Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et n est un entier naturel.
On note $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et, pour $n \geq 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$. La matrice unité est notée I_n et on désigne par $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $A^\top$ la transposée de la matrice A, $\mathrm{rg}(A)$ son rang, $\mathrm{tr}(A)$ sa trace, $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique, π_A son polynôme minimal et $\mathrm{sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres dans $\mathbb{K}$.
Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ de dimension finie n supérieure ou égale à 2, et $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E. On note f un endomorphisme de E. On note :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ f^{k+1} = f^k \circ f.$$

Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_mX^m$, $Q(f)$ désigne l'endomorphisme $a_0\mathrm{Id}_E + a_1f + \ldots + a_mf^m$. On note $\mathbb{K}[f]$ la sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$ constituée des endomorphismes $Q(f)$ quand Q décrit $\mathbb{K}[X]$.
De même, on utilise les notations suivantes, similaires à celles des matrices, pour un endomorphisme f de E : $\mathrm{rg}(f),\ \mathrm{tr}(f),\ \chi_f,\ \pi_f$ et $\mathrm{sp}(f)$.
Enfin, on dit que f est *cyclique* si et seulement s'il existe un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

I. Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

(A) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que M et $M^\top$ ont même spectre.
2. Montrer que $M^\top$ est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable.

(B) Matrices compagnons

3. Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $Q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$. On considère la matrice

$$C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Déterminer en fonction de Q le polynôme caractéristique de C_Q.

4. Soit λ une valeur propre de ${C_Q}^\top$. Déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.

(C) Endomorphismes cycliques

5. Montrer que f est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q, où Q est un polynôme unitaire de degré n.
6. Soit f un endomorphisme cyclique. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.
7. Montrer que si f est cyclique, alors $(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$ et le polynôme minimal de f est de degré n.

(D) Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

8. Soit x un vecteur non nul de E. Montrer qu'il existe un entier p strictement positif tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ soit libre et qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \ldots + \alpha_{p-1}f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0$$

9. Justifier que $\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est stable par f.
10. Montrer que $X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \ldots + \alpha_0$ divise le polynôme χ_f.
11. Démontrer que $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul.

II. Étude des endomorphismes cycliques

(A) Endomorphismes cycliques nilpotents

Dans cette sous-partie, on suppose que f est un endomorphisme nilpotent de E. On note r le plus petit entier naturel tel que $f^r = 0$.

12. Montrer que f est cyclique si et seulement si $r = n$. Préciser alors la matrice compagnon.

(B) Dans cette sous partie II.B, on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
On suppose que $(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est libre et on se propose de montrer que f est cyclique.
On factorise le polynôme caractéristique de f sous la forme

$$\chi_f(X) = \prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)^{m_k}$$

où les λ_k sont les p valeurs propres deux à deux distinctes de f et les m_k de $\mathbb{N}^*$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on pose $F_k = \ker((f - \lambda_k\mathrm{Id}_E)^{m_k})$.

13. Montrer que les sous-espaces vectoriels F_k sont stables et que $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$.

Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on note φ_k l'endomorphisme induit par $f - \lambda_k \mathrm{Id}$ sur le sous-espace vectoriel F_k,

$$\varphi_k \ : \ \begin{cases} F_k \to F_k \\ x \mapsto f(x) - \lambda_k x \end{cases}$$

14. Justifier que φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k.

On note ν_k le plus petit entier naturel tel que $\varphi_k^{\nu_k} = 0$.

15. Pourquoi a-t-on $\nu_k \leq \dim(F_k)$?
16. Montrer, avec l'hypothèse proposée, que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $\nu_k = m_k$.
17. Expliciter la dimension de F_k pour $k \in [\![1, p]\!]$, puis en déduire l'existence d'une base $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ de E dans laquelle f a une matrice diagonale par blocs, ces blocs appartenant à $\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$ et étant de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

On pose $x_0 = u_1 + u_{m_1+1} + \ldots + u_{m_1+\ldots+m_{p-1}+1}$.

