

## Programme de colles - Semaine 7 - du 18/11 au 22/11

**Réduction** : Exercices sur tout le chapitre.

**Topologie des espaces vectoriels normés** : premiers exercices proches du cours sur le début du chapitre (normes et comparaison de normes).

*Normes et espaces vectoriels normés* : Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Structure d'espace vectoriel normé. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel. Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Normes  $\| \cdot \|_1$ ,  $\| \cdot \|_2$ ,  $\| \cdot \|_\infty$  sur  $\mathbb{K}^n$ . Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes. Norme sur un produit fini d'espaces vectoriels normés.

Distance associée à une norme. Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules.

*Topologie d'un espace normé* : Ouvert d'un espace normé. Stabilité par réunion quelconque, par intersection d'une famille finie. Une boule ouverte est un ouvert. Voisinage d'un point.

Fermé d'un espace normé. Stabilité par intersection quelconque, par réunion finie. Une boule fermée, une sphère, sont fermées.

*Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé* : Parties, suites, fonctions bornées. Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Suite à valeurs dans un espace produit. Caractérisation séquentielle des fermés.

*Comparaison des normes* : Norme plus fine. Normes équivalentes. Invariance du caractère borné d'une suite (utilisation des suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes). Invariance du caractère borné et de la convergence d'une suite par passage à des normes équivalentes. Utilisation des suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes. Comparaison des normes usuelles de  $\mathbb{K}^n$  (avec constantes optimales). Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente. Nous avons énoncé le résultat d'équivalences des normes en dimension finie et les étudiants peuvent l'utiliser (mais il ne sera démontré que plus tard).