Feuille d'exercices : Topologie et espaces vectoriels normés

Normes et normes équivalentes

Exercice 1 *(CCP)* On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ (où $n \geqslant \deg P$), on définit $N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ et $N_2(P) = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k|$.

1. Démontrer succintement que N_1 et N_2 sont des normes sur E.
2. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_2 est ouvert pour la norme N_1.
3. Démontrer que les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.
4. Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé. On considère N_1' et N_2' les restrictions de N_1 et N_2 au sous-espace vectoriel $F = \mathbb{R}_N[X]$. Sont-elles équivalentes sur F ?

Exercice 2 *(Mines)* On définit pour $P \in E = \mathbb{R}[X]$, $N_1(P) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |P(t)|$ et $N_2(P) = \sqrt{P(0)^2 + \int_0^1 P'^2(t)\, \mathrm{d}t}$.

1. Démontrer succintement que N_1 et N_2 sont des normes sur E.
2. Sont-elles équivalentes ?

Exercice 3 *(Mines)*

1. On considère l'espace l^1 muni de la norme N_1 habituelle. On se fixe une suite bornée $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

   On considère $N : \begin{cases} l^1 & \to \mathbb{R}_+ \\ u = (u_n)_n & \mapsto N(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n u_n| \end{cases}$.

   (a) Vérifier que N est bien définie. À quelle condition (CNS) sur $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-ce une norme sur l^1 ?

   (b) Dans ce cas, cette norme est-elle équivalence à N_1 ?

2. On considère maintenant $E = l^\infty$ l'espace des suites bornées, muni de la norme N_∞. Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$.

   On considère $N : \begin{cases} E & \to \mathbb{R}_+ \\ u = (u_n)_n & \mapsto N(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n u_n| \end{cases}$.

   (a) Vérifier que N est bien définie. À quelle condition (CNS) sur $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-ce une norme sur E ?

   (b) Dans ce cas, cette norme est-elle équivalence à N_∞ ?

Exercice 4 *(X)* Soit N une norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On suppose qu'elle vérifie l'identité du parallélogramme. Montrer que N provient d'un produit scalaire.

Exercice 5 *(ENS)* Trouver un espace vectoriel E, deux normes N_1 et N_2 sur E et une suite (x_n) d'éléments de E convergeant vers ℓ_1 pour N_1, ℓ_2 pour N_2 avec $\ell_1 \neq \ell_2$.

Exercice 6 On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$. Donner une norme pour laquelle la suite $(X^n)_n$ converge vers 0, puis une autre norme pour laquelle elle converge vers 1. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, existe-il une norme N sur E pour laquelle la suite $(X^n)_n$ converge vers P ?

Exercice 7 *(SR)* Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux produits scalaires sur E ; on note N_1 et N_2 les normes euclidiennes associées. On suppose :

$$\forall (x,y) \in V^2,\ \phi_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow \phi_2(x,y) = 0.$$

   (a) Montrer : $\forall (x,y) \in V^2,\ N_1(x) = N_1(y) \Rightarrow N_2(x) = N_2(y)$.

   (b) Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $N_1 = c\, N_2$ et $\phi_1 = c^2\, \phi_2$.

2. On munit V d'un produit scalaire. Soit $u \in L(V)$ telle que pour tout $(x,y) \in V^2$, x et y sont orthogonaux si et seulement si $u(x)$ et $u(y)$ sont orthogonaux. Montrer que u est une similitude.

Exercice 8 *(Mines/Centrale)* Soit $n \geqslant 2$.

1. Montrer qu'une norme N sur $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ ne peut pas vérifier : $(\forall (A,B) \in E^2,\ N(AB) = N(BA))$ (1).

2. Montrer qu'une norme N sur $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ ne peut pas vérifier : $\forall (A,P) \in E \times Gl_n(\mathbb{C}),\ N(PAP^{-1}) = N(A)$ 2. *On pourra exhiber une matrice A semblable à $2A$.*
3. Soit $N : E \to \mathbb{R}_+$ une semi-norme, *i.e* $\begin{cases} \forall (\alpha, A) \in \mathbb{R} \times E,\ N(\alpha A) = |\alpha| N(A) \\ \forall (A,B) \in E^2,\ N(A+B) \leqslant N(A) + N(B) \end{cases}$ telle que (2). Montrer que N est lipschitzienne, puis que (1) est vraie.
4. Montrer que $A \to |\mathrm{Tr}(A)|$ convient.
5. Montrer que $\forall B \in E,\ (N(B) = 0) \Rightarrow (\forall A \in E,\ N(A+B) = N(A))$.
6. En déduire toutes les N possibles. (*On pourra montrer que ($\forall i \neq j,\ N(E_{i,j}) = 0$) puis que ($\forall A \in E,\ Tr(A) = 0 \Rightarrow N(A) = 0$.)*)

Topologie

Exercice 9 **(CCP/TPE)* Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit F un sous-espace vectoriel de E d'intérieur non vide. Montrer que $F = E$.

Exercice 10 *(Mines)* Soit C une partie convexe d'un espace normé. Montrer que l'adhérence et l'intérieur de C sont convexes.

Exercice 11 *(X)* Soit C une partie convexe dense de $\mathbb{R}^d$. Montrer que $C = \mathbb{R}^d$.

Exercice 12 *(Mines)* Soient (E, N) un espace normé réel, $B = \{x \in E\ ;\ N(x) < 1\}$. Montrer que E et B sont homéomorphes.

Exercice 13 *(IMT)* On considère E un espace vectoriel normé, A un ouvert de E et B une partie quelconque de E.

1. Montrer que $\overline{A \cap B} = \overline{A \cap \overline{B}}$.
2. Contre-exemple dans le cas où A est quelconque ?

Exercice 14 *(Mines)* Soient E un espace vectoriel normé et A une partie de E. On considère l'ensemble des parties que l'on peut obtenir en appliquant successivement des passages à l'intérieur ou à l'adhérence à partir de A.

