{q} \displaystyle\sum_{k=1}^{q} \mathrm{Tr}(A^k)$.

Exercice 12 (X) Soit $(A, B, M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^3$ tel que $AM = MB$ et $\chi_A = \chi_B$. Montrer que $A - MX$ et $B - XM$ ont même polynôme caractéristique pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 13 (Mines) *

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si $p \neq n$, alors AB ou BA est non inversible.
2. Montrer que $X^p \chi_{AB} = X^n \chi_{BA}$.
3. En déduire que si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ et que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 14 (Mines)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall (A, t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+,\ \det(A^2 + tI_n) \geq 0$.
2. On suppose $n \in \mathbb{N}$ impair. Montrer que $-I_n$ n'est pas somme de deux carrés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15 (SR)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, on pose $L_i(A) = \displaystyle\sum_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{i\}} |a_{i,k}|$ et $C_j(A) = \displaystyle\sum_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j\}} |a_{k,j}|$.

   Montrer que toute valeur propre de A appartient à $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} D_f(a_{i,i}, L_i)$ et à $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} D_f(a_{j,j}, C_j)$.

2. Soit $a_0, \ldots, a_{n-1}$ dans $\mathbb{C}$. On pose $P = X^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ ainsi que

   $$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$ Montrer que $\chi_{C(P)} = P$.

3. Avec les données de la question précédente, montrer que toute racine de P est dans $D_f(0, M)$ où $M = \displaystyle\max_{0 \leq i \leq n-1} (1 + |a_i|)$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. Soit $(P_k)_{k \geq 0}$ une suite de polynômes unitaires de degré n convergeant vers P (au sens d'une norme arbitraire sur $\mathbb{R}_n[X]$). Soit z_0 une racine de P de multiplicité d. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que, pour k assez grand, $D_o(z_0, \varepsilon)$ contient au moins d racines de P_k comptées avec multiplicité.

Exercice 16 (Centrale) * Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont toutes les valeurs propres (complexes) sont de module au plus 1.

1. Montrer que $\chi_A \in \mathbb{Z}[X]$ et que $\mathrm{Tr}(A^k) \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que les valeurs propres non nulles de A sont de module 1, puis que ce sont des racines de l'unité.
3. Exhiber $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont l'ensemble des valeurs propres est $\mathbb{U}_n$.

Exercice 17 (X) * Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ des nombres complexes de module au plus 1, $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{d} (X - \lambda_i)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} {\lambda_i}^n$. On suppose que $P \in \mathbb{Z}[X]$.

1. Montrer que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$.
2. Montrer que f est périodique à partir d'un certain rang.
3. Montrer que, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, λ_i est nul ou racine de l'unité.

Exercice 18 (Lyon-PLSR) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que soit A a une valeur propre de module strictement supérieur à 1, soit il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k - I_n$ est nilpotente.

Exercice 19 (X)

1. Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ dont toutes les racines sont de module 1 et $Q \in \mathbb{Z}[X]$ et p premier impair. On suppose que P et Q sont unitaires de degré 1 et que $P = p^n Q \left(\dfrac{X-1}{p} \right)$. Montrer que $P = (X-1)^n$.
2. Soient $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et p premier impair tels que $C^n = I_n$ et $C = I_n + pM$. Montrer que $C = I_n$.

Exercice 20 (PLSR) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ impair, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $A + iB$ admet un vecteur propre réel.

Exercice 21 (Mines) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Étudier le caractère diagonalisable de $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -1/a & 0 & c \\ -1/b & -1/c & 0 \end{pmatrix}$ pour $(a, b, c) \in (\mathbb{K}^*)^3$.

Exercice 22 (CCINP) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a et b dans $\mathbb{C}$, M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les termes diagonaux (resp. non diagonaux) valent a (resp. b).

1. Calculer le polynôme caractéristique de M.
2. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. Calculer le polynôme minimal de M.
4. Calculer le déterminant de $I_n + M$.

Exercice 23 (X) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A_{i,i} = \lambda_i$ si $1 \leq i \leq n$, $A_{i,i+1} = 1$ si $1 \leq i \leq n-1$ et $A_{i,j} = 0$ si $j \notin \{i, i+1\}$. À quelle condition A est-elle diagonalisable ?

Exercice 24 (Centrale) Soient $n \geq 2$ un entier et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $d_n(\mathbb{K})$ la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne contenant que des matrices diagonalisables.

1. Que dire du spectre réel d'une matrice antisymétrique rélle ? Dans le cas où n est impair, peut-on être plus précis ?
2. Déterminer $d_n(\mathbb{R})$.
3. Déterminer $d_2(\mathbb{C})$.

