MP*2 LLG
2024/2025

Feuille d'exercices : Interversions et intégrales - Intégrale à paramètres

Interversions de limites

Exercice 1 *(Mines-divers)* Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de :

1. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t^n}\ \mathrm{d}t$,
2. $\displaystyle\int_0^1 f(t^n)\ \mathrm{d}t$, avec $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$,
3. $\displaystyle n\int_0^1 \ln(1+t^n)\ \mathrm{d}t$,
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n \ln x}{1+x}\ \mathrm{d}x$.
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan(nx)\mathrm{e}^{-x^n}\ \mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\ \mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} nf(x)\mathrm{e}^{-nx}\ \mathrm{d}x$, avec $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ bornée.

Exercice 2 *(IMT)* On pose $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\ \mathrm{d}x$. Montrer que $J = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(1+k)^2}$.

Exercice 3 *(CCINP)* Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^\infty n\mathrm{e}^{-x^n}\ \mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y} dy$.

Exercice 4 *(Centrale)* On pose pour $n \in \mathbb{N}$ $f_n : x \mapsto n^2 x\mathrm{e}^{-nx}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_n$ sur $[0,1]$.
2. Soit g une fonction continue par morceaux sur $[0,1]$. Étudier la limite de $\displaystyle\int_0^1 g(t)f_n(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice 5 *(IMT)*

1. La fonction $f(t) = \dfrac{\ln^2 t}{1+t^2}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?
2. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = 2\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = 2\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Exercice 6 *(X)* Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$.

Exercice 7 *(ENTPE-EIVP)* Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-x}}\ \mathrm{d}x$.

Exercice 8 *(Mines -ENSEA-ENSIIE)* Montrer, pour $x > 1$: $\zeta(x)\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}\ \mathrm{d}t$.

Exercice 9 *(Mines)* Montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1)\ \mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$.

Exercice 10 *(Mines/CCINP)* Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^1 x^x\ \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

Exercice 11 *(Mines)* Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(\tanh(x))\mathrm{d}x = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Exercice 12 *(Mines)* Soient $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{1+t}}\ \mathrm{d}t$ et $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. Justifier l'existence de I et S, puis exprimer I en fonction de S.

Exercice 13 *(Mines)*

1. Soient a et b dans $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$. w
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 14 *(Mines)*

1. Ensemble de définition et limites aux bornes de $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$.
2. Montrer que $F(x) = 1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2x^2-1}$.
3. On note l la limite en $+\infty$ de F ; donner un équivalent de $l - F(x)$ en $+\infty$.

Exercice 15 *(Mines)* Soit $x > 0$. Développer $S(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1-e^{xt}}\,\mathrm{d}t$ en série de fonctions rationnelles.

En déduire un équivalent de S en 0^+.

Exercice 16 *(Mines)* Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+|x|} f(x-n)\,\mathrm{d}x$. Étudier la convergence de $(I_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 17 *(Mines)* Pour $n \geqslant 2$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{1+1/n} \sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x$. Trouver un équivalent de I_n.

Exercice 18 *(Mines)* Pour $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$.

1. Montrer que $I_n(\alpha)$ est bien définie.
2. Déterminer une relation de récurrence entre $I_{n+1}(\alpha)$ et $I_n(\alpha)$; en déduire une expression de $I_n(\alpha)$.
3. Montre que la suite $(I_n(\alpha))$ converge et trouver sa limite.
4. Montrer qu'il existe $K(\alpha) > 0$ tel que $I_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K(\alpha)}{n^{1/\alpha}}$.

Exercice 19 *(Mines)*

1. Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{x^2\ln(x)}{x-1}$. Montrer que f peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On notera encore f le prolongement ainsi obtenu.
2. Montrer que la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$ converge vers 0. Trouver un équivalent de I_n.
3. Montrer que $n\displaystyle\int_0^1 x^n f(x^n)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 20 *(X)* Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2} \mathrm{d}x$, puis $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{n} \left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^2} \mathrm{d}x$.