1. Montrer qu'il y en a au plus 7.
2. Donner une partie A telle qu'il y en ait exactement 7.

Exercice 15 *(Mines)* Soient $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E. Soit $f : x \in E \mapsto d(x, A) = \inf\{\|x - a\|,\ a \in A\}$.

1. Montrer que f est 1-lipschitzienne.
2. Montrer que A est fermé si et seulement si $A = f^{-1}(\{0\})$.
3. Montrer que tout fermé de E est intersection décroissante d'ouverts.
4. Montrer que tout ouvert est union croissante de fermés.

Exercice 16 *(Centrale-X)*

1. Quelle est la nature topologique de l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite dans un espace vectoriel normé ?
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 17 *(X-Mines)*

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{D} = \left\{ \dfrac{k}{2^n},\ n \in \mathbb{N},\ k \in [\![0, 2^n]\!] \right\}$ est dense dans $[0,1]$.
2. Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Prouver que f est convexe sur I si et seulement si pour tout $(x,y) \in I^2$, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leqslant \dfrac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right)$.

Exercice 18 **(X)* Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}_d[X]$ de sa topologie usuelle, on note U_d l'ensemble des polynômes unitaires de degré d de $\mathbb{R}_d[X]$ et A_d l'ensemble des polynômes de U_d simplement scindés sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que A_d est ouvert dans U_d pour la topologie induite.
2. Déterminer l'adhérence de A_d.

Exercice 19 *(SR)* On appelle parfait de $\mathbb{R}$ toute partie non vide de $\mathbb{R}$ fermée sans point isolé. Montrer qu'un parfait de $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 20 *(ENS L)* On veut montrer que $\mathbb{R}$ ne peut s'écrire comme union dénombrable de segments disjoints. On suppose par l'absurde que $\mathbb{R}$ est l'union disjointe des $[a_n, b_n]$, pour $n \in \mathbb{N}$, où $a_n \leqslant b_n$. On pose $E = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{b_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que E est fermé.
2. Montrer que E ne possède aucun point isolé.
3. Conclure.

Exercice 21 *(Ulm)** Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots X_n]$ qui s'annulent sur une partie d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 22 *(ENS)* Soit $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On dit que (u_n) converge *faiblement* si et seulement s'il existe $u \in H$ tel que, pour tout $v \in H$, $\langle u_n, v\rangle \to \langle u, v\rangle$.

1. Comparer la convergence faible et la convergence pour la norme euclidienne.
2. On pose dans la suite $H = \ell^2(\mathbb{R})$. Montrer que de toute suite bornée de H on peut extraire une sous-suite convergeant faiblement.
3. Soient (e_n) une famille orthonormée totale de H, $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = a_n e_n$.
   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que (x_n) converge pour la norme hilbertienne.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que (x_n) converge faiblement.

Exercice 23 *(ENS)* Une partie A d'un espace normé est dite séparable si elle contient une partie dense au plus dénombrable.

1. Montrer qu'un espace normé de dimension finie est séparable.
2. Montrer que, si A est une partie séparable d'un espace normé et B une partie de A, B est séparable.
3. Soient A une partie séparable d'un espace normé, $(\Omega_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de A dont la réunion est A. Montrer que l'on peut extraire de $(\Omega_i)_{i\in I}$ un recouvrement au plus dénombrable de A.
4. Étudier la réciproque de la question précédente.

Suites et fonctions

Exercice 24 *(Mines)* Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Montrer que f est surjective si et seulement si l'image de tout ouvert par f est un ouvert.

Exercice 25 *(Ulm)* Soient E et F deux espaces euclidiens. Soit $f : E \to F$ telle que :

$$\forall r \in]0,1],\ \forall x \in E,\ B\left(f(x), \frac{r}{2}\right) \subset f(B(x,r)) \subset B(f(x), 2r).$$

1. Montrer que f est continue et surjective.
2. Que peut-on dire de l'image par f d'un ouvert ? D'un fermé ?
3. Soit γ un chemin continu de $[0,1]$ dans F. Montrer qu'il existe un chemin c continu de $[0,1]$ dans E tel que $f \circ c = \gamma$.

Exercice 26 *(Lyon)* On considère E un evn, X inclus dans E, et pour x dans E, on pose

$$\Pi_X(x) = \{y \in X,\ \forall z \in X,\ \|z - y\| \leqslant \|z - x\|\}.$$

1. Pour quelle partie Y incluse dans E peut-on trouver X et x tel que $Y = \Pi_X(x)$?
2. Si $d(x, X) = 0$ (et $X \neq \{x\}$), montrer que $\Pi_X(x)$ est vide.
3. La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?
4. On suppose que E possède aussi un produit scalaire. On suppose X convexe borné. Trouver l'ensemble des x tel que $\Pi_X(x)$ est vide.

Exercice 27 *(Lyon)* Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui est L-lipschitzienne pour la norme infinie avec $L < 1$. On suppose que f admet un point fixe x^*.

1. Montrer que toute suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers x^*.
2. Soit I une partie de $[\![1, n]\!]$. On définit la fonction f_I par $(f_I(x))_j = \begin{cases} (f(x))_j & \text{si } j \in I \\ (x)_j \text{ sinon} & \end{cases}$. Montrer que f_I est 1-lipschitzienne.

3. On définit $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un suite de partie de $[\![1,n]\!]$ telle que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, il existe une infinité de $k\in\mathbb{N}$ tels que $i\in I_k$. On définit alors la suite (x_k) comme la suite définie par récurrence par $x_0\in\mathbb{R}^n$ et $x_{k+1}=f_{I_k}(x_k)$. Étudier la convergence de (x_k).

Exercice 28 *(Lyon)* Soit E un espace préhilbertien.