Exercice 25 (CCP-Mines-Centrale-X) * Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

1. On suppose $\det(f) \neq 0$ et f^2 diagonalisable. Trouver un polynôme annulateur de f et en déduire que f est diagonalisable.
2. Dans le cas général, montrer que : f est diagonalisable si et seulement si f^2 est diagonalisable et $\ker(f) = \ker(f^2)$.
3. Qu'en est-il si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 26 (Mines) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que B soit diagonalisable et $AB^3 = B^3A$. Montrer que $AB = BA$. Proposer une généralisation.

Exercice 27 (Mines) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E. Montrer que f est diagonalisable si et seulement s'il existe n hyperplans $H_1, \ldots, H_n$ de E stables par f tels que $H_1 \cap \cdots \cap H_n = \{0\}$.

Exercice 28 (PLSR) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $|\det A| = 1$. On suppose que les valeurs propres complexes de $\mathbb{C}$ sont de module différent de 1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 29 (P) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Donner une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simple semblable à M sur $\mathbb{R}$.

Polynômes d'endomorphismes

Exercice 30 (X) * Soient $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Quels sont les $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(u) \in \mathrm{GL}(E)$?
2. À quelle condition sur u est-il vrai que $\mathbb{K}[u] \subset \mathrm{GL}(E) \cup \{0\}$?

Exercice 31 (X) * Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ son polynôme minimal et p l'exposant de X dans sa décomposition en irréductibles (la valuation de ce polynôme).

1. Si $p = 0$ que dire de u ?
2. Montrer que $E = \ker u^p \oplus \mathrm{Im} u^p$.
3. Montrer que le projecteur sur $\ker u^p$ parallèment à $\mathrm{Im} u^p$ est un polynôme en u.
4. Montrer que $p = \min\{k \in \mathbb{N}, \ker u^k = \ker u^{k+1}\}$.

Exercice 32 (CCINP) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I_n$ et $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est une famille libre. Montrer que $\mathrm{tr}(A) = 0$.

Exercice 33 (IMT) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 34 (Mines)

1. Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Tr} M = 0$ et $M\,(M - I_n) = 0$.

2. Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Tr} M = n$ et $M^n = I_n$.

Exercice 35 (Mines) Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^5 - 2A^4 - 2A^3 + A^2 + 4A + 4I_n = 0$, $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $\det(A) = \pm 1$.

Exercice 36 (Mines) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ A^3 + A = 10\, I_n\}$. Déterminer l'image de E_n par det.

Exercice 37 (Centrale) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice de nilpotence d.
   (a) Montrer que $d \leq n$.
   (b) Montrer que $M^2 - I_n$ est inversible, formuler son inverse.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^4 + M^3 + M^2 + M + I_n = 0$.
   (a) Montrer que $|\mathrm{Tr}(M)| \leq n$.
   (b) Étudier le cas d'égalité.
   (c) Étudier le cas $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 38 (Mines) À quelle condition sur n existe-il $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^5 - 2A^4 - 2A^3 + A^2 + 4A + 4I_n = 0$, $\mathrm{Tr}(A^3) = 0$ et $\det(A) = 1$?

Exercice 39 (Mines) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que A est de rang pair.

Exercice 40 (CCINP) * Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Étudier la parité du polynôme caractéristique χ_A. Montrer que si n est impair alors $\det A = 0$.

Exercice 41 (CCP-Mines) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que le rang de u est pair (on pourra considérer l'application induite par u sur $\mathrm{Im} f$ et montrer qu'il s'agit d'un automorphisme de $\mathrm{Im} f$).
2. Montrer qu'il existe une base e de E telle que la matrice de u dans e soit de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_s \\ 0 & I_s & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 42 (Mines)

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $P(M) = A$.
2. Donner un exemple montrant que le résultat précédent ne se généralise pas au cas où A n'est pas diagonalisable.

Exercice 43 (X) Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels qu'existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de polynôme minimal $X^3 + 2X + 2$. Même question dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

Matrices par blocs

Exercice 44 (Mines) * Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$.

1. Montrer que B est semblable à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$.
2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si B l'est.

Exercice 45 (X-Mines) * Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Á quelle *CNS* sur A, B est-elle diagonalisable ?

Exercice 46 (Mines) Soient A, B et C, trois matrices complexes de taille n tells que $AB = BC$; trouver une CNS pour que $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 47 (Mines) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On suppose B diagonalisable et $AB = BA$. Trouver une CNS pour que $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 48 (Mines)

1. Donner le rang de $A = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$.
2. Sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.
3. Sont-elles diagonalisables ?

