La dimension d'un espace vectoriel E de dimension finie est notée $\dim E$. Le noyau et l'image d'uneapplication linéaire u sont respectivement notés $\ker u$ et $\mathrm{Im} u$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel E, Id_E l'identité de E, et $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$.

Soient un entier naturel n et un corps $\mathbb{K}$. La notation $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ désigne la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. On note I_n la matrice unité dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ le groupe des éléments inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La transposée d'une matrice M est notée $M^\top$. Une matrice carrée est dite symétrique si elle est égale à sa transposée. On pose :

$$\mathbf{O}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ M^\top = M^{-1}\}\ .$$

Dans ce sujet, on s'intéresse à l'ensemble $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$ des matrices nilpotentes, et on va faire agir le groupe général linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ par conjugaison sur $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$. Dans une première partie, on définira les orbites d'une action et on étudiera tout particulièrement l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur les familles libres et l'action d'un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ par conjugaison sur un ensemble de matrices.
On établira dans une deuxième partie l'existence et l'unicité d'une décomposition de Jordan pour les matrices nilpotentes : cela revient à donner un représentant de chaque orbite pour l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ par conjugaison sur $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$.
Dans une troisième partie, on étudiera l'action du groupe orthogonal $\mathbf{O}_n(\mathbb{K})$ sur l'ensemble $\mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$ des matrices nilpotentes symétriques, lorsque $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2 (par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) : il existe alors une bijection naturelle entre l'ensemble des orbites de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ agissant sur $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$ et l'ensemble des orbites de $\mathbf{O}_n(\mathbb{K})$ agissant sur $\mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$.
Dans une dernière partie, on dénombrera dans le cas d'un corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments le cardinal de $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$, et ce de deux manières différentes. Cette partie est complètement indépendante des parties II et III mais la première méthode utilise l'une des actions de groupe introduite dans le I.

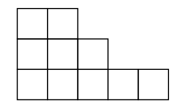
Définitions et notations concernant les partitions.

Soient n et ℓ des entiers naturels. Une *partition* de n de *longueur* ℓ est une suite décroissante $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\ell)$ de ℓ entiers naturels non nuls telle que $n = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i$. On note $|\lambda| = n$. Les termes de cette suite sont appelés les *parts* de la partition λ (par convention, l'indexation commence à 1). Par commodité d'écriture, on étend la notion de part de la partition λ aux indices strictement supérieurs à ℓ en posant $\lambda_i = 0$, pour tout entier $i > \ell$. Par convention, on note $\varnothing$ l'unique partition de longueur 0 de l'entier 0.

Ainsi, si l'on désigne par $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des partitions de l'entier n, alors $\mathscr{P}_0 = \{\varnothing\}$, $\mathscr{P}_1 = \{(1)\}$, $\mathscr{P}_2 = \{(2), (1,1)\}$, $\mathscr{P}_3 = \{(3), (2,1), (1,1,1)\}$, $\mathscr{P}_4 = \{(4), (3,1), (2,2), (2,1,1), (1,1,1,1)\}$, etc.

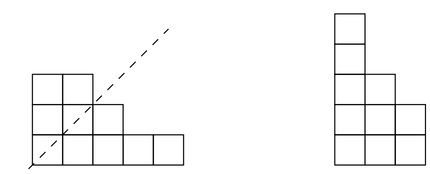
Un élément d'un ensemble $\mathscr{P}_n$, pour un entier n non précisé, est simplement appelé *partition*.

Il est commode de représenter graphiquement une partition λ par son *diagramme de Ferrers* : chaque part non nulle de λ est visualisée par une ligne de boîtes, les différentes lignes étant empilées de bas en haut et alignées à gauche. Par exemple, le diagramme de Ferrers de la partition de 10 de longueur 3, $(5,3,2)$, est représenté ci-dessous.



On remarque que le nombre de lignes du diagramme de Ferrers de la partition λ est la longueur de λ.

