Dans tout le problème, $(E, \|.\|)$ désigne un espace vectoriel normé réel et E' l'ensemble des formes linéaires continues f de E dans $\mathbb{R}$ muni de la norme :

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x\in E;\|x\|\leqslant 1} |f(x)|.$$

On dit qu'une partie non vide C de E est convexe si :

$$\forall(x,y)\in C^2,\ \forall t\in[0,1],\ tx+(1-t)y\in C.$$

Si U est une partie de E alors $\mathring{U}$ et $\overline{U}$ désignent respectivement l'intérieur et l'adhérence de U.

I. Théorème d'Ekeland :

Dans cette partie, E est de dimension finie et A désigne une partie fermée non vide de E. Soient $f\ : A\to\mathbb{R}$ une application continue et minorée et ε un réel strictement positif fixé.

Pour $B\subset E$, on appelle diamètre de B, $\mathbf{diam}(B) = \sup_{(x,y)\in B^2} \|x-y\| \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

(1) *Théorème des fermés emboîtés :* soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides de E dont la suite des diamètres $(\mathbf{diam}(F_n))_n$ tend vers 0. Montrer que l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton $\{x_0\}$.

(2) Montrer qu'on peut construire une suite $(K_n)_{n\geqslant 0}$ de parties de E et une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de E telles que $K_0 = A$ et pour tout $n\geqslant 0$,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\in K_n,\\ f(x_{n+1}) &\leqslant \inf_{K_n} f + \frac{1}{2^{n+1}} \text{ et,}\\ K_{n+1} &= \{x\in A \mid f(x)\leqslant f(x_{n+1}) - \varepsilon\|x-x_{n+1}\|\}. \end{aligned}$$

(3) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, K_n est une partie fermée et que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(4) Montrer que pour tous $n\geqslant 1$ et $x\in K_n$, $\|x-x_n\|\leqslant \dfrac{1}{2^n\varepsilon}$.

(5) Montrer que la suite (x_n) converge vers un point $x_0\in A$ vérifiant : $\bigcap_{n\geqslant 0} K_n = \{x_0\}$.

(6) Montrer que pour tout $x\in A$,

$$f(x)\geqslant f(x_0) - \varepsilon\|x-x_0\|.$$

II. Jauge et autres propriétés d'un convexe :

(1) Dans cette question, C désigne un convexe ouvert inclus dans E contenant 0. Pour tout $x\in E$, on pose :

$$\rho(x) = \inf\left\{\alpha>0, \frac{1}{\alpha}x\in C\right\}.$$

a. Montrer que la définition ci-dessus a un sens et qu'il existe $M>0$ tel que pour tout $x\in E$, $0\leqslant\rho(x)\leqslant M\|x\|$.

b. Montrer que $C = \{x\in E,\ \rho(x)<1\}$.

c. Montrer que pour tout $\lambda>0$ et tout $x\in E$,

$$\rho(\lambda x) = \lambda\rho(x).$$

d. Montrer que pour tous x et $y\in E$,

$$\rho(x+y)\leqslant\rho(x)+\rho(y).$$

(2) Soit K inclus dans E un convexe d'intérieur non vide.

a. Montrer que $\mathring{K}$ est convexe.

b. Montrer que si K est fermé alors $\overline{\mathring{K}} = K$.

(3) Soit C une partie convexe de E, symétrique, fermée, bornée, d'intérieur non vide. Montrer que la fonction ρ définie comme à la question II1 définit une norme sur E, équivalente à la norme initiale. Quelle est la boule unité fermée pour cette norme ?

III. Prolongement des formes linéaires :

Dans cette partie, F désigne un espace vectoriel normé réel.

Soient $\rho\ : F\to\mathbb{R}_+$ une application vérifiant :

$$\forall x\in F,\ \forall\lambda>0,\ \rho(\lambda x) = \lambda\rho(x) \tag{1}$$
$$\forall x,y\in F,\ \rho(x+y)\leqslant\rho(x)+\rho(y), \tag{2}$$

On considère G un sous espace vectoriel strict de F (i.e. $G\neq F$) et $g\ : G\to\mathbb{R}$ une forme linéaire sur G telle que pour tout $x\in G$, $g(x)\leqslant\rho(x)$. On fixe $z\in F\setminus G$ et on note $H = G\oplus\mathbb{R}z$ la somme directe de G et de la droite vectorielle engendrée par z.

(1) Montrer que pour tous $y,y'\in G$, $\rho(y+z)-g(y)\geqslant g(y')-\rho(y'-z)$.

(2) Montrer qu'il existe une application linéaire $h : H \to \mathbb{R}$ prolongeant g (i.e. pour tout $y \in G$, $h(y) = g(y)$) et vérifiant : pour tout $x \in H$, $h(x) \leqslant \rho(x)$. *On pourra considérer* $\alpha \in \left[\sup_{y\in G} g(y) - \rho(y-z), \inf_{y\in G} \rho(y+z) - g(y)\right]$.

(3) Dans le cas où F est de dimension finie, en déduire le théorème de prolongement de Hahn-Banach :

Théorème 1 *Pour toute forme linéaire g définie sur un sous espace vectoriel G de F et vérifiant que pour tout $x \in G$, $g(x) \leqslant \rho(x)$, il existe une forme linéaire $f : F \to \mathbb{R}$ prolongeant g et vérifiant : pour tout $x \in F$, $f(x) \leqslant \rho(x)$.*

IV. **Théorème de séparation des convexes :** Dans cette partie, F désigne un espace vectoriel normé réel de dimension finie. Soient A et B deux convexes non vides et disjoints inclus dans F. On suppose que A est ouvert. On note D l'ensemble $A - B = \{d \in F, \ \exists a \in A, b \in B, \ d = a - b\}$.