Exercice 49 (Mines) Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $B = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^{-1} & I_n \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Exercice 50 (Mines) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que B soit diagonalisable.

Exercice 51 (Mines) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$. Montrer que $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si A et B sont diagonalisables et il existe $X \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ tels que $AX - XB = C$.

Exercice 52 (X) Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ une matrice diagonalisable. On définit une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ de matrices en posant $A_1 = A$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{1,1}A_n & a_{1,2}A_n \\ a_{2,1}A_n & a_{2,2}A_n \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs propres de A_n en fonction des valeurs propres de A_1.

Sous-espaces stables

Exercice 53 (CCP-Mines) * Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ; on note μ_f son polynôme minimal.

1. Soit P un diviseur de μ_f dans $\mathbb{K}[X]$. Expliquer qu'il existe $v \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $P(f)(v) = 0_E$.
2. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Montrer que f admet au moins une droite vectorielle ou un plan vectoriel stable.

Exercice 54 (CCINP) * Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, impaire ; et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un hyperplan de E que u laisse stable.

Exercice 55 (Mines) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A.
2. Déterminer les $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

Exercice 56 (Mines) Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie n, $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme minimal μ est de degré 2 et est irréductible sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $P_x = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ est un plan stable par u
2. Montrer que, si F est un sous-espace stable par u et $x \notin F$ alors $F \cap P_x = \{0\}$.
3. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de taille 2, le polynôme minimal de chaque bloc étant μ.

Exercice 57 (Centrale/Mines) * Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E de dimension finie.

1. Montrer que si u est diagonalisable alors tout sous-espace de E admet un supplémentaire stable par u.
2. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace F de E admet un supplémentaire stable par u.
3. Montrer l'équivalence entre
   — Tout F sous-espace vectoriel de E stable par y et non réduit à $\{0_E\}$ admet au moins un vecteur propre.
   — Le polynôme caractéristique χ_u est scindé.
4. On suppose χ_u scindé. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace de E, stable par u, admet un supplémentaire stable par u.

Exercice 58 (Mines) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E de dimension finie. Montrer l'équivalence entre

— χ_f est irréductible.
— Les seuls sous-espaces vectoriels stables par f sont E et $\{0_E\}$.

Exercice 59 (Ulm) ** Soient $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les deux conditions suivantes :

- tout sous-espace de E stable par u a un supplémentaire stable par u ;
- le polynôme minimal de u est produit de facteurs irréductibles unitaires distincts.

Endomorphismes cycliques

Exercice 60 (Mines) Soit u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel de dimension n. Démontrer l'équivalence entre :

(i) $(\mathrm{Id}, u, \ldots u^{n-1})$ est une famille libre ;

(ii) il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une famille libre.

Exercice 61 (X) *** Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour x dans E, on note $E_x = \mathrm{Vect}((u^k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ et $I_x = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(u)(x) = 0\}$.

1. Montrer que I_x est l'ensemble des multiples d'un (unique) polynôme unitaire μ_x.
2. Montrer que E_x est stable par u, et comparer μ_x au polynôme caractéristique de l'endomorphisme de E_x induit par u.
3. On admet qu'il existe $x \in E$ tel que $\mu_x = \mu_u$. Montrer que $\chi_u = \mu_u$ si et seulement s'il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ irréductible. Montrer que P divise χ_u si et seulement si P divise μ_u.

Exercice 62 (X) *** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ cyclique, F un sous-espace de E stable par f. Montrer que l'induit par f sur F est cyclique.

Exercice 63 (Mines-ENS) *** Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E = \{P(f)(x)\ ;\ P \in \mathbb{C}[X]\}$.

1. On suppose que u est cyclique. Montrer que tout endomorphisme induit par u est cyclique.
2. Montrer que $I \mapsto \{Q(u)(x),\ Q \in I\}$ réalise une correspondance bijective entre les idéaux de $\mathbb{R}[X]$ contenant P et les sous-espaces de E stables par u.
3. Montrer que l'ensemble des sous-espaces de E stables par u est fini.
4. Réciproquement, montrer que si l'ensemble des sous-espaces de E stables par u est fini, alors u est cyclique.

Exercice 64 (SR) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Un élément u de $\mathcal{L}(E)$ est dit cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $(u^k(x))_{0\leq k\leq n-1}$ soit une base de E.