La réflexion selon la bissectrice du premier quadrant (représentée en pointillé ci-dessous) envoie le diagramme de Ferrers d'une partition λ sur le diagramme de Ferrers d'une autre partition, appelée partition *conjuguée* de λ, de longueur λ_1 et notée λ'. On admet qu'il s'agit bien d'une partition.



La figure de droite ci-dessus présente le résultat de cette opération de conjugaison lorsqu'on l'applique à la partition $(5,3,2)$: on obtient $(3,3,2,1,1)$. On pourra vérifier que la conjuguée de la partition (4) est $(1,1,1,1)$ et que la partition $(3,2,1)$ est égale à sa conjuguée.

La conjugaison des partitions d'un même entier n est une opération involutive : pour toute partition λ, on a $(\lambda')' = \lambda$ et $|\lambda'| = |\lambda|$. Pour chaque entier $i \geqslant 1$, la i-ième part λ'_i de λ' est égale au nombre de parts de λ supérieures ou égales à i ; en particulier, λ'_1 est la longueur de λ. Ces propriétés sont admises et pourront être utilisées sans justification dans la suite du problème.

Pour chaque entier strictement positif d, on note $\widetilde{J}_d$ la matrice carrée d'ordre d avec des zéros partout sauf sur la première sous-diagonale, où l'on met des 1. Par exemple,

$$\widetilde{J}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

À une partition λ, on associe la matrice J_λ diagonale par blocs, avec comme blocs diagonaux successifs $\widetilde{J}_{\lambda_1}$, $\widetilde{J}_{\lambda_2}$, ... Par exemple,

$$J_{(4,2,1)} = \left(\begin{array}{cccc|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

La matrice $\widetilde{J}_d$ (respectivement, J_λ) peut être considérée comme appartenant à $\mathscr{M}_d(\mathbb{K})$ (respectivement, $\mathscr{M}_{|\lambda|}(\mathbb{K})$) quel que soit le corps $\mathbb{K}$.

I. Partie I : action de groupes

Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Soit X un ensemble. Un action de G sur X est la donnée d'un morphisme $\rho : \begin{cases} G & \to \mathfrak{S}(X) \\ g & \mapsto \rho_g \end{cases}$, où $\mathfrak{S}(X)$ désigne l'ensemble des bijections de X. On pourra noter $\rho_g(a) = g \cdot a$, quand il n'y a pas d'ambigüité possible sur le morphisme ρ considéré.

(1) On définit une relation sur X : pour tout $(a,b) \in X^2$, $a \sim b$ si et seulement si il existe $g \in G$ tel que $b = \rho_g(a) = g \cdot a$.

a. Montrer que l'on définit ainsi une relation d'équivalence.
Pour tout $a \in X$, on appelle orbite de a pour l'action de G, notée $O_G(a)$, la classe d'équivalence de a pour cette relation.

b. Soit $a \in X$. On appelle stabilisateur de X : $Stab(a) = \{g \in G,\ \rho_g(a) = a\}$. Montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe de G.

c. Dans le cas où G est un groupe fini et X un ensemble fini, montrer que pour tout a dans X, $|Stab(a)|\,|O_G(a)| = |G|$.

(2) Pour $1 \le h \le n$, on note $\mathcal{L}_{h,n}$ l'ensemble des familles libres à h éléments de $\mathbb{K}^n$, et $\mathcal{L} = \bigcup_{h=1}^{n} \mathcal{L}_{h,n}$ l'ensemble des familles libres. On fait agir $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{L}_{h,n}$ en posant pour $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, et $f = (f_1, \dots, f_h) \in \mathcal{L}_{h,n}$, $M \cdot f = (Mf_1, \dots Mf_h)$.

a. Montrer que cela définit une action de groupes transitive sur $\mathcal{L}_{h,n}$, c'est-à-dire que pour tout $f \in \mathcal{L}_{h,n}$, son orbite est $\mathcal{L}_{h,n}$ entier.

b. Soit $f \in \mathcal{L}_{h,n}$. On complète f en $e = (f_1, \dots f_h, e_{h+1}, \dots e_n)$ base de $\mathbb{K}^n$. En notant P la matrice de changement de base de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à e, montrer qu'une matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dans le stabilisateur de f si et seulement si $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} I_h & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_{h,n-h}(\mathbb{K})$ et $B \in GL_{n-h}(\mathbb{K})$.

