Problème 1 Décomposition de Jordan des endomorphismes nilpotents :

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on notera $J_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$.

On considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endormorphisme nilpotent et on note q le plus petit entier tel que $f^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (l'ordre de nilpotence de f).

1. Expliquer que $q \geq 1$ et qu'il existe $v_1 \in E$ tel que $f^{q-1}(v_1) \neq 0_E$. Démontrer que $\mathcal{B}_1 = (f^{q-1}(v_1), \dots, f(v_1), v_1)$ forme une famille libre.

   On note $E_1 = \text{Vect}(f^{q-1}(v_1), \dots, f(v_1), v_1)$.
2. Montrer que E_1 est stable par f. On note $f_1 \in \mathcal{L}(E_1)$ l'application iunduite par f sur E_1.
3. Expliquer que f_1 est un endormophisme nilpotent cyclique. Quelle est sa matrice dans la base $\mathcal{B}_1$?

   On souhaite maintenant montrer qu'il existe un sous espace vectoriel F, supplémentaire de E_1 et stable par f.

   Pour tout $j \in \mathbb{N}_q$, on notera $v_j = f^{j-1}(v_1)$.
4. Justifier l'existence d'une forme linéaire $\phi \in E^*$ telle que $\phi\left(f^{q-1}(v_1)\right) \neq 0$.

   Pour tout $j \in \mathbb{N}_q$, on note $\phi_j = \phi \circ f^{j-1} \in E^*$.
5. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}_q$, $\phi_j \neq 0_{E^*}$ et que la famille $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_q)$ est libre.

   On considère alors $F = \bigcap_{j=1}^{q} \ker(\phi_j)$.
6. Montrer que F est un sous espace vectoriel de E stable par f.
7. Montrer que $E = E_1 \oplus F$.
8. Expliquer que l'application induite par f sur F, $f_{|F} \in \mathcal{L}(F)$ est encore nilpotente et d'ordre de nilpotence inférieur ou égal à q.
9. Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots F_N$ de E, supplémentaires dans E, et de dimension respective $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_N$, tous stables par f, tels que pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, $f_{|F_j}$ est nilpotent cyclique.
10. En déduire l'existence d'une base de E dans laquelle f a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} J_{q_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{q_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{q_N} \end{pmatrix}$$