Notations : Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on notera $\lfloor y \rfloor$ la partie entière de y. Pour toute partie $A \subset \mathbb{R}$, on notera $\mathbb{1}_A$ sa fonction caractéristique.
On notera $l^1(\mathbb{Z})$ l'ensemble des suites de nombres complexes $(z_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ telle que $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} |z_k| < +\infty$.
On dira qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est périodique de période $T > 0$ si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x+T) = f(x)$. Dans ce problème, on supposera toujours que $T = 1$ et on dira simplement qu'une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est périodique si elle est périodique de période 1. On notera $\mathcal{C}_{\text{per}}$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues et périodiques muni de la norme $\|.\|_\infty$ définie par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on notera $e_k \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ la fonction définie par pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e_k(x) = \mathrm{e}^{2ik\pi x}.$$

Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on définit $c_k(f) \in \mathbb{C}$, le k-ième cœfficient de Fourier de f, par :

$$c_k(f) = \int_0^1 f(t)e_{-k}(t)\ \mathrm{d}t.$$

Pour tous $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $S_n(f) \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ par :

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k$$

et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on définit leur somme de Césaro $\sigma_N \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ par :

$$\sigma_N(f) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(f).$$

I. Préliminaires :

Le but de cette partie est d'établir des résultats préliminaires qui seront utiles par la suite.

(1) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $f(1) = f(0)$. Soit $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $\widetilde{f}(x) = f(x - \lfloor x \rfloor)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\widetilde{f} \in \mathcal{C}_{\text{per}}$.

(2) Montrer que toute fonction $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

(3) Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes qui converge vers $z \in \mathbb{C}$. Montrer que la suite de nombres comples $(Z_N)_{N\in\mathbb{N}}$ définie par

$$Z_N = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} z_n$$

converge aussi vers z.

(4) *Polynômes trigonométriques :* Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre :

- ▷ f est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{C}$ des fonctions e_k, $k \in \mathbb{Z}$
- ▷ f est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{C}$ des fonctions $f_{k,l}$: $x \mapsto \cos^k(2\pi x)\sin^l(2\pi x)$, $(k,l) \in \mathbb{N}^2$
- ▷ f est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{C}$ des fonctions $g_k : x \mapsto \cos(2\pi kx)$ et $h_l : x \to \sin(2\pi lx)$, $(k,l) \in \mathbb{N}^2$.

On dit alors que la fonction f est un polynôme trigonométrique. Et on note $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques.

II. Introduction des “noyaux” :

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on définit le noyau de Féjer $K_N \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ par

$$K_N = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n} e_k.$$

(1) Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 K_N(y)\ \mathrm{d}y = 1$.

(2) Soient $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Montrer que

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin(N+1)\pi x}{\sin \pi x}\right)^2.$$

(3) On considère une famille d'applications $(\rho_N)_{N\in N} \in \mathcal{C}_{\text{per}}^{\mathbb{N}}$ “concentrantes”, *i.e.* qui vérifient :

- ▷ Pour tout $N \in \mathbb{N}$, ρ_N est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
- ▷ Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 \rho_N(t)\ \mathrm{d}t = 1$.
- ▷ Pour tout $\delta > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\ \sup_{t\in[\delta,1-\delta]} \rho_N(t) = 0$ (*i.e.* ρ_N tend uniformément vers 0 sur $[\delta, 1-\delta]$).

Expliquer que la famille (K_N) est un exemple d'une telle famille.

(4) Un telle famille de fonctions $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut-elle converger uniformément sur $[0,1]$?

(5) On définit $\rho_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ t & \to a_n (\cos(\pi t))^{2n} \end{cases}$ avec $a_n \in \mathbb{R}_+^*$. Quelle valeur de $a_n \in \mathbb{R}_+^*$ doit-on choisir pour que la fonction ρ_n soit normalisée, *i.e.* $\displaystyle\int_0^1 \rho_n(t)\ \mathrm{d}t = 1$? On ne cherchera pas à calculer l'intégrale. Exprimer a_n en fonction des intégrales de Wallis.