(3) On considère désormais X une partie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que X est stable par conjugaison par les éléments de G, c'est-à-dire que pour tout $P \in G$ et pour tout $M \in X$, $PMP^{-1} \in X$. Cela permet donc de définir pour $P \in G$, $\rho_P : \begin{cases} X & \to X \\ M & \mapsto P \cdot M = PMP^{-1} \end{cases}$.

a. Montrer que cela définit une action de G sur X. On dit que G agit par conjugaison sur X.
On note $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices nilpotentes dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

b. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ agit par conjugaison sur $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$.

c. Montrer que $\mathbf{O}_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
On note $\mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices nilpotentes symétriques.

d. Vérifier que pour tout (P,M) dans $\mathbf{O}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$, on a $P \cdot M \in \mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$. Et en déduire que l'action par conjugaison de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$ se restreint en une action de $\mathbf{O}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$.

II. Partie II : décomposition de Jordan

Soit $\mathbb{K}$ un corps. On se donne E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme *nilpotent* de E.
Si x est un élément de E, on note $\langle x \rangle_u$ le sous-espace vectoriel de E engendré par les éléments $(u^k(x))_{k\in\mathbb{N}}$, et on définit la *hauteur* de x comme l'entier $h \geqslant 0$ tel que $u^i(x) \neq 0$ si $0 \leqslant i < h$ et $u^i(x) = 0$ si $i \geqslant h$. Ainsi le vecteur nul est de hauteur 0 et la hauteur d'un vecteur non nul est strictement positive.

(1) Soit x un élément non nul de E. On note h la hauteur de x.

a. Démontrer que $(x, u(x), \dots, u^{h-1}(x))$ est une base de $\langle x \rangle_u$.

b. Démontrer que $\langle x \rangle_u \cap \ker u$ est une droite vectorielle et donner un vecteur générateur de cette droite.

(2) On suppose dans cette question uniquement qu'il existe une suite finie $(z_1, z_2, \dots, z_m)$ d'éléments non nuls de $\mathrm{Im} u$ telle que $\mathrm{Im} u$ soit la somme

directe $\langle z_1\rangle_u \oplus \langle z_2\rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle z_m\rangle_u$, et pour chaque $i \in [\![1, m]\!]$, on choisit $y_i \in E$ tel que $u(y_i) = z_i$. On note F la somme $\langle y_1\rangle_u + \langle y_2\rangle_u + \cdots + \langle y_m\rangle_u$ et G un supplémentaire de $F \cap \ker u$ dans $\ker u$. On pose $\ell = m + \dim G$.

a. Démontrer que la somme $\langle y_1\rangle_u + \langle y_2\rangle_u + \cdots + \langle y_m\rangle_u$ est directe.
Indication : On pourra vérifier que $u(\langle y_i\rangle_u) \subset \langle z_i\rangle_u$, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, puis exploiter ce fait.

b. Justifier que $u(F) = \mathrm{Im} u$.

c. Démontrer que $E = F \oplus G$.

d. Établir l'existence d'une suite finie $(x_1, x_2, \ldots, x_\ell)$ d'éléments non nuls de E telle que E soit la somme directe $\langle x_1\rangle_u \oplus \langle x_2\rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle x_\ell\rangle_u$.

(3) Établir l'existence d'une suite finie $(x_1, x_2, \ldots, x_\ell)$ d'éléments de E telle que E soit la somme directe $\langle x_1\rangle_u \oplus \langle x_2\rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle x_\ell\rangle_u$. On effectuera une démonstration par récurrence que l'on rédigera avec soin.