1. Soit $f\in\mathcal{F}(E,E)$; on pose $g : x\mapsto \dfrac{1}{2}(x-f(x))$. Montrer que f est 1-lipschitzienne si et seulement si $\forall x,y\in E$, $\langle g(x)-g(y)|x-y\rangle \geqslant \|g(x)-g(y)\|^2$,
   On considère $f\in\mathcal{F}(E,E)$ 1-lipschitzienne, $x_1\in E$. On suppose que f admet un point fixe x^*, et on pose $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+f(x_n))$.
2. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|f(x_n)-x_n\|\leqslant \dfrac{2}{\sqrt{n}}\|x_1-x^*\|$.
3. Montrer que $(\|f(x_n)-x_n\|)$ est décroissante et que $(\|x_n-x^*\|)$ est décroissante.

Topologie réelle

Exercice 29 *(X)* Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est semi-continue inférieurement (s.c.i.) si, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty,\alpha])$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, si f est continue, alors f est s.c.i.
2. Donner un exemple de f s.c.i. mais non continue.
3. Montrer que f est s.c.i. si et seulement si, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*}$, il existe un voisinage V de x dans $\mathbb{R}$ tel que, pour tout $y\in V$, $f(y)>f(x)-\varepsilon$.

Exercice 30 *(X)* On note F l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $[0,1]$, C l'ensemble des fonctions continues de F. On note aussi

$$I=\{f\in F,\ \forall a\in[0,1],\ \{x\in[0,1],\ f(x)\leqslant a\} \text{ est fermé}\} \quad \text{et}$$

$$S=\{f\in F,\ \forall a\in[0,1],\ \{x\in[0,1],\ f(x)\geqslant a\} \text{ est fermé}\}.$$

Enfin on note pour $f\in F$ et $n\in\mathbb{N}$, l'élément de F défini par :

$$\forall x\in[0,1],\ L_n(f)(x)=\inf_{y\in[0,1]} f(y)+n|x-y|.$$

1. Montrer que $C=I\cap S$.
2. Montrer que si $f\in F$, $L_n(f)$ est une suite croissante d'applications continues.
3. Soit $f\in F$. Montrer que $f\in I$ si et seulement si il existe une suite de fonctions $f_n\in C$ telles que pour tout $x\in[0,1]$, $f(x)=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$.

Exercice 31 *(X)* Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a\leqslant b$. Pour tout $x\in[a,b]$, on se donne $\varepsilon_x>0$ et on note $I_x=]x-\varepsilon_x,x+\varepsilon_x[$. Montrer que $[a,b]$ est recouvert par un nombre fini de I_x.

Topologie sur les espaces de matrices

Exercice 32 **(Mines-X)* On note $E=\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $0\leqslant p\leqslant n$. Soient $S_p=\{M\in E,\ \mathrm{rg}(M)\geqslant p\}$, $I_p=\{M\in E,\ \mathrm{rg}(M)\leqslant p\}$, et $A_p=\{M\in E,\ \mathrm{rg}(M)=p\}$.

1. Montrer que S_p est ouvert, et I_p est fermé dans E.
2. Montrer que A_p n'est ni ouvert, ni fermé mais que $\overline{A_p}=I_p$ (que retrouve-t-on dans le cas $p=n$?).
3. Donner l'intérieur et l'adhérence de chacun des ensembles ci-dessus.

Exercice 33 *(IMT)* ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

1. Montrer que $Gl_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ M \text{ nilpotente }\}$ est un fermé non-compact, d'intérieur vide.

Exercice 34 **(Centrale)* Soit $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, on pose $B_p=\dfrac{1}{p}\sum\limits_{k=0}^{p-1}A^k$.

1. Dans le cas où la suite $(A^k)_k$ converge, que peut-on dire de la limite ?
2. Dans le cas général, montrer que la suite $(B_p)_p$ admet au moins une valeur d'adhérence C. Puis montrer que $AC=C$.

3. Montrer que $C^2 = C$ puis que $\ker C = \mathrm{Im}(A - I_n)$ et $\mathrm{Im} C = \ker(A - I_n)$ (en identifiant les matrices aux endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associés).
4. Montrer que la suite $(B_p)_p$ converge.

Exercice 35 *(X)* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1. Montrer que la suite de terme général A^k tend vers 0.

Exercice 36 **(X-Mines-Centrale-ENS)* Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$. On note $\|.\|_{\mathrm{op}} : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ A & \longmapsto \sup\limits_{X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|} \end{cases}$ appelée norme d'opérateur associée à $\|.\|$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\rho(A) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

1. Montrer que pour toute matrice A $\rho(A) \leqslant \|A\|_{op}$.
2. Montrer que $\rho(A^k) = \rho(A)^k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\rho(A) \leqslant \|A^k\|_{op}^{1/k}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $\| \ \|_{op}$ est sous-multiplicative : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|AB\|_{op} \leqslant \|A\|_{op}\|B\|_{op}$.
4. Donner un exemple de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui ne soit pas une norme d'opérateur.
5. Soit $\| \ \|_{\infty,op}$ la norme d'opérateur associée à la norme infinie $\| \ \|_\infty$ sur $\mathbb{C}^n$.

   Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\|A\|_{\infty,op} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.
6. Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure. Pour $\mu > 0$ réel, on pose $Q_\mu = \mathrm{Diag}(1, \mu, \dots, \mu^{n-1})$. Calculer la limite de $\|Q_\mu T Q_\mu^{-1}\|_{\infty,op}$ quand μ tend vers $+\infty$.
7. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe une norme d'opérateur N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $N(A) \leqslant \rho(A) + \epsilon$.
8. Montrer que $\rho(A) = \lim\limits_{k \to +\infty} \|A^k\|_{op}^{1/k}$.
9. En déduire l'équivalence entre :
   — $\lim\limits_{k \to \infty} A^k = 0$
   — $\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $\lim\limits_{k \to \infty} A^k X = 0$
   — $\rho(A) < 1$.
   — il existe sur $\mathbb{C}^n$ une norme $\| \ \|$ telle que la norme d'opérateur subordonnée $\|A\|_{op}| < 1$
   — il existe M semblable à A telle que $\|M\|_{\infty,op} < 1$ avec $\|.\|_{\infty,op}$ la norme subordonnée à $\| \ .\|_\infty$.