1. Quels sont les endomorphismes de E diagonalisables et cycliques ?
2. Montrer que, si u est cyclique, le commutant $C(u)$ de u dans $\mathcal{L}(E)$ est égal à $\mathbb{K}[u]$.
3. Montrer que, si $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et des sous-espaces $E_1, \ldots, E_r$ de E stables par u, tels que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ et que, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, l'induit de u sur E_i soit cyclique.

Exercice 65 (Lyon) Soit $P = X^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ dans $\mathbb{K}[X]$. On note $x_1, \ldots, x_n$ ses racines comptées à mesure de leur multiplicité, et on pose $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En considérant la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

montrer la relation $\forall k \geq n,\ S_k + a_{n-1}S_{k-1} + \cdots + a_0 S_{k-n} = 0$. *Facultatif :* Démontrer que $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ S_k + a_{n-1}S_{k-1} + \cdots + a_{n-k+1}S_1 = -k\, a_{n-k}$.

Sous-groupes de $GL_n(\mathbb{K})$ et matrices de $M_n(\mathbb{Z})$

Exercice 66 (Mines-X) *** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = \text{ Id}$. Montrer que u est diagonalisable. Quelle est la nature de $\dfrac{u + \text{ Id}}{2}$?
2. Montrer que le cardinal d'une famille d'endomorphismes distincts $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u^2 = \text{ Id}$ et commutant deux à deux est majoré par une constante que l'on déterminera.
3. Soit G un sous-groupe fini de $\text{ GL}(E)$ tel que, pour tout $g \in G$, $g^2 = Id_E$ Montrer que G est abélien et que son cardinal est une puissance de 2. Quel est le cardinal maximal d'un tel sous-groupe ?
4. Que peut-on dire de m et n dans $\mathbb{N}^*$ tels que $\text{ GL}_m(\mathbb{C})$ et $\text{ GL}_n(\mathbb{C})$ soient isomorphes ?

Exercice 67 (ULSR) On se place sur $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On admet que $A^{13} = -I_3$. Comment aurait-on pu le montrer rapidement ? Montrer que dans $Gl_3(\mathbb{K})$, A est d'ordre 26.
2. Soit G le groupe de $Gl_3(\mathbb{K})$ engendré par A. Soit V l'espace engendré par I_2, A, A^2. Montrer que $V = G \cup \{0\}$.
3. Soir W l'espace vectoriel engendré par (I_3, A). Montrer que pour tout $M \in A$, il existe $N, P \in W$ non nuls tels que $M = NP^{-1}$.
4. Soit $H =< A^2 >$, montrer que H est isomorphe à $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, puis que $|H \cap W| = 4$.

Exercice 68 (X) Soit G un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ engendrant l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On se donne une base $(g_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée d'éléments de G.

1. Montrer que la fonction $M \in G \mapsto (\text{tr}(Mg_i))_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ est injective.
2. Montrer que, si l'ensemble des classes de similitude des éléments de G est fini, alors G est fini.

Exercice 69 (ENS Lyon) * Soit G un sous-groupe de $\text{ GL}_n(\mathbb{C})$ dont tous les éléments d'ordre fini, majoré par $m \in \mathbb{N}^*$.

1. Que peut-on dire de $\{\text{Tr}(g),\ g \in G\}$?
2. Montrer que G est un groupe fini (théorème de Burnside).

Exercice 70 (X) * Soient G un groupe fini et V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soit $\rho : G \to \text{ GL}(V)$ un morphisme de groupes. On dit que ρ est irréductible lorsque les seuls sous-espaces vectoriels de V stables par tous les éléments de l'image de ρ sont V et $\{0\}$. On note $\chi(\rho) : s \in G \mapsto \text{Tr}(\rho(s))$.

1. Montrer que $\chi(1_G) = \dim(V)$. Montrer que $\chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)}$ pour tout $s \in G$. Montrer que $\chi(st) = \chi(ts)$ pour tout $(s, t) \in G^2$.

   Dans la suite, on se donne deux morphismes irréductibles $\rho_1 : G \to \text{ GL}(V_1)$ et $\rho_2 : G \to \text{ GL}(V_2)$, où V_1 et V_2 sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie, ainsi qu'une application linéaire $f : V_1 \to V_2$ telle que $\forall s \in G,\ \rho_2(s) \circ f = f \circ \rho_1(s)$. On dit que ρ_1 et ρ_2 sont isomorphes lorsqu'une telle fonction linéaire bijective existe.
2. Montrer que f est bijective ou nulle.
3. Montrer que si $\rho_1 = \rho_2$ et $V_1 = V_2$ alors f est une homothétie.

