

Si f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π -périodique, on définit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, son n -ième coefficient de Fourier par

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

On admettra que si deux fonctions f et g continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π -périodiques, ont les mêmes coefficients de Fourier, alors elles sont égales.

On note $\overline{D}(0, R)$ le disque fermé du plan complexe de centre 0 et de rayon R .

On pourra utiliser le théorème de Fubini qui stipule que si H est continue sur $[a, b] \times [c, d]$ alors $\int_a^b \left(\int_c^d H(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b H(x, y) dx \right) dy$.

On pourra enfin se servir du résultat suivant (inégalité de Hadamard), admis sans démonstration : si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice carrée de taille n à coefficients complexes, alors

$$|\det A| \leq n^{\frac{n}{2}} \left(\sup_{i,j} |a_{i,j}| \right)^n.$$

I. Première partie : étude de quelques équations intégrales

- (1) *Un premier exemple* : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Considérons l'équation intégrale de paramètre $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$, et de fonction inconnue $\phi_z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue :

$$(E_z) \quad \phi_z(x) - z \int_0^1 e^{x-y} \phi_z(y) dy = f(x).$$

- a. Considérons ϕ_z une solution de cette équation. Posons $\xi_z = \int_0^1 e^{-y} \phi_z(y) dy$. Écrire une relation simple exprimant ξ_z en fonction de z et f .
- b. En déduire que si $z \neq 1$, (E_z) possède une et une seule solution que l'on explicitera.
- (2) Soient f et K deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π -périodiques, f étant de classe C^2 et K de classe C^1 . Considérons l'équation intégrale de paramètre $z \in \mathbb{C}$ et de fonction inconnue $\phi_z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et 2π -périodique :

$$(F_z) \quad \phi_z(x) - \frac{z}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t) \phi_z(t) dt = f(x)$$

- a. Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continue, 2π -périodique. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t) g(t) dt$$

est continue, 2π -périodique et que ses coefficients de Fourier $\hat{h}(n)$ vérifient

$$\hat{h}(n) = \hat{K}(n) \hat{g}(n).$$

- b. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} |\hat{K}(n)| = 0$ et que $|\hat{f}(n)| = \frac{|(f'')|}{n^2}$.
- c. Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $z \hat{K}(n) \neq 1$, l'équation (F_z) possède une et une seule solution dont on donnera le développement en série de Fourier.

- (3) Considérons l'équation intégrale de paramètre $z \in \mathbb{C}$ et de fonction inconnue $\phi_z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 :

$$(H_z) \quad \phi_z(x) - z \int_0^x \phi_z(t) dt = e^x.$$

Montrer que si ϕ_z est solution de (H_z) , ϕ_z vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. En déduire les solutions de (H_z) .

II. Deuxième partie : quelques considérations d'algèbre linéaire

- (1) a. Soit A un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E vérifiant $A^2 = A$. On note Id_E l'identité de E . Montrer que lorsque $z \neq 1$, l'endomorphisme $Id_E - zA$ de E est inversible et donner son inverse.
- b. On note $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs complexes. Considérons l'application

$$A: \begin{cases} \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C}) & \longrightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C}) \\ \phi & \mapsto A\phi : x \mapsto A\phi(x) = \int_0^1 e^{x-y} \phi(y) dy. \end{cases}$$

Montrer que A est linéaire et vérifie $A^2 = A$. Montrer que si $z \neq 1$, $Id - zA$ est inversible et retrouver le résultat de la question 1b.

- (2) On note $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes et 2π -périodiques. Plaçons nous sous les hypothèses de la question I2, et considérons l'opérateur

$$A: \begin{cases} \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) & \longrightarrow C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ \phi & \mapsto A\phi : x \mapsto A\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\phi(t) dt. \end{cases}$$

- Montrer que A est linéaire et que ses valeurs propres sont les $\hat{K}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
- Supposons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $z\hat{K}(n) \neq 1$. Proposer une condition suffisante pour que $Id - zA$ soit inversible.