Exercice 37 *(Mines)* Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(A_k)_{k \geqslant 0}$ et $(B_k)_{k \geqslant 0}$ deux suites d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ convergeant respectivement vers A et B.

1. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A_k et B_k sont semblables. Les matrices A et B sont-elles semblables ?
2. Que dire si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A_k et B_k sont orthogonalement semblables ?

Exercice 38 *(Mines)*

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n.$$
2. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ trigonalisables est fermé.
3. Quelle est l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 39 **(Centrale-X)*

1. Montrer que dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables est dense.
2. Montrer que dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans l'ensemble des matrices trigonalisables.
3. Quel est l'intérieur des matrices diagonalisables dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$? (* Et dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$?).

Exercice 40 *(Mines)*

1. Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que, pour $n = 2$ et $n = 3$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Que dire pour n quelconque ?

Exercice 41 **(X-ENS-Mines)* Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $S(M) = \left\{P^{-1}MP,\ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\right\}$.

1. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $T \in S(M)$ triangulaire supérieure dont tout coefficient hors-diagonal est de module inférieur à ε.

2. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $S(M)$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
3. Montrer que M est nilpotente si et seulement si la matrice nulle est adhérente à $S(M)$.
4. Caractériser les matrices A pour lesquelles $S(A)$ est borné.

Exercice 42 *(SR)* On munit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ de la norme subordonnée à la norme $\| \|_\infty$. Déterminer le plus petit $a > 0$ tel qu'il existe un sous-groupe non trivial de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ inclus dans la boule fermée $B(I_n, a)$.

Exercice 43 *(X)* Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$.

1. Montrer que pour tout $u \in \mathrm{GL}(E)$ il existe un unique polynôme $I_u \in \mathbb{C}[X]$ de degré minimal tel que $u^{-1} = I_u(u)$, et justifier que $\deg I_u < n$.
2. Étudier la continuité de $u \in \mathrm{GL}(E) \mapsto I_u \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Exercice 44 **(U)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des points de continuité de l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ qui à une matrice associe son polynôme minimal.

Topologie sur les espaces de suites et de fonctions

Exercice 45 ** (Centrale)* On considère $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \text{suite bornée}\}$ munie de la norme infinie N_∞.

1. L'ensemble G des suites nulles à partir d'un certain rang est-il un ouvert de E ? Un fermé ?
2. On note $G_0 = Vect\{e_p,\ p \in \mathbb{N}\}$. Montrer que $G = G_0$.
3. Déterminer l'adhérence de G.

Exercice 46 *(Mines)* On considère l^1 muni de la norme N_1. Soit $F = \{x \in l^1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant 0\}$. Montrer que F est un fermé d'intérieur vide.

Exercice 47 *(Mines)* Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie.

1. Soit $F = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\}$. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de F.
2. Répondre à la même question si E est muni de la norme $\|\|_1$.
3. Montrer que $A = \{f \in E,\ f(0) = 0 \text{ et } \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 1\}$ est fermé.
4. Déterminer $d(0, A)$ et montrer que celle-ci n'est pas atteinte.

Exercice 48 *(Mines)* On considère l^1 et F la sphère unité de l^1 pour la norme N_1. Dans (l^1, N_∞), F est-il ouvert ? Fermé ? Compact ? Borné ?. Et la boule unité de l^1 ?

Exercice 49 *(X)* Soit $(\epsilon_n)_n$ une suite qui tend vers 0. $K = \left\{(a_n)_n \in l^2,\ \forall n, |a_n| \leqslant \epsilon_n\right\} \subset l^2$. Montrer que K est compact si et seulement $(\epsilon_n) \in l^2$?

Exercice 50 *(U)* On munit l'espace E des suites réelles bornées de la norme $\| \|_\infty$. On note F le sous-espace vectoriel des suites réelles convergentes et G le sous-espace vectoriel des suites qui tendent vers 0.

1. Existe-t-il un isomorphisme linéaire bicontinu de $(F\| \|_\infty)$ sur $(G, \| \|_\infty)$?
2. Existe-t-il un isomorphisme linéaire isométrique de F sur G ?

Exercice 51 *(ENS)* Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tendant vers $+\infty$. On note E l'ensemble des suites dont la série est absolument convergente, et F l'ensemble des suites réelles u telles que la série des $(u_n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit absolument convergente. Pour $u \in E$, on pose $N_1(u) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$, et pour $u \in F$ on note $N_2(u) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n u_n|$.

1. Montrer que F est une partie de E dense pour N_1.
2. Montrer que la boule unité fermée de (F, N_2) est compacte dans l'espace (E, N_1).

Applications linéaires continues

Exercice 52 *(CCP)* Soit $(E, \|\|)$ un espace vectoriel normé. On note B le sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$ formé de suites bornées d'éléments de E. On munit B de la norme suivante :

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|.$$

On considère $\phi : \begin{cases} B & \to B \\ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto (x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$. Montrer que ϕ est un endormorphisme continu de E.

Exercice 53 ** (Mines)* Montrer qu'un hyperplan de E est dense ou fermé dans E.

Exercice 54 *(Ulm)* Donner un exemple de forme linéaire non continue.

Exercice 55 **(X-Mines)* Soit E un espace vectoriel normé et $\phi \in E^*$. Montrer que ϕ est continue si et seulement si $\ker \phi$ est fermée.

Exercice 56 **(Mines)* Soit E un espace vectoriel normé, dont la sphère unité est notée S, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :

(i) u est continue

(ii) $u^{-1}(S)$ est un fermé de E

(iii) l'image par u de toute suite bornée est une suite bornée ;

(iv) l'image par u de toute suite convergeant vers 0 est une suite convergeant vers 0.

Exercice 57 *(Mines)* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\| \ \|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, on pose $N(u) = \sup\left\{\dfrac{\|u(M)\|}{\|M\|},\ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\backslash\{0\}\right\}$.