18. Déterminer les polynômes $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $Q(f)(x_0) = 0$.
19. Justifier que f est cyclique.

III. Endomorphismes commutants, décomposition de Frobenius

On appelle commutant de f l'ensemble $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) / \ f \circ g = g \circ f\}$.

(A) Commutant d'un endomorphisme cyclique

20. Montrer que $C(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

On suppose que f est cyclique et on choisit un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E. Soit $g \in C(f)$, un endomorphisme qui commute avec f.

21. Justifier l'existence de $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ de $\mathbb{K}$ tels que

$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)$$

22. Montrer alors que $g \in \mathbb{K}[f]$.
23. Établir que $g \in C(f)$ si et seulement s'il existe un polynôme $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$.

(B) Décomposition de Frobenius

On se propose de démontrer le théorème de décomposition de Frobenius : toute matrice est semblable à une matrice diagonale par blocs, ces blocs étant des matrices compagnons.

24. Montrer que si la réunion d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_r$ de E est un sous-espace vectoriel, alors l'un des sous-espaces F_i contient tous les autres.

On note d le degré de π_f.

25. Justifier l'existence d'un vecteur x_1 de E tel que $(x_1, f(x_1), \ldots, f^{d-1}(x_1))$ est libre.
Pour tout x non nul de E, on pourra remarquer que $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] / \ P(f)(x) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par un polynôme unitaire $\pi_{f,x}$ diviseur de π_f et considérer les sous-espaces vectoriels $\ker(\pi_{f,x}(f))$.

On pose pour $k \in [\![1, d]\!]$, $e_k = f^{k-1}(x_1)$ et $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_d)$.

26. Montrer que E_1 est stable par f et que $E_1 = \{P(f)(x_1) / \ P \in \mathbb{K}[X]\}$.

On note ψ_1 l'endomorphisme induit par f sur le sous-espace vectoriel E_1,

$$\psi_1 \ : \ \begin{cases} E_1 \to E_1 \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

27. Justifier que ψ_1 est cyclique.

On complète, si nécessaire, $(e_1, e_2, \ldots, e_d)$ en une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E. Soit Φ la d-ième forme coordonnée qui à tout vecteur x de E associe sa coordonnée suivant e_d. On note $F = \{x \in E / \ \forall i \in \mathbb{N}, \ \Phi(f^i(x)) = 0\}$.

28. Montrer que F est stable par f et que E_1 et F sont en somme directe.

Soit Ψ l'application linéaire de E dans $\mathbb{K}^d$ définie, pour tout $x \in E$, par

$$\Psi(x) = (\Phi(f^i(x)))_{0 \leq i \leq d-1} = (\Phi(x), \Phi(f(x)), \ldots, \Phi(f^{d-1}(x)))$$

29. Montrer que Ψ induit un isomorphisme entre E_1 et $\mathbb{K}^d$.
30. Montrer que $E = E_1 \oplus F$.
31. En déduire qu'il existe r sous-espaces vectoriels de E, notés $E_1, \dots, E_r$, tous stables par f, tels que :
    — $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$;
    — pour tout $1 \leq i \leq r$, l'endomorphisme ψ_i induit par f sur le sous-espace vectoriel E_i est cyclique ;
    — si on note P_i le polynôme minimal de ψ_i, alors P_{i+1} divise P_i pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq r-1$.
32. Exprimer μ_f et χ_f en fonction des polynômes $(P_i)_{1 \leq i \leq r}$.

Pour un endomorphisme f donné, on a unicité de cette décomposition ; elle est appelée la décomposition de Frobenius et les polynômes $(P_i)_{1 \leq i \leq r}$ sont appelés les invariants de similitude de f. On montre en effet que deux endomorphismes sont semblables si et seulement si ils ont la même suite d'invariants de similitude.

(C) Commutant d'un endomorphisme quelconque

32. Montrer que la dimension de $C(f)$ est supérieure ou égale à n.
33. On suppose que f est un endomorphisme tel que l'algèbre $C(f)$ est égale à $\mathbb{K}[f]$. Montrer que f est cyclique.