Étant donnée une partition λ, de longueur ℓ, on dit que (E, u) est de *type* λ s'il existe une suite finie $(x_1, x_2, \ldots, x_\ell)$ d'éléments de E telle que chaque x_i soit de hauteur λ_i et E soit la somme directe $\langle x_1\rangle_u \oplus \langle x_2\rangle_u \oplus \cdots \oplus \langle x_\ell\rangle_u$.

(4) a. Soit λ une partition. Démontrer que (E, u) est de type λ si et seulement s'il existe une base de E dans laquelle u a pour matrice J_λ.

b. Soit λ une partition. On suppose que (E, u) est de type λ. Pour chaque entier $i \geqslant 1$, exprimer $\dim(\ker u^i) - \dim(\ker u^{i-1})$ en fonction de i et des parts λ'_1, λ'_2, ... de la partition conjuguée de λ.
Remarque : on rappelle que $u^0 = \mathrm{Id}_E$.

c. Soit λ et μ deux partitions. On suppose que (E, u) est à la fois de type λ et de type μ. Démontrer que $\lambda = \mu$.

(5) Soit n un entier naturel.

a. Soit M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Démontrer l'existence et l'unicité d'une partition λ de l'entier n telle que M soit semblable à J_λ. Cette matrice J_λ est appelée la réduction de Jordan de M.

b. En déduire que l'ensemble des matrices J_λ, pour λ partition de l'entier n, constitue un système de représentants des orbites de l'action par conjugaison de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$.

(6) Démontrer que dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, deux matrices nilpotentes proportionnelles (c'est-à-dire, se déduisant l'une de l'autre par multiplication par un scalaire non nul) sont semblables.

III. Partie III : action de $\mathbf{O}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$.

Dans cette partie, le corps $\mathbb{K}$ est supposé algébriquement clos et de caractéristique différente de 2. On se donne un entier naturel $n \geqslant 1$.

(1) Pour chaque entier strictement positif d, on note $\widetilde{P}_d$ la matrice carrée symétrique d'ordre d avec des zéros partout sauf sur l'antidiagonale, où l'on met des 1. Par exemple,

$$\widetilde{P}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit λ une partition de n.

a. Vérifier que $\left(\widetilde{P}_d\right)^2 = I_d$. Exprimer $\widetilde{P}_d \widetilde{J}_d \left(\widetilde{P}_d\right)^{-1}$ en fonction de J_d.

b. Exhiber une matrice symétrique P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P J_\lambda P^{-1} = (J_\lambda)^\top$ et $P^2 = I_n$.

c. Trouver une matrice Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $Q J_\lambda Q^{-1}$ soit symétrique.
Indication : on pourra chercher Q sous la forme $aI_n + bP$ avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.

(2) a. Soit D dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable et soit α_1, α_2, $\ldots$, α_n les valeurs propres de D, répétées selon leurs multiplicités. Construire un polynôme $f(X)$ de $\mathbb{K}[X]$ tel que $f(\alpha_i)^2 = \alpha_i$ pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, puis justifier que $f(D)^2 = D$.

b. On définit par récurrence une suite (C_k) d'entiers naturels en posant $C_0 = 1$ et en demandant que $C_{k+1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} C_i C_{k-i}$ pour $k \geqslant 0$. On définit le polynôme à coefficients entiers $\Phi(X) = 1$ si $n = 1$ et pour $n \geqslant 2$,

$$\Phi(X) = 1 - 2\sum_{k=0}^{n-2} C_k X^{k+1}.$$

Que vaut le reste de la division euclidienne de $\Phi(X)^2$ par X^n.

c. Donner un polynôme $g(X)$ dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $g(N)^2 = I_n + N$ pour toute matrice nilpotente N de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(3) On admet le résultat suivant : chaque matrice P de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit de façon unique sous la forme $P = D + N$, où D est une matrice diagonalisable et N est une matrice nilpotente telles que $DN = ND$; de plus, il existe un polynôme $h(X)$ de $\mathbb{K}[X]$ tel que $D = h(P)$.