Soient $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + {}^tM$, $\psi : M \mapsto M - {}^tM$. Pour $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|M\|_1 = \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{i,j}|$ et $\|M\|_2 = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |m_{i,j}|$. Calculer $N(\phi)$ et $N(\psi)$ pour ces deux normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 58 **(Mines)* Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Pour $f \in E$ on pose

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\,\d t - \int_{-1}^0 f(t)\,\d t.$$

1. Montrer que φ est une forme linéaire continue sur E et calculer $|||\varphi|||$.
2. Existe-t-il f unitaire telle que $|\varphi(f)| = |||f|||$?

Exercice 59 *(Mines)* Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $f : E \to E$ bornée sur la boule fermée unité et telle que : $\forall (x,y) \in E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$. Montrer que f est une application linéaire continue.

Exercice 60 *(Mines)* Soient $a \leqslant x_0 < \cdots < x_n \leqslant b$, $E = \mathcal{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ muni de la norme infinie, et E_n le sous-espace vectoriel constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

1. Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe un unique $P \in E_n$ tel que : $\forall i \in [\![0,n]\!],\ P(x_i) = f(x_i)$.
2. Montrer que l'application $\phi : E \to E_n$ ainsi définie est continue.
3. Montrer qu'il existe $Q \in E_n$ tel que $\|f - Q\|_\infty = \inf\big\{\|f - R\|_\infty,\ R \in E_n\big\}$.

Exercice 61 *(ENS-X)* On considère les espaces $E = l^\infty$ muni de la norme $\|.\|_\infty$, et l^1 muni de la norme $\|.\|_1$. On notera également c_0 le sous-espace vectoriel de E constitué des suites qui tendent vers 0.

Pour tout $a = (a_n)_n \in l^1$, on note $\phi_a : \begin{cases} E & \to \mathbb{C} \\ u = (u_n)_n & \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n u_n \end{cases}$.

1. Montrer que ϕ_a est bien définie, linéaire et continue sur E. Que vaut $\|\phi_a\| = \sup\limits_{x\in E\backslash\{0_E\}} \dfrac{|\phi_a(x)|}{\|x\|_\infty}$?
2. On note ψ_a la restriction de ϕ_a à c_0. Montrer que l'application $\psi : \begin{cases} l^1 & \to \mathcal{L}_c(c_0,\mathbb{C}) \\ a & \mapsto \psi_a \end{cases}$ est une isométrie bijective.

Exercice 62 *(L)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $p > 1$.

1. Montrer que la norme $x \mapsto \|x\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. On veut montrer que l'ensemble des formes linéaires continues pour cette norme est isométrique à un autre *evn*. Avez-vous une idée duquel il s'agit ? Le justifier.

Exercice 63 *(L)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $(X,Y) \mapsto \langle X,Y\rangle = \mathrm{Tr}(X^TY)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\|\cdot\|_{\mathrm{Tr}}$ la norme associée.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$L\colon \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\ M & \mapsto (X \mapsto MX) \end{cases}$$

est un morphisme d'algèbre injectif.

3. On note $\|\!|\cdot|\!\|_{\mathrm{Tr}}$ la norme triple associée à $\|\cdot\|_{\mathrm{Tr}}$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\|\!|L(M)|\!\|_{\mathrm{Tr}} \leqslant \|\!|M|\!\|_2$ (norme subordonnée à la norme 2 sur $\mathbb{R}^n$).

Exercice 64 *(X)* Soit $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}),\ \int_0^1 f = 0 \right\}$.

Pour $f \in E$, on pose $\Phi(f) : x \in [0,1] \mapsto \int_0^1 t\,f(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$.

1. Soit $f \in E$. Montrer que $\Phi(f)$ est dans E.
2. Montrer que Φ est continue pour $\|\ \|_\infty$.
3. Soit C tel que : $\forall f \in E$, $\|\Phi(f)\|_\infty \leqslant C\|f\|_\infty$. Montrer que $C \geqslant 1/4$. Déterminer la constante C optimale.

Exercice 65 *(ENS)* Si (E_1, N_1) et (E_2, N_2) sont deux espaces normés réels, une application linéaire T de E_1 dans E_2 est dite compacte si, pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ bornée de (E_1, N_1), la suite $(T(x_n))_{n\geqslant 0}$ admet une valeur d'adhérence dans (E_2, N_2). Montrer que, si $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ est compacte, elle est continue. Que dire de la réciproque ?

Exercice 66 *(X)* Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, F un sous-espace vectoriel strict de E et ϕ une forme linéaire sur F vérifiant : $\forall x \in F$, $|\phi(x)| \leqslant \|x\|$.

1. Montrer que pour tous x, z dans F et pour tout $y \in E$, $\phi(x) - \|x - y\| \leqslant \|y + z\| - \phi(z)$.
2. Montrer que l'on peut prolonger ϕ en une forme linéaire ψ sur E telle que : $\forall x \in E,\ |\psi(x)| \leqslant \|x\|$..

Exercice 67 *(PLSR)* On fixe un entier $n \geqslant 1$.

1. Déterminer les plus petites constantes C et C' telles que $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\|X\|_2 \leqslant C\,\|X\|_\infty$ et $\|X\|_\infty \leqslant C'\,\|X\|_2$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \|AX\|_2 \geqslant \|X\|_\infty$. Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{R}^n$ telle que $\|AX\|_2 \geqslant \sqrt{n}\,\|X\|_\infty$.
3. Pour deux espaces vectoriels normés E et F de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on note $\|f\| = \sup\limits_{x \in E,\ \|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$.

   Lorsque $\dim E = \dim F$, on note $d(E,F) = \inf\left\{\|f\| \times \|f^{-1}\|,\ f \in \mathcal{L}(E,F) \text{ isomorphisme}\right\}$. Déterminer $d(E,F)$ lorsque $E = \mathbb{R}^n$ est muni de $\|\ \|_2$, et $F = \mathbb{R}^n$ muni de $\|\ \|_\infty$.