Exercice 21 *(Lyon)* Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que si $\displaystyle\int_0^1 |f_n|$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 |f|$ quand n tend vers $+\infty$ alors $\displaystyle\int_0^1 |f_n - f|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
2. Montrer que si $\displaystyle\int_0^1 f_n^2$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 f^2$ quand n tend vers $+\infty$ alors $\displaystyle\int_0^1 (f_n - f)^2$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 22 *(Lyon)* Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{U}$.

1. Montrer que le nombre de racines de P de module strictement inférieur à 1 comptées avec multiplicité n'est autre que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}\,P'(e^{it})}{P(e^{it})}\,\mathrm{d}t$.
2. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{U}$ et tel que $\forall z \in \mathbb{U},\ |P(z) - Q(z)| < |Q(z)|$. Montrer que P et Q ont même nombre de racines de module strictement inférieurs à 1 comptées avec multiplicité.

Exercice 23 *(X)** Si $P \in \mathbb{C}[X]\backslash\{0\}$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $N_r(P)$ le nombre de racines de P de module au plus r comptées avec multiplicités. On admet dans les deux premières questions le résultat suivant : si P et Q sont dans $\mathbb{C}[X]\backslash\{0\}$ et $\mathbb{C}[X]$ respectivement, si $r \in \mathbb{R}^{+*}$ est tel que, pour tout $x \in \mathbb{C}$ de module r, $|Q(z)| < |P(z)|$, alors $N_r(P+Q) = N_r(P)$.

1. Déduire de l'énoncé admis le théorème de d'Alembert-Gauss.
2. Soient $r \in \mathbb{R}^{+*}$, $P \in \mathbb{C}[X]\backslash\{0\}$ ne s'annulant par sur le cercle de centre 0 et de rayon r. Montrer que $N_r(P) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{P'}{P}(re^{it})re^{it}\,\mathrm{d}t$, sans utiliser le théorème de d'Alembert-Gauss.
3. Déduire de la question précédente le résultat admis en début d'énoncé.
4. Pour toute fraction rationnelle $f \in \mathbb{C}(X)$ et tout réel tel que f n'ait ni zéro ni pôle de module r on pose $N_r(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'(re^{it})}{f(re^{it})}re^{it}\,\mathrm{d}t$. Prouver que, lorsque $N_r(f)$ est bien défini, il est égal au nombre de zéros de f dans le disque $D_0(r)$ diminué du nombre de pôles de f dans le disque $D_0(r)$ (les deux étant comptés avec multiplicité).

Exercice 24 *(X)* On pose $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}\cdot$ Pour $y \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g_y : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{y}g(x/y)$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue, nulle en dehors d'un segment.

1. Montrer que, pour tout réel x, la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,g_y(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers $f(x)$ en 0^+.
2. Montrer plus précisément que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que $\left|\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,g_y(t)\,\mathrm{d}t - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in]0, \delta]$.

Exercice 25 *(ULCR)* On pose $\Lambda \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $\Lambda(p^k) = \ln(p)$ pour tout nombre premier p et $k \in \mathbb{N}^*$ et 0 sinon. On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln(n)$.
2. Montrer que pour tout $s > 1$, $\left(\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n^s}$.
3. Montrer que pour tout $s > 1$, $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^s} = \frac{1}{s-1} + O_{s\to1^+}(1)$.
4. Montrer que pour tout $s > 1$, $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^s} = \ln\left(\frac{1}{s-1}\right) + O_{s\to1^+}(1)$. Qu'en déduire ?

Intégrales à paramètres

Exercice 26 *(Mines)* Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$. Étudier F puis calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 27 *(X-Mines)*

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$ pour tout réel x.
2. On pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que
$$\forall x > 0, \qquad F''(x) = F(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$
3. Donner une expression simplifiée de F.