(1) Vérifier que D est un convexe ouvert et $0 \notin D$.

(2) Soit $x_0 \in D$ fixé. On note $C = D - \{x_0\}$. L'ensemble C est donc un convexe ouvert contenant 0 et on peut poser comme dans la partie II)

$$\rho(x) = \inf\left\{\alpha > 0 \mid \frac{1}{\alpha}x \in C\right\}.$$

On note $G = \mathbb{R}x_0$ la droite vectorielle engendrée par x_0 et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(tx_0) = -t$. Montrer que pour tout $x \in G$, $g(x) \leqslant \rho(x)$.

(3) En déduire qu'il existe une forme linéaire f continue sur F, non nulle et telle que :

$$\sup_{x\in A} f(x) \leqslant \inf_{y\in B} f(y).$$

On dit que la forme linéaire f sépare A et B.

V. **Une autre application de la jauge d'un convexe : théorème de Schauder**

On souhaite démontrer dans cette partie le théorème :

Théorème 2 (Théorème de Schauder) *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, C une partie de E non vide, symétrique, convexe, fermée et bornée. Soit T une application continue de C dans C telle que $T(C)$ est une partie de E dont l'adhérence est compacte. Alors il existe $e \in C$ tel que $T(e) = e$.*

On considère donc E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension N et C un sous-ensemble de E supposé symétrique, convexe, fermé, bornée et contenant au moins deux éléments.

(1) Soit $N \in \mathbb{N}^*$, F un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension N, et $\mathcal{H}$ un sous-ensemble de F supposé symétrique, convexe, fermé, bornée et contenant au moins deux éléments.

a. Montrer que le sous-espace vectoriel G de F engendré par les éléments de $\mathcal{H}$ est de dimension au moins 1 et admet une base formée d'éléments de $\mathcal{H}$. Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-ensemble de G symétrique, convexe, fermé, bornée, tel que 0 appartient à l'intérieur de $\mathcal{H}$ ($\mathcal{H}$ étant considéré comme partie de G).

b. On note $\overline{B}_{\mathbb{R}^p}(0,1)$ la boule unité de $\mathbb{R}^p$ muni de la norme euclidienne usuelle. En utilisant, comme à la question II3 une application ρ de G dans $\mathbb{R}_+$ définie par la formule :

$$\forall a \in G, \ \rho(a) = \inf\left\{\eta \in \mathbb{R}_+^*, \ \frac{1}{\eta}a \in \mathcal{H}\right\},$$

montrer qu'il existe $p \in [\![1, N]\!]$ et une bijection continue de $\mathcal{H}$ vers dans $\overline{B}_{\mathbb{R}^p}(0,1)$ dont la réciproque est également continue.

(2) Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, $\|.\|_E$ sa norme, et C une partie non vide, symétrique, convexe, fermée et bornée de E. Soit T une application continue de C dans C telle que l'adhérence de $T(C)$ est une partie compacte de E.

a. Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}^*$ et $e_1^\epsilon, \ldots, e_{N_\epsilon}^\epsilon \in C$ tels que $T(C) \subset \bigcup_{i=1}^{N_\epsilon} \overline{B}_{E,\|.\|_E}\left(e_i^\epsilon, \frac{\epsilon}{2}\right)$.

b. On définit pour $i \in [\![1, N_\epsilon]\!]$, l'application $\pi_{i,\epsilon}$ de C dans $\mathbb{R}$ par

$$\pi_{i,\epsilon}(e) = \max\left(0, \epsilon - \|T(e) - e_i^\epsilon\|_E\right).$$

La formule

$$T_\epsilon(e) = \left(\sum_{i=1}^{N_\epsilon} \pi_{i,\epsilon}(e)\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N_\epsilon} \pi_{i,\epsilon}(e) e_i^\epsilon\right)$$

définit-elle une application continue de C dans E (pour $\|.\|_E$) ?
Donner une majoration explicite de $\sup_{e\in C} \|T_\epsilon(e) - T(e)\|_E$ en fonction de ϵ.

c. On admet à cette question le théorème de Brouwer :

Théorème 3 (Théorème de Brouwer) *Soit $P \in \mathbb{N}^*$ et ϕ une application continue de $\overline{B}_{\mathbb{R}^p}(0,1)$ dans $\overline{B}_{\mathbb{R}^p}(0,1)$. Alors il existe $x \in \overline{B}_{\mathbb{R}^p}(0,1)$ tel que $\phi(x) = x$.*

On pose $\mathcal{H}_\epsilon = C \cap \left(\mathbb{R}e_1^\epsilon + \ldots + \mathbb{R}e_{N_\epsilon}^\epsilon\right)$. Montrer que $T_\epsilon(\mathcal{H}_\epsilon) \subset \mathcal{H}_\epsilon$. Montrer qu'il existe e_ϵ dans $\mathcal{H}_\epsilon$ tel que $T_\epsilon(e_\epsilon) = e_\epsilon$.

d. Montrer le théorème de Schauder.