Exercice 68 *(Ulm)* Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ qui vérfie que ses lignes sont unitaires, et qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout i, $\mathrm{d}(L_i, Vect_{j\neq i}(L_j)) > \epsilon$. Montrer que :

1. A est inversible
2. $\sup\limits_{\|x\|_1 = 1} \|A^{-1}x\|_2 \leqslant \dfrac{1}{\epsilon}$.

Compacité

Exercice 69 *(Mines)* Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que : $\forall x \in E, \exists y \in F, d(x,F) = \|y - x\|$.
2. On suppose que $F \neq E$. Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $d(u,F) = \|u\| = 1$.
3. En déduire que $B_f(0,1)$ est compact si et seulement si E est de dimension finie.

Exercice 70 *(Mines)* Déterminer les sous-groupes compacts de $\mathbb{C}^*$.

Exercice 71 *(Mines)*

1. Soient f une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer l'équivalence entre :
   (i) $|f(x)| \to +\infty$ lorsque $N(x) \to +\infty$;
   (ii) l'image réciproque de tout compact par f est un compact.
2. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que l'image réciproque de tout compact par f est un compact. Montrer que l'image directe de tout fermé par f est un fermé.
3. La réciproque du résultat précédent est-elle vraie ?

Exercice 72 *(X)* Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé E.

1. Si A et B sont compactes, montrer que $A + B$ est compact.
2. Que dire si A et B sont fermées ?

Exercice 73 **(Centrale-ENS)* Soit E un espace vectoriel normé.

1. Si K_1 et K_2 sont des parties compactes non vides, montrer que $d(K_1, K_2)$ est atteinte.
2. On suppose que E est un espace vectoriel normé de dimension finie. Expliquer que dans ce cas, la distance entre un compact et un fermé est atteinte.

3. Soient K un compact et F un fermé de E. Montrer (avec un contre-exemple) que la distance $d(K,F)$ n'est elle pas toujours atteinte.
4. Soient K un compact et F un fermé de E. On suppose que $K \cap F = \varnothing$. Montrer que $d(K,F) > 0$.
5. Donner l'exemple de deux fermés disjoints (par exemple dans $\mathbb{R}^2$) F_1 et F_2 tels que $d(F_1,F_2) = 0$.

Exercice 74 ** (X-Centrale)*

1. Montrer que si $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts non vides alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est un compact non vide.
2. On considère $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie. Soit $D = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partie dénombrable dense de $[0,1]$. On considère $F_n = \left\{ f \in E,\ \|f\|_\infty \leqslant 2,\ \forall k \in [\![0,n]\!],\ f(r_k) = 0, \text{ et } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \right\}$. Montrer que les F_n sont des fermés bornés convexes emboîtés non vides. Déterminer $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Exercice 75 **(Mines)* Soient $(E,\|\ \|)$ un espace vectoriel normé, K une partie compacte non vide de E.

1. Soit $(L_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de fermés non vides inclus dans K. Montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} L_n \neq \varnothing$.
2. Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction continue $g : K \to \mathbb{R}$. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 76 *(Centrale)* Soient (E,N) et (E',N') deux espaces vectoriels normés. Soit $d \in \mathbb{N}$. Pour $P(X) = p_0 + p_1X + \cdots + p_dX^d \in \mathbb{R}_d[X]$ on pose $\|P\| = \max(|p_0|,\dots,|p_d|)$.

1. Vérifier que l'application $\|\ \|$ est une norme sur $\mathbb{R}_d[X]$.
2. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E, convergeant vers $\ell \in E$. Montrer que l'ensemble $Y = \{y_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.
3. Soit $f : E \to E'$ continue telle que, pour tout compact K de E', $f^{-1}(K)$ est un compact de E. Montrer que, si F est un fermé de E, alors $f(F)$ est un fermé de E'.
4. Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$ un polynôme unitaire. Montrer que, si $x \in \mathbb{R}$ est une racine de P telle que $|x| > 1$, alors $|x| \leqslant \|P\| + 1$. En déduire que l'ensemble des polynômes unitaires et scindés de $\mathbb{R}_d[X]$ est fermé dans $\mathbb{R}_d[X]$.

Exercice 77 *(Centrale)* Soient E et F deux espaces normés réels de dimension finie, f une application continue de E dans F. On dit que f est propre si, pour tout compact K de F, $f^{-1}(K)$ est un compact de E.

1. On suppose que f est propre. Montrer que l'image par f d'un fermé de E est un fermé de F.
2. Montrer que f est propre si et seulement si $\|f(x)\| \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 78 **(Mines-Centrale)*

1. Soient C un compact non vide d'un espace normé $(E,\|\ \|)$ et $f : C \to C$ vérifiant, pour $x \neq y$, $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$. Montrer que f possède un unique point fixe, que l'on note z.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers z.
3. Que peut-on dire si on remplace l'inégalité stricte par une inégalité large ?
4. (PLSR) Soient C un compact convexe non vide d'un espace normé $(E,\|\ \|)$ et $f : C \to C$ vérifiant, pour tous x,y, $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|$. Montrer que f possède un point fixe.

Exercice 79 **(X)* Soient u un endomorphisme continu d'un espace vectoriel normé E et K un compact, convexe, non vide de E, stable par u. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k$.

1. Montrer que $v_n(K) \subset K$.
2. Majorer indépendamment de $x \in K$, $\|u(v_n(x)) - v_n(x)\|$.
3. En déduire que u admet un point fixe dans K.

Exercice 80 *(ENS)* On se donne un espace euclidien E dont la norme est notée N, et G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(E)$. Pour $x \in E$, on pose $\|x\| = \sup\limits_{g\in G} N(g(x))$.

1. Montrer que $\|\ \|$ est une norme sur E.
2. Montrer que $\|g(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$ et tout $g \in G$.
3. Montrer que $\|\ \|$ est strictement convexe, i.e. que l'inégalité triangulaire n'est une égalité que pour un couple de vecteurs positivement colinéaires.