   On fixe désormais $h : V_1 \to V_2$ et on pose $h_0 = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{s\in G} \rho_2(s)^{-1} \circ h \circ \rho_1(s)$.
4. On suppose que ρ_1 et ρ_2 ne sont pas isomorphes. Montrer que $h_0 = 0$.
5. On suppose que $\rho_1 = \rho_2$ et $V_1 = V_2$. Montrer que $h_0 = \dfrac{\text{Tr}(h)}{\dim V_1} \text{ Id}_V$.

Exercice 71 (Paris) * Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe fini de $\text{ GL}(E)$. Montrer que si F un sous-espace vectoriel de E stable par tous les éléments de G alors F possède un supplémentaire stable par tous les éléments de G.

Exercice 72 (SR)

1. Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que le groupe $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ des inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ de déterminant ± 1.
2. Soit $M \in \text{GL}_3(\mathbb{Z})$ n'admettant ni 1 ni -1 comme valeur propre. Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 73 (X)

1. Soit $N \in \text{ GL}_2(\mathbb{C})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On suppose qu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^d = I_2$. Montrer que $N^{12} = I_2$.
2. Que dire de $N \in \text{ GL}_2(\mathbb{C})$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$ telle que $N^d = I_2$?

Exercice 74 (X) * Soient $n \in \mathbb{N}^*$, G un sous-groupe fini de $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $|G| \leq \displaystyle\prod_{i=0}^{n-1} (3^n - 3^i)$.

Exercice 75 (X) Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ non nulle et $M = I_n + 3R$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M^k \neq I_n$.

Exercice 76 (ULSR-X) * Soit p premier et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A^p) \equiv \mathrm{Tr}(A)[p]$.

Calculs de puissances de matrices et Équations matricielles

Exercice 77 (Mines) Calculer les puissances A^n $(n \in \mathbb{N})$:

1. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $M = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix}$

Exercice 78 (CCINP) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Trouver un polynôme annulateur P de A.
2. Si $k \in \mathbb{N}$, effectuer la division euclidienne de X^k par P. En déduire A^k.
3. On définit (X_n) par $X_0 = {}^t(1,1,1)$ et $\forall k \in \mathbb{N}, X_{k+1} = AX_k$. Calculer X_k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 79 (Mines) Soit $P = (n+1)X^{n+1} - \sum_{j=0}^{n} X^j \in \mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que toutes les racines de P sont simple et de module inférieur à 1. Quelles sont les racines de P de module 1.
2. Soit u une suite définie par $(u_0, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ $u_{p+n+1} = \dfrac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} u_{p+j}$. Déterminer la limite de la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

Exercice 80 (CCP-Centrale) Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ $(n \geq 2)$ nilpotente d'ordre n. Peut-il exister $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = M$?

Exercice 81 (Mines) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trigonaliser A.
2. Résoudre $X^n = A$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 82 (IMT)

1. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que $-2, 1, 2, -3$ sont les valeurs propres possibles de M, vérifiant $M^2 + M = A$.
3. Montrer que M est diagonalisable et résoudre l'équation $M^2 + M = A$.

Exercice 83 (Mines) Résoudre l'équation $X^2 - 2X = A$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 84 (Mines) Résoudre l'équation $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 85 (Centrale-Mines) Déterminer les matrices A telles que $A^2 = M$ où :

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.
2. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
3. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
4. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
5. $M = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 5 \\ -5 & -5 & -6 \end{pmatrix}$

Exercice 86 (SR) * Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On dit que A est toute puissante sur le corps $\mathbb{K}$ (TP$\mathbb{K}$) si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $B^n = A$.

1. Traiter le cas $p = 1$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$.

2. On suppose que $\chi_A = \prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ où les λ_i sont distincts dans $\mathbb{K}$ et les α_i dans $\mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer qu'il existe $N_1, \dots, N_k$ nilpotentes telles que A soit semblable à une matrice diagonale par blocs avec comme blocs diagonaux $\lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1, \dots, \lambda_k I_{\alpha_k} + N_k$.
   (b) Montrer que A est TP$\mathbb{K}$ si et seulement si les $\lambda_i I_{\alpha_i} + N_i$ le sont.

   On dit que $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est unipotente si $M - I_p$ est nilpotente et on note $\mathcal{U}_p(\mathbb{K})$ l'nsemble des matrices unipotentes de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

   Pour $A \in \mathcal{U}_p(\mathbb{K})$, on pose $\ln(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(A - I_p)^n$.
3. Justifier la définition de $\ln(A)$ pour $A \in \mathcal{U}_p(\mathbb{K})$. Montrer que exp est une bijection de $\mathcal{N}_p(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{U}_p(\mathbb{K})$.
4. Montrer que les matrices unipotentes sont TP$\mathbb{K}$.