a. Soit P dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, écrit sous la forme $P = D+N$ comme ci-dessus. Démontrer que si P est inversible, alors D l'est aussi, et qu'en ce cas il existe un polynôme $j(X) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $D^{-1} = j(P)$.

b. Soit P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Établir l'existence d'une matrice R de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $R^2 = P$, et justifier qu'on peut en outre exiger que R soit un polynôme en P.
Indication : on pourra écrire $P = D + N = D(1 + D^{-1}N)$.

c. Soit P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Démontrer l'existence d'une matrice Q dans $\mathbf{O}_n(\mathbb{K})$ et d'une matrice symétrique S dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $P = QS$, et justifier qu'on peut en outre exiger que S soit un polynôme en $P^\top P$.

(4) Soit A et B deux matrices symétriques appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A et B sont semblables. Démontrer l'existence d'une matrice Q dans $\mathbf{O}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = QAQ^{-1}$.

(5) Justifier que l'application $\mathscr{O} \mapsto \mathscr{O} \cap \mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$ est une bijection de l'ensemble des $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$-orbites dans $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$ sur l'ensemble des $\mathbf{O}_n(\mathbb{K})$-orbites dans $\mathscr{N}_n^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$.

(6) On suppose ici que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique 2.

a. Démontrer que les deux matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ sont semblables.

b. Le résultat de la question III4 est-il encore valable si $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique 2 ?

IV. Partie IV : dénombrement de $\mathscr{N}_n(\mathbb{K})$.

Dans cette partie $\mathbb{K}$ désigne un corps fini à q éléments et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On reprendra les notations de la question I2.

(1) Déterminer le cardinal de E, puis de $\mathcal{L}(E)$.

(2) Déterminer le nombre d'endomorphismes inversibles de E. On le notera g_n.

(3) Combien E admet-il de bases ?

(4) Quel est la cardinal de $\mathcal{L}_{h,n}$ pour $1 \leq h \leq n$?
On note N_n le cardinal de l'ensemble des endomorphismes nilpotents d'un $\mathbb{K}$-espace vectorel de dimension n. L'objectif est de déterminer N_n.

(5) *Méthode 1 :* Pour $N \in \mathscr{N}_n(\mathbb{K})$ et $f = (f_1, \dots, f_h) \in \mathcal{L}_{h,n}$, on dit que N et f sont compatibles et on note $N \star f$ si pour tout $1 \leq j \leq h$, $f_j = N^{j-1} f_1$ et $N^h f_1 = 0$. On va chercher à dénombrer $\mathcal{C} = \{(N, f) \in \mathscr{N}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{L},\ N \star f\}$ de deux manières différentes.

a. Expliquer que l'application $(N, f) \in \mathcal{C} \mapsto (N, f_1)$ est une bijection et en déduire que $|\mathcal{C}| = N_n(q^n - 1)$.

b. En utilisant les résultats de la première partie et notamment de I2, donner pour $f \in \mathcal{L}_{h,n}$ le cardinal de $Stab(f)$ pour l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, et en déduire :

$$|\mathcal{L}_{h,n}| = \frac{g_n}{g_{n-h} q^{h(n-h)}}.$$

c. En déduire une nouvelle expression de $|\mathcal{C}|$.

d. Montrer que $N_n = q^{n(n-1)}$.

(6) *Méthode 2 :*

a. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe deux sous-espaces F et G stables par u tels que $F \oplus G = E$ et l'application u_F induite par u sur F soit inversible et l'application u_G induite par u sur G soit nilpotent.

b. Montrer l'unicité d'une telle décomposition pour un u donné.

c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$q^{n^2} = \sum_{k=0}^{n} N_k \frac{g_n}{g_k}.$$

d. En déduire N_n.