4. Soient K un compact convexe non vide de E, $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f(K) \subset K$. Montrer que f a un point fixe dans K. *Ind.* Fixer $a \in K$ et considérer, si $k \in \mathbb{N}$, $x_k = \dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{k} f^i(a)$.
5. On suppose à présent que K est stable par tous les éléments de G. Montrer que les éléments de G ont un point fixe commun dans K. On admettra la propriété de Borel-Lebesgue : si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés de K dont toute intersection finie est non vide, alors $\cap_{i\in I} F_i$ est non vide.

Exercice 81 *(Mines)* Soient $n \geqslant 2$, K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$. Une partie $A \subset K$ est ε-séparée si, pour tous x, $y \in A$ tel que $\|x - y\| < \varepsilon$, on a $x = y$.

1. Montrer qu'il existe un entier $M(\varepsilon)$ tel que toute partie ε-séparée de K est de cardinal inférieur à $M(\varepsilon)$ et il existe une partie ε-séparée de K de cardinal $M(\varepsilon)$.
2. Soit $f : K \to K$. On suppose que, pour tous x, $y \in K$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. Montrer que f est surjective.

Exercice 82 *(Mines-Centrale)* Soit K un compact d'un espace vectoriel normé. Soit f une application continue de K dans K telle que pour tout $(x, y) \in K^2$, $\|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|$. Montrer que f est un homéomorphisme. Puis montrer que f est une isométrie.

Exercice 83 *(X)* Soit F (resp. K) une partie fermée (resp. compacte) d'un espace vectoriel E de dimension finie. Si A est une partie de E, on appelle enveloppe convexe de A le plus petit convexe contenant A.

1. L'enveloppe convexe de F est-elle nécessairement fermée ?
2. L'enveloppe convexe de K est-elle nécessairement compacte ?

Exercice 84 *(X)* Soient $\rho > 1$ et $A_\rho = \left\{ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\epsilon_n}{\rho^n},\ (\epsilon_n)_{n\geqslant 1} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^*} \right\}$. Montrer que A_ρ est un compact de $\mathbb{R}$.

Exercice 85 **(PLSR-X)* Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $(x_1, \ldots, x_m)$ une famille de vecteurs de E.

1. Montrer que toute combinaison linéaire à coefficients positifs des x_i peut s'écrire comme combinaison linéaire à coefficients positifs d'une sous-famille libre des x_i.
2. Montrer que toute combinaison linéaire convexe, c'est-à-dire à coefficients positifs et de somme égale à 1, des x_i peut s'écrire comme combinaison linéaire convexe de $n + 1$ vecteurs de E (*Théorème de Carathéoodory.*)
3. Montrer que l'ensemble F des combinaisons linéaires à coefficients positifs des x_i est fermé.
4. Soit A une partie compacte de E. Montrer que l'enveloppe convexe de A est compacte.
5. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^n)$. Montrer qu'il existe des nombres $t_1 \ldots, t_{n+1}$ dans $[0, 1]$, des nombres réels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1$ et $\displaystyle\int_0^1 f = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(t_i)$.
6. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ continue. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$ appartient au segment formé par deux points de l'image de f.

Espaces de fonctions sur K compact

Exercice 86 **(X-ENS)* On considère A l'anneau $C([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $c \in [0, 1]$, on note $I_c = \{f \in A\ ;\ f(c) = 0\}$.

1. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de $[0, 1]$ telle que, pour toute partie finie J de I, on ait $\cap_{i\in J} F_i \neq \varnothing$. Montrer que $\cap_{i\in I} F_i \neq \varnothing$.
2. Soit I un idéal de l'anneau $\mathcal{C}^0\big([a, b], \mathbb{R}\big)$, distinct de $\mathcal{C}^0\big([a, b], \mathbb{R}\big)$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que, pour toute $f \in I$, $f(x_0) = 0$, soit $I \subset I_{x_0}$.
3. Montrer que I_c est un idéal de A et que les seuls idéaux de A contenant I_c sont A et I_c.
4. Montrer que I_c n'est pas de la forme fA pour un f de A.
5. Montrer que I_c n'est pas de la forme $f_1 A + \cdots + f_m A$ où $m \in \mathbb{N}^*$ et où les f_i sont des éléments de A.

Exercice 87 *(ENS)* Soit K une partie d'un espace vectoriel normé E. On suppose que pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E telle que $K \subset \displaystyle\bigcup_{i\in I} U_i$, il existe une partie finie J de I telle que $K \subset \displaystyle\bigcup_{j\in J} U_j$. Déterminer les morphismes d'anneaux continus de $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$.

Exercice 88 *(X)* Soient C l'algèbre des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, A une sous-algèbre de C, $\overline{A}$ l'adhérence de A pour la norme $\| \ \|_\infty$.

1. Montrer que, si f et g sont dans $\overline{A}$, il en est de même de $\min(f,g)$. *On admettra que si $f \in A$, alors $|f| \in \overline{A}$, voir chapitre suite de fonctions.*
2. Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \dots, f_m$ dans $\overline{A}$. Montrer que $\min(f_1, \dots, f_m)$ et $\max(f_1, \dots, f_m)$ sont dans $\overline{A}$.
   On suppose désormais que A sépare les points : pour a et b dans $[0,1]$ distincts, il existe $f \in A$ telle que $f(a) \neq f(b)$.
3. Soient a et b deux éléments distincts de $[0,1]$, α et β deux nombres réels. Montrer qu'il existe $f \in A$ tel que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$.
   On admet que, de tout recouvrement ouvert de $[0,1]$, on peut extraire un recouvrement fini.
4. Soit $f \in C$. Montrer que, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ et $x \in [0,1]$, il existe $g_x \in \overline{A}$ telle que $g_x(x) = f(x)$ et $g_x \leqslant f + \varepsilon$.
5. Montrer que $\overline{A} = C$.