Exercice 87 (PLSR) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non inversible et m la multiplicité de 0 dans χ_A. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :

(i) $\ker A = \ker A^2$,

(ii) il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^m = A$,

(iii) pour tout $k \geq 1$, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^k = A$.

Exercice 88 (X) On note $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $M(f) : n \in \mathbb{N}^* \mapsto \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k) \in E$.

1. Montrer que pour tout $f \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^k(f)(n) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} f(1)$.
2. Montrer que si f est polynomiale, $M(f)$ l'est également.

Matrices de petit rang

Exercice 89 (CCINP-ENS Lyon)

1. * Montrer que A, matrice carrée complexe de rang 1, est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.
2. Donner le rang de la matrice complexe $M = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{pmatrix}$

   À quelle(s) condition(s) est-elle diagonalisable ? Qu'en est-il s'il s'agit d'une matrice réelle ?

Exercice 90 (Mines) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 2. Exprimer son polynôme caractéristique en fonction de $\mathrm{Tr}A$ et $\mathrm{Tr}(A^2)$.

Exercice 91 (Mines) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\mathrm{rg}(A) = 2$, $\mathrm{Tr}(A) = 0$, $A^n \neq 0$.

1. Montrer que A est diagonalisable
2. Calculer la dimension de $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AM = MA\}$.
3. On suppose de plus que $\mathrm{Tr}(A^2) = 2$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 92 (X) Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un sous-corps de $\mathbb{C}$, et f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est irréductible. Montrer que $\mathrm{rg}(fg - gf) \neq 1$ pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$.

Commutant et bicommutant

Exercice 93 (CCINP-Mines) * Soient u et v deux endomorphismes qui commutent, u ayant n valeurs propres distinctes (avec n dimension de E).

1. Montrer que u et v sont codiagonalisables.
2. Montrer que le commutant de u est $\mathbb{R}[u]$ et en déduire qu'il est de dimension n.
3. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $P \in \mathbb{C}[\mathbb{X}]$ non constant. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $A = P(M)$.

Exercice 94 (X) Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie, et qui commutent deux à deux. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall i \in I,\ f_i \in \mathbb{C}[g]$.

Exercice 95 (Centrale-Mines-X) * Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endormophisme diagonalisable. On note :
$Com(f) = \{g \in \mathcal{L}(E),\ f \circ g = g \circ f\}$. On note $(\lambda)_{1\leq j\leq p}$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f, et pour tout j, E_j l'espace propre associé à la valeur propre λ_j, et $d_j = \dim(E_j)$.

1. Montrer qu'un endomorphisme g appartient à $Com(f)$ si et seulement si il laisse stable tous les sous-espaces propres E_j.
2. On considère e une base de diagonalisation de f (obtenue comme union de bases des E_j), et $D = Mat_{\mathcal{B}}(f)$. Caractériser les matrices dans la base $\mathcal{B}$ des $g \in Com(f)$.
3. En déduire la dimension de $Com(f)$. A-t-on $Com(f) = \mathbb{K}[f]$?
4. Soit $Bicom(f) = \{g \in \mathcal{L}(E),\ \forall h \in Com(f),\ h \circ g = g \circ h\}$. Montrer que $Bicom(f) = \mathbb{K}[f]$.

Exercice 96 (Mines) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, $\mathcal{C}(M) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) M possède n valeurs propres distinctes,

(ii) $\dim \mathcal{C}(M) = n$,

(iii) $\forall A \in \mathcal{C}(M)$, $\exists P \in \mathbb{R}[X]$, $A = P(M)$,

(iv) $\forall (A, B) \in \mathcal{C}(M)^2$, $AB = BA$.

Exercice 97 (X) Soient E un espace vectoriel de dimension finie n, $u \in \mathcal{L}(E)$, $C(u)$ la sous-algèbre des endomorphismes de E commutant à u.

1. On suppose que u est diagonalisable. À quelle condition a-t-on $C(u) = \mathbb{K}[u]$?
2. On revient au cas général. Montrer que, si $\mathbb{K}[u]$ est de dimension n, alors $C(u) = \mathbb{K}[u]$. La réciproque est-elle vraie ?

Classes de similitude

Exercice 98 (IMT)

1. Montrer que deux matrices semblables ont même trace et même polynôme caractéristique.
2. Deux matrices de même trace et de même polynôme caractéristique sont-elles semblables ?

