MP*2 LLG
2024/2025

# Programme de colles - Semaine 8 - du 25/11 au 29/11

**Topologie des espaces vectoriels normés :** début du chapitre.

*Exercices sur les normes et comparaisons de normes :* révisions de la semaine dernière.

*Intérieur, adhérience :* Point intérieur, point adhérent. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie. Définitions et caractérisations. Adhérence d'une boule ouverte, intérieur d'une boule fermée. Parties denses dans $E$, dans $X$.

*Topologie induite :* Si $X$ est une partie d'un espace normé, boules, ouverts et fermés relatifs de $X$. Voisinage relatif. Par définition, une partie $U$ de $X$ est un ouvert relatif si elle est voisinage relatif de chacun de ses points. Caractérisation comme intersection avec un ouvert de $E$. Définition des fermés relatifs comme complémentaire dans $X$ des ouverts relatifs. Caractérisation séquentielle, caractérisation comme intersection avec $X$ de fermés de $E$.

*Étude locale d'une application, continuité :* Limite en un point adhérent à une partie $A$. Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée. Caractérisation séquentielle. Limite d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés. Extensions de la définition de limite (avec la définition en termes de voisinage : limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque $A$ est une partie de $\mathbb{R}$, limite infinie en $a$ adhérent à $A$ pour une fonction réelle).

Continuité en un point. Caractérisation séquentielle. Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues.

Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé, par une application continue. Deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.

Applications uniformément continues, applications lipschitziennes. Exemple : l'application $x \mapsto d(x, A)$ où $A$ est une partie de $E$.

*Applications linéaires continues :* Pour qu'une application linéaire $u$ de $E$ dans $F$ soit continue, il faut et il suffit qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leqslant C\|x\|$. Notation $\mathcal{L}_c(E, F)$. Norme subordonnée (ou norme d'opérateur) d'une application linéaire continue (de nouveau au programme). Notations $|||u|||$, $\|u\|_{\mathrm{op}}$. La norme d'opérateur est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$. Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur. Adaptation aux matrices.

Si $E$ est un espace vectoriel de dimension finie (muni d'une norme $N_{\infty}, e$), toute application linéaire de $E$ vers $F$ est continue. Exemple des applications polynomiales en les coordonnées (*ex :* $Gl_n(\mathbb{K})$ est ouvert et dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Critère de continuité des applications multilinéaires.