Espaces complets

Exercice 89 *(X-Centrale)* Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de E est une suite de Cauchy si : $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n, m \geqslant N$, $\|x_n - x_m\| \leqslant \epsilon$. On dit que $(E, \| \ \|)$ est un espace de Banach si toute suite de Cauchy est convergente. On note ℓ^1 l'ensemble des suites $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum |x_n|$ converge. Pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$, soit $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$.

1. Montrer que $(\ell^1, \| \ \|_1)$ est un espace de Banach.
2. On note ℓ^∞ l'espace de suites bornées $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$, soit $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$. Si ϕ est une forme linéaire continue sur ℓ^1, on pose
   $\|\phi\|_{\text{op}} = \sup \left\{ |\phi(x)| \ ; \ x \in \ell^1, \ \|x\|_\infty = 1 \right\}$. Pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$, soit θ_x l'application de ℓ^1 dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1, \ \theta_x(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$. Montrer que $x \mapsto \theta_x$ est une isométrie linéaire et bijective de ℓ^∞ sur l'espace des formes linéaires continues sur ℓ^1, ce dernier espace étant muni de la norme $\| \ \|_{\text{op}}$.

Exercice 90 *(X)* Soit (E, N) un espace vectoriel normé. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de E est une suite de Cauchy si : $\forall \epsilon > 0$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $\forall n, m \geqslant p$, $N(x_n - x_m) \leqslant \epsilon$. On dit que (E, N) est un espace de Banach si toute suite de Cauchy est convergente. On suppose dans la suite que (E, N) un espace de Banach.

1. Soit $(U_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'ouverts denses de E. Montrer que $\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n$ est dense dans E.
2. Soient (F, N') un espace normé réel, $(T_i)_{i \in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. On suppose que, pour tout $x \in E$, la famille $(T_i(x))_{i \in I}$ est bornée. Montrer que $(\|T_i\|_{\text{op}})_{i \in I}$ est bornée, où $\|T_i\|_{\text{op}} = \sup \left\{ N'(T_i(x)) \ ; \ x \in E, \ N(x) = 1 \right\}$.
   Ind. Considérer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \left\{ x \in E \ ; \ \sup_{i \in I} N'(T_i(x)) > n \right\}$.

Exercice 91 *(X)* On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme. On admet que, dans cet espace normé, toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense dans E. En déduire que l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est dense dans E.

Exercice 92 *(X)* Soient A une $\mathbb{C}$-alèbre et $\|.\|$ une norme sur A. On suppose, sauf pour la question *b)* que : $\forall (x, y) \in A^2$, $\|xy\| \leqslant \|x\| \|y\|$. Pour $a \in A$, on définit $S(a) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \ a - \lambda 1_A \notin A^*\}$, où A^* désigne le groupe des inversibles de A.

1. On se place dans le cas $A = \mathbb{R}^X$ avec X un ensemble fini non vide. Soir $f \in A$. Montrer que $S(f)$ est fini et l'expliciter.
2. On considère ici A une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\|M\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|$. Soit $M \in A$. Montrer que $S(M)$ est fini.
3. On suppose A de dimension finie. Montrer que $S(a)$ est compact pour tout $a \in A$.
4. On suppose que dans A toute série absolument convergente est convergente. Montrer que $S(a)$ est compact pour tout $a \in A$.
5. On revient au cas où A est de dimension finie. Montrer que tout morphisme d'algèbres de A dans $\mathbb{C}$ est 1-lipschitzien.

Connexité par arcs

Exercice 93 Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie $n \geqslant 2$. Si H est un hyperplan $E \backslash H$ est-il connexe par arcs ? Si F est un sous-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à $n-2$, $E \backslash F$ est-il connexe par arcs ?

Exercice 94 *(Ulm)* Soit E un espace vectoriel réel normé, et soit H un hyperplan de E. Montrer que $E\backslash H$ est connexe par arcs si et seulement si H n'est pas fermé.

Exercice 95 **(ENS-Mines)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Est-ce que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs ?
2. Et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$? Déterminer ses composantes connexes par arcs.

Exercice 96 Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables est connexe par arcs.

Exercice 97 *(Mines)* Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente est connexe par arcs.

Exercice 98 *(Mines)* Soient C une partie convexe d'un espace normé réel E, D une partie de E telle que $C \subset D \subset \overline{C}$. Montrer que D est connexe par arcs.

Exercice 99 *(Mines)* Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; en déterminer les composantes connexes par arcs.

Exercice 100 *(X)* Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que la classe de similitude de M est connexe par arcs si et seulement si M est diagonalisable.

Exercice 101 **(X-Mines)* Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{S}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ A^2 = I_n\}$. Déterminer les composantes connexes par arcs et les points isolés de $\mathcal{S}_n$.

Exercice 102 *(ENS)* On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite bistochastique lorsque tous ses coefficients sont positifs ou nuls et que la somme de ses coefficients sur une ligne ou une colonne quelconque vaut 1. On note $D_n(\mathbb{R})$ l'ensemble formé par ces matrices. Montrer que $D_n(\mathbb{R})$ est compact et connexe par arcs.

Exercice 103 *(X)* On munit $\mathbb{R}^d$ d'une norme $\|.\|$ et on pose pour $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $|||M||| = \sum\limits_{\|x\|=1} \|Mx\|$.

1. Montrer que $|||.|||$ est une norme sous-multiplicative.
2. Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum |u_n - 1|$ converge. Montrer que $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
3. Soit $(M_n) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |||M_n - I_d|||$ converge et σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = M_{\sigma(0)} \dots M_{\sigma(n)}$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge vers une limite u_σ.
4. On pose $P = \{u_\sigma,\ \sigma \text{ bijection de } \mathbb{N} \text{ dans } \mathbb{N}\}$. Est-il fermé dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$?
5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Existe-il $(M_n)_n \in (\mathcal{M}_d(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ telle que P possède exactement k composantes connexes (infinies) ?

Exercice 104 *(U)* Soient $(K_n)_n$ une suite décroissante de compacts connexes par arcs de $\mathbb{R}^d$. Est-ce que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est nécessairement connexe par arcs ?