Exercice 99 (Mines) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant même polynôme minimal et même polynôme caractéristique. Les matrices A et B sont-elles semblables ?

Exercice 100 (Mines) Soient A une matrice carrée à coefficients complexes ; montrer que si $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ sont semblables, alors A est nilpotente.

Exercice 101 (Centrale) Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice de nilpotence égal à k. Montrer que $k \leq \ \mathrm{rg}(u) + 1$
2. Soient u, v nilpotents de rang 1. Montrer qu'il existe deux bases dans lesquelles u et v ont la même matrice. On dira que u et v sont semblables.
3. Soient u et v deux endomorphismes de rang 2.
   (a) On suppose que u et v ont pour polynôme minimal $X^2(X-1)$. Montrer que u et v sont semblables.
   (b) On suppose que u et v sont nilpotents de même indice k. Montrer que u et v sont semblables.

Exercice 102 (X) Quelles sont les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que M soit semblable à $2M$?

Exercice 103 (ENS) * Déterminer les matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec tous les éléments de leur classe de conjugaison.

Exercice 104 (ENS) * Déterminer les matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dont la classe de similitude est finie.

Exercice 105 (Lyon) Montrer que deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ qui ont le même polynôme caractéristique, de discriminant non nul, sont semblables.

Exercice 106 (X) * Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice de permutation associée à σ. Montrer que, si σ et σ' sont dans $\mathcal{S}_n$, σ et σ' sont conjuguées dans $\mathcal{S}_n$ si et seulement si P_σ et $P_{\sigma'}$ sont semblables.

Trigonalisabilité ; endomorphismes nilpotents

Exercice 107 (Mines) Soient A et B dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = B^2 = 0$, $\mathrm{rg} A \geq n$ et $\mathrm{rg} B \geq n$. Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 108 (CCP-Centrale) * Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E tels que $uv = vu$ et v est nilpotente. Montrer que $\chi_{u+v} = \chi_u$ (et que $\det(u+v) = \det(u)$). Qu'en est-il pour un $\mathbb{R}-$espace vectoriel ?

Exercice 109 (Mines-X) Soient A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0_{\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})}$. Montrer qu'elles admettent un vecteur propre commun, puis que A et B sont cotrigonalisables.

Exercice 110 (X-Mines-Centrale) * Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que $uv - vu = u$.

1. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k v - vu^k$. En déduire que u est nilpotent.
2. (ENS) A-t-on le même résultat pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$? $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?
3. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun, puis qu'ils sont cotrigonalisables.
4. Montrer le même résultat dans le cas $uv - vu \in \operatorname{Vect}(u, v)$.

Exercice 111 (Mines) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes. Étudier l'équivalence entre :

(i) A est diagonalisable ;
(ii) $\forall P \in \mathbb{C}[X]\,,\ P(A) \in \mathcal{N} \Rightarrow P(A) = 0$.

Exercice 112 (SR) * Montrer qu'une matrice $N \in M_n(\mathbb{R})$ est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ $\operatorname{tr}(N^k) = 0$.

Exercice 113 (X-Mines-Centrale) * Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$. On suppose : $\forall k \in \mathbb{N},\ \operatorname{Tr}(A^k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$.

1. Montrer que les λ_i sont les valeurs propres de A avec multiplicité.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}, \operatorname{Tr}(A^k) = \operatorname{Tr}(B^k)$. Les matrices A et B sont-elles semblables ? Montrer que $\chi_A = \chi_B$.

Exercice 114 (Ulm) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, u et v dans $\mathcal{L}(E)$ admettant exactement les mêmes sous-espaes stables. Montrer que u et v sont cotrigonalisables. Commutent-ils ?

Exercice 115 (ENS)

1. Soit $G \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$. On suppose que G^k est semblable à G pour tout entier $k \geq 1$. Montrer que $G - I_n$ est nilpotente.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. On pose $M = I_n + A$. Montrer que M^k est semblable à M pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 116 (PLSR)

1. Quelle est la dimension maximale d'une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendrée par une matrice nilpotente ?
2. Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \ldots, A_m$ des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent deux à deux, $\mathcal{A}$ la sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendrée par $A_1, \ldots, A_m$. Montrer que la dimension de $\mathcal{A}$ est majorée par $n\,(n - \min\{\ \operatorname{rg}(A_i)\ ;\ 1 \leq i \leq m\})$.

Exercice 117 (PLSR) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice m, $x \in E$ tel que $f^{m-1}(x) \neq 0$.