Exercice 28 *(X)*

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ converge.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$.

Exercice 29 *(Mines)* On fixe $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at^2} \cos(2tx)\ \mathrm{d}t$. Trouver une équation différentielle vérifiée par F et déterminer F.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at^2} \sin(2tx)\ \mathrm{d}t$. Montrer que $G(x) = \dfrac{1}{a}\ e^{-\frac{x^2}{a}} \displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{a}}\ \mathrm{d}t$.
3. Trouver la limite de $G(x)$ puis celle de $xG(x)$ en $+\infty$.

Exercice 30 *(Mines)*

1. Domaine de définition de $f \colon x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t+x}\mathrm{d}t$.
2. Justifier la dérivabilité de f et exprimer $f'(x)$ (sans intégrale).
3. On pose pour $x > 0$, $g(x) = f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Calculer g.

Exercice 31 *(Mines)* Soit $g : x \in]-1, +\infty[\mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t}\ \mathrm{d}t$.

1. Justifier la définition de g.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer g'. Puis calculer g.

Exercice 32 *(ENSEA-ENSIIE)*

1. Montrer que $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-itx}\mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Établir une équation différentielle vérifiée par F puis exprimer F simplement.

Exercice 33 *(SR)* Soit $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xu^2}}{1+u^2}\ \mathrm{d}u$.

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Quelle est la limite de F en $+\infty$?
4. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\ \mathrm{d}u$.

Exercice 34 *(Mines)* On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\ \mathrm{d}t$ converge.

   On pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}\ \mathrm{d}t$.
2. Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ix^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+i}$.
4. En déduire la valeur de I.

Exercice 35 *(SR)*

1. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{x^4+1}\ \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$ et calculer la valeur commune.

   On pose pour $t \in \mathbb{R}^+$, $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x^2+i)t^2}}{x^2+i}\ \mathrm{d}x$.
2. Montrer que F est continue. Étudier la limite de F en $+\infty$.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Calculer $F'(t)$ pour $t > 0$.
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}\ \mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 36 *(Mines)* On pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}}\ \text{ṭ}.$

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par F.
4. En déduire F.

Exercice 37 *(Mines)* Domaine de définition, continuité et équivalents aux bornes de $f\ : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^x}}$.

Exercice 38 *(Mines)* Pour $x > 0$, on pose $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}\mathrm{d}t$.

1. Justifier que I est bien définie.
2. Trouver la limite de $I(x)$ quand x tend vers 0_+.
3. Trouver un équivalent quand x tend vers 0_+.

Exercice 39 *(X)* On étudie la fonction $f\colon x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$.

1. Trouver un équivalent de f en $+\infty$.
2. Trouver un développement asymptotique à l'ordre 3 de f.

Exercice 40 *(Mines)* Limite et équivalent simple en 0^+ de $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 41 *(X)* Soit $I : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{t+x}\,\mathrm{d}t$. Trouver un équivalent de $I(x)$ quand x tend vers 0+.

Exercice 42 *(Mines)* Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}-1}{t}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\forall u \in \mathbb{R},\ \left|e^{iu}-1\right| \leqslant |u|$.
2. Montrer que f est dérivable et en déduire une expression de f.

Exercice 43 *(Mines)* Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 e^{xu\ln(u)}\ \mathrm{d}u$.

1. Domaine de définition de f ?
2. Soit g une fonction continue par morceaux et bornée sur $\mathbb{R}$, continue en 0. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,g(u)\,e^{-xu}\ \mathrm{d}u$ tend vers $g(0)$ quand $x \to +\infty$.
   Que peut-on dire si g est supposée intégrable au lieu de bornée ?
3. Déterminer la limite de $xf(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 44 *(Mines-X)* Montrer que pour tout réel x, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \pi e^{-|x|}$.