(6) Établir que a_n admet un équivalent du type $c\sqrt{n}$ quand $n \to \infty$, où c est une constante non nulle que l'on explicitera.

(7) Montrer que les fonctions ρ_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont des polynômes trigonométriques.

(8) Démontrer que cette famille d'applications ρ_n est bien concentrante.

III. **Produit de convolution :**

Soient f et $g \in \mathcal{C}_{\text{per}}$. On définit

$$f * g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \to \displaystyle\int_0^1 f(t)g(x-t)\ \mathrm{d}t \end{cases}$$

(1) Montrer que $f * g$ est 1-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que $f * g = g * f$. En déduire que $*$ est une loi de composition interne commutative sur $\mathcal{C}_{\text{per}}$.

IV. **Théorème de Fejér**

Le but de cette partie est de démontrer le **théorème de Féjer** qui affirme que toute fonction $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ est la limite uniforme de la suite de polynômes trigonométriques $(\sigma_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$.

(1) Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$. Soient $N \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sigma_N(f) = f * K_N.$$

Plus généralement, on va établir que pour toute famille d'applications concentrantes $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(g_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ définie par $g_N = f * \rho_N$ converge uniformément vers f.

(2) Soient $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$g_N(f)(x) - f(x) = \int_0^1 (f(x-y) - f(x))\rho_N(y)\ \mathrm{d}y.$$

(3) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $0 < \delta < \dfrac{1}{2}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^\delta |f(x-y) - f(x)|\rho_n(y)\ \mathrm{d}y \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{1-\delta}^1 |f(x-y) - f(x)|\rho_n(y)\ \mathrm{d}y \leq \varepsilon.$$

(4) Montrer que pour tout $\delta > 0$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_\delta^{1-\delta} |f(x-y) - f(x)|\rho_n(y)\ \mathrm{d}y \leq \varepsilon.$$

(5) En déduire que la suite $(g_N)_{N\in\mathbb{N}} = (f * \rho_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

(6) En déduire le **théorème de Féjer :** la moyenne de Césaro des sommes de Fourier $(\sigma_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

(7) Soit $N \in \mathbb{N}$. Expliquer que $\sigma_N(f)$ est un polynôme trigonométrique, c'est-à-dire $\sigma_N(f) \in \text{Vect}(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

(8) En déduire que l'ensemble des polynômes trigonométriques $\mathcal{P} = \text{Vect}(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est dense dans l'espace $\mathcal{C}_{\text{per}}$.

V. **Convergence de la série de Fourier pour les fonctions $\mathcal{C}^2$:**

Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$.

(1) Si on suppose de plus f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, établir une relation entre les cœfficients de Fourier $c_k(f)$ et $c_k(f^{(n)})$.

(2) En déduire que si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, $(c_k(f)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z})$.

(3) En déduire que dans ce cas la suite de fonction $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, puis que sa limite est f.

VI. **Équirépartition**

Le but de cette partie est d'étudier l'équirépartition modulo 1 des suites de nombres réels.

Pour tout sous-ensemble fini $X \subset \mathbb{N}$, on notera $|X|$ le cardinal de l'ensemble X. Pour tout $N \geq 1$, on notera simplement $[\![1, N]\!] = \{k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq N\}$. Pour tout entier $N \geq 1$, pour tout suite de nombres réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et tout sous ensemble non vide $Y \subset [0,1]$, on notera

$$\gamma_N((x_n)_n, Y) = \frac{1}{N} \left|\{1 \leq n \leq N,\ x_n - \lfloor x_n \rfloor \in Y\}\right|.$$

On dira qu'une suite de nombres réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est **équirépartie** si pour tous $0 \leq a < b \leq 1$, on a

$$\lim_{N\to\infty} \gamma_N((x_n)_n, [a,b]) = b - a.$$

On souhaite montrer l'équivalence entre :

(i) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie.

(ii) Pour tout $f \in \mathcal{C}^0 pm([0,1], \mathbb{C})$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k - \lfloor x_k \rfloor) = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t. \tag{1}$$

(iii) Pour tout $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ on a (1).