1. Montrer que la famille $(f^k(x))_{0 \leq k \leq m-1}$ est libre. On note V le sous-espace de E engendré par cette famille.
2. Soit $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(f^{m-1}(x)) \neq 0$, W le sous-espace de E^* engendré par $(\varphi \circ f^i)_{0 \leq i \leq m-1}$, $W^\perp$ l'ensemble des $y \in E$ tels que $\forall \psi \in W^\perp,\ \psi(y) = 0$. Montrer que $W^\perp$ est un supplémentaire de V dans E stable par f.
3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f soit diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de la forme J_k avec $k \in \mathbb{N}^*$, où $J_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ est une matrice dont tous les coefficients sont nuls en dehors de ceux de la sur-diagonale qui sont égaux à 1.

Applications de $L(E)$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Exercice 118 (CCP-Mines-Centrale-X) * Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On note P_A le polynôme caractéristique de A.
Pour $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $u(X) = AX - XB$.

1. Montrer l'équivalence entre :
   (a) A et B n'ont aucune valeur propre commune.
   (b) $P_A(B) \in Gl_n(\mathbb{C})$.
   (c) $\forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}),\ AX = XB \Rightarrow X = 0_{\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})}$ (on pourra dans un premier temps vérifier que si $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $AX = XB$, alors pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)X = XP(B)$).
   (d) $\forall Y \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists!\, X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}),\ AX - XB = Y$.
2. Montrer que, si α est valeur propre de A et β valeur propre de B, $\alpha - \beta$ est valeur propre de u.

3. Soit λ une valeur propre de u. Montrer que λ s'écrit $\alpha - \beta$ où α (resp. β) est valeur propre de A (resp. B).
4. Déterminer le spectre de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $X \mapsto AX - XB$.

Exercice 119 (SR) *

1. Soit P le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; on écrit sa décomposition : $P = \prod_{i=1}^{d} P_i$, avec $P_i = (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$.

   Montrer que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{d} \ker(P_i)$.
2. On considère une base adaptée à cette décomposition ; ainsi $A = P^{-1} \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_d \end{pmatrix} P$. Montrer que pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, $\chi_{A_i} = P_i$.
3. Montrer l'existence de la décomposition de Dunford.
4. On pose $com_A : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ X & \mapsto AX - XA \end{cases}$. Quelle est la décomposition de Dunford de com_A ?
5. On suppose com_A diagonalisable. Trouver une CNS sur A.

Exercice 120 (Mines-X-Centrale-ENS) * Soient $\mathbb{K}$ un corps, n, p, r dans $\mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, P dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r telle que $MP = PN$. Montrer que $\chi_M \wedge \chi_N$ est de degré supérieur ou égal à r.

Exercice 121 (Mines-Centrale) * Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. On note ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par $\phi(v) = v \circ u - u \circ v$.

1. On suppose que u est nilpotent. Montrer que ϕ est nilpotent.
2. On suppose que u est diagonalisable. Montrer que ϕ est diagonalisable.
3. Étudier les réciproques.

Exercice 122 (X-Lyon) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $T_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM - MA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si A est nilpotente alors T_A est nilpotent.
2. Montrer que si A possède une unique valeur propre alors T_A est nilpotent.
3. Montrer que si A possède plusieurs valeurs propres alors T_A n'est pas nilpotent.
4. Que peut-on dire de T_A si A est diagonalisable ?
5. Et si A est trigonalisable ?
6. Quel est le rang maximal de T_A ?
7. Montrer que s'il existe $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$ tel que $\dim \ker(A - \lambda I_n) \geq 2$, alors T_A n'est pas de rang maximal.

Exercice 123 (Paris) Soient E un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur, φ l'élément de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ défini par $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \varphi(u) = u \circ p + p \circ u$. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exercice 124 (X) Soit E l'espace des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Déterminer les $f \in E$ telles que le sous-espace de E engendré par les $x \mapsto f(x+k),\ k \in \mathbb{Z}$ soit de dimension finie.

Exercice 125 (ENS-Centrale) * Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si pour tout $\mu \in \mathbb{C}$, $I_n - \mu A$ est inversible.
2. On suppose que $f(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
   Montrer que, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{rg}(f(M)) = \mathrm{rg}(M)$.

Exercice 126 (ENS) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ surjective telle que pour tous A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tout $t \in \mathbb{C}$ on ait $\det(A + t\,B) = \det(f(A) + t\,f(B))$. Montrer que f est bijective et préserve le rang.