Exercice 45 *(X)* Soit $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{K}_c$) l'espace des fonctions continues (resp. continues par morceaux) à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, soit τ_x l'endomorphisme de $\mathcal{K}$ défini par

$$\forall f \in \mathcal{K},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \tau_x(f)(t) = f(t-x).$$

1. Pour $f \in \mathcal{K}$ et $g \in \mathcal{K}_c$, on pose
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\,g(t)\ \mathrm{d}t.$$
   Montrer que $f*g$ appartient à $\mathcal{K}$.
2. Soit T un endomorphisme de $\mathcal{K}$ commutant à τ_x pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tel que
   $$\forall f \in \mathcal{K}, \quad \|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$$
   Montrer que
   $$\forall (f,g) \in \mathcal{K}\times\mathcal{K}_c, \quad T(f*g) = T(f)*g.$$

Exercice 46 *(X)* Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continue à droite et de carré intégrable. On pose pour $x > 0$, $S_f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(y)}{x+y}\mathrm{d}y$.

1. Justifier la bonne définition de S_f.
2. Montrer que S_f est de carré intégrable.

Autour de la fonction Gamma

Exercice 47 *(ENS)* On pose $\Gamma : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{+*}} t^{x-1}e^{-t}\ \mathrm{d}t$. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\forall y \in \,]0,1[\,,\ \dfrac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)} < x^y$ et $\forall y \in [1,+\infty[\,,\ \dfrac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)} \geqslant x^y$.

Exercice 48 *(X-Centrale)* On définit les fonctions Γ, de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}$, et B, de $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}$, par les égalités $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t$ et $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ \mathrm{d}t$.

1. Justifier la définition de Γ et de B.
2. Exprimer $B(x+1,y)$ puis $B(x+1,y+1)$ en fonction de $B(x,y)$.
   On souhaite montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*},\ B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.
3. Expliquer pourquoi il suffit de le montrer pour $x > 1$ et $y > 1$.
   On pose $x > 1$ et $y > 1$. On note $F_{x,y}$ la primitive sur $\mathbb{R}_+$ de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x+y-1}$ qui s'annule en 0, et $G(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}\big((1+u)z\big)\ \mathrm{d}u$.
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{z\to+\infty} G(z) = \Gamma(x+y)\beta(x,y)$.
5. Montrer que G est $\mathcal{C}^1$, et en déduire une expression de $\displaystyle\lim_{z\to+\infty} G(z)$. Conclure.
6. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^{x-1}-1}{t}\ \mathrm{d}t$ pour $x > 0$. *Ind.* Écrire $B(x,y) - \dfrac{1}{y}$ sous forme intégrale.

Exercice 49 *(X)*

1. Soit $t > 0$. Montrer que l'application $f_t : s \in]t,+\infty[\mapsto \left(1 - \dfrac{t}{s}\right)^s$ est croissante.
2. Soit Γ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par l'égalité $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t$.
   Montrer que $\forall x > 0,\ \Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.
3. Montrer que $\forall x > 0,\ \Gamma(2x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2x-1}\Gamma(x)\,\Gamma\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$.

Exercice 50 *(X)*

1. On pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que $H_n - \ln n$ tend vers une limite $\gamma > 0$.
2. Pour $t \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}\ \mathrm{d}x$. Montrer que Γ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $\Gamma'(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(x)e^{-x}\ \mathrm{d}x = \lim_{y\to0}\Big(\int_y^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\ \mathrm{d}x + \ln y\Big)$.
3. En déduire que $\Gamma'(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-e^{-x}}\Big)\ \mathrm{d}x = -\gamma$.

Exercice 51 *(X)* Soient $\alpha, \beta > 0$. Pour $x > 0$, on pose $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\beta-1}e^{-t-xt^{\alpha}}\mathrm{d}t$.

1. Déterminer la limite et un équivalent de I en $+\infty$.
2. Donner le développement asymptotique de I à tout ordre.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ce développement soit la somme partielle d'une série convergente pour tout $x > 0$.