(iv) Pour tout $q \in \mathbb{Z}^*$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2iq\pi x_k} = 0$.

(1) Montrer qu'une suite de nombres réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie si et seulement si pour tous $0 \leq a \leq b \leq 1$, on a

$$\lim_{N\to\infty} \gamma_N((x_n)_n, [a,b]) = b - a.$$

(2) Montrer $(i) \Leftrightarrow (ii)$. *On pourra utiliser les fonctions indicatrices* $\mathbb{1}_{[a,b]}$.

(3) Expliquer pourquoi $(ii) \Rightarrow (iii)$, puis pourquoi $(iii) \Rightarrow (iv)$.

(4) Montrer $(iv) \Rightarrow (iii)$.

(5) a. Étant donné $\epsilon > 0$, en vous aidant d'un dessin, construire des fonctions f_ϵ^+ et $f_\epsilon^- \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ telles que pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$f_\varepsilon^-(x) \leq \mathbb{1}_{[a,b]}(x) \leq f_\varepsilon^+(x) \quad \text{et} \quad \int_0^1 f_\varepsilon^+ - f_\varepsilon^- \leq \epsilon.$$

b. En déduire $(iii) \Rightarrow (i)$.

(6) Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(n\alpha + x)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie.

(7) On cherche à étudier la proportion des puissances de 2 dont l'écriture décimale commence par un chiffre fixé. On notera log le logarithme décimal.

a. Expliquer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'écriture décimale de x commence par un 1 *ssi* $\log(x) - \lfloor \log(x) \rfloor \in [0, \log(2)[$

b. Montrer que $\log(2)$ est irrationnel.

c. En déduire que la suite $n\log 2 - \lfloor n \log 2 \rfloor$ est équirépartie et donc que :

$$\text{Card}\{k \leq n \ \text{ tel que } 2^k \text{ commence par } 1\} \sim n\log(2).$$

d. Qu'en est-il de la proportion des puissances de 2 qui commence par un autre chiffre ?

(8) Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ la fonction définie par $F_n : x \in \mathbb{R} \mapsto f(\alpha n + x)$. Montrer que

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \int_0^1 f(y)\ \mathrm{d}y - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} F_n \right\|_\infty = 0.$$

VII. Approximation rationnelle et équirépartition quantitative

Le but de cette partie est d'étudier l'approximation des nombres réels par les nombres rationnels et les liens avec l'équirépartition.

On dira qu'un nombre réel α est de Liouville si pour tour entier $n \geq 1$, il existe un couple $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0,1\})$ tel que

$$0 < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left(\frac{1}{q_n} \right)^n.$$

On ira qu'un nombre réel α est algébrique s'il existe un polynôme $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ non constant tel que $P(\alpha) = 0$.

(1) Montrer qu'un nombre réel de Liouville est irrationnel.

(2) **Théorème de Liouville**

a. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel qu'il existe un polynôme $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible à cœfficients entiers de degré $d \geq 2$ tel que $P(\alpha) = 0$. Montrer qu'il existe une constante $c_\alpha > 0$ (qui dépend de α) telle que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \ \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c_\alpha}{q^d}.$$

b. En déduire qu'un nombre réel algébrique sur $\mathbb{Q}$ n'est pas de Liouville.

c. Montrer que le nombre réell $\alpha = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ n'est pas algébrique.

(3) **Équirépartition quantitative.**
Dans cette question, on prouve une version quantitative de la convergence de la question VI8. Soit α un nombre irrationnel qui n'est pas de Liouville. Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ une fonction que l'on suppose de plus de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ la fonction définie par $F_n(x) = f(\alpha n + x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une constante $C_{\alpha,f} > 0$ (qui dépend de α et de f) telle que pour tout $N \geq 1$,

$$\left\| \int_0^1 f(y)\, \mathrm{d}y - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} F_N \right\| \leq \frac{C_{\alpha,f}}{N}.$$

On pourra utiliser les résultats de la partie II.