III. Troisième partie : équations intégrales, le cas général

Dans la suite du problème, on considère un intervalle fermé borné $[a, b]$, une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, et une fonction continue $N : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. On note $M = \sup_{(x,y) \in [a,b]^2} |N(x,y)|$. On considère l'équation intégrale de paramètre $z \in \mathbb{C}$ et de fonction inconnue $\phi_z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$:

$$(I_z) \quad \phi_z(x) - z \int_a^b N(x,y)\phi_z(y) dy = f(x)$$

Posons pour $(x,y) \in [a,b]^2$,

$$N_0(x,y) = 1, \quad N_1(x,y) = N(x,y),$$

et par récurrence, pour tout entier $k \geq 2$, $N_k(x,y) = \int_a^b N(x,s)N_{k-1}(s,y) ds$.

Posons pour $z \in \mathbb{C}$, $x, y \in [a,b]$, $A(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\infty} N_k(x,y)z^{k-1}$.

- Montrer que les fonctions N_k sont bien définies et continues.
 - Montrer qu'il existe un réel $R > 0$ tel que la série de fonctions définissant $A(x,y,z)$ converge normalement sur $[a,b]^2 \times \overline{D}(0,R)$. (On pourra majorer $|N_k(x,y)|$ indépendamment de x et y dans $[a,b]$ en fonction de la constante M introduite plus haut.)
 - Pour tout $z \in \overline{D}(0,R)$ et $x \in [a,b]$, posons $\psi_z(x) = \int_a^b A(x,t,z)f(t) dt$. Montrer que ψ_z est bien définie, continue sur

$[a,b]$ et que

$$z \int_a^b N(x,y)\psi_z(y) dy = \psi_z(x) - \int_a^b N(x,t)f(t) dt.$$

En déduire que pour tout z de module strictement plus petit que R , $\phi_z(x) = f(x) + z\psi_z(x)$ est solution de l'équation (I_z) .

Le but de la fin du problème est de montrer l'existence (sous certaines conditions) d'une solution de (I_z) en dehors du disque $\{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$. Soit n un entier naturel non nul. Notons pour $x_i, y_i, i = 1, \dots, n$ dans l'intervalle $[a,b]$,

$$N \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \\ y_1, \dots, y_n \end{pmatrix}$$

le déterminant de la matrice dont le coefficient de la k -ième ligne et l -ième colonne est $N(x_k, y_l)$.

- (2) Montrer que

$$\begin{aligned} N \begin{pmatrix} x, s_1, \dots, s_n \\ y, s_1, \dots, s_n \end{pmatrix} &= N(x,y)N \begin{pmatrix} s_1, \dots, s_n \\ s_1, \dots, s_n \end{pmatrix} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n (-1)^k N(x, s_k)N \begin{pmatrix} s_1, \dots, s_n \\ y, s_1, \dots, s_{k-1}, s_{k+1}, \dots, s_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et en déduire que

$$\begin{aligned} N \begin{pmatrix} x, s_1, \dots, s_n \\ y, s_1, \dots, s_n \end{pmatrix} &= N(x,y)N \begin{pmatrix} s_1, \dots, s_n \\ s_1, \dots, s_n \end{pmatrix} \\ &\quad - \sum_{k=1}^n N(x, s_k)N \begin{pmatrix} s_k, s_1, \dots, s_{k-1}, s_{k+1}, \dots, s_n \\ y, s_1, \dots, s_{k-1}, s_{k+1}, \dots, s_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Définissons $C_n^{(j)}$ pour tout entier naturel non nul n , et tout entier j , $1 \leq j \leq n$, par

$$C_n^{(n)}(x,y,s_1,\dots,s_n) = N \begin{pmatrix} x, s_1, \dots, s_n \\ y, s_1, \dots, s_n \end{pmatrix}$$

et, pour tout $k = 1, \dots, n-1$,

$$C_n^{(n-k)}(x,y,s_1,\dots,s_{n-k}) = \int_a^b C_n^{(n-k+1)}(x,y,s_1,\dots,s_{n-k+1})ds_{n-k+1}.$$

Posons aussi $c_0(x, y) = N(x, y)$ et si $n \geq 1$, $c_n(x, y) = \int_a^b C_n^{(1)}(x, y, s_1) \, ds_1$,

puis $a_0 = 1$, et si $n \geq 1$, $a_n = \int_a^b c_{n-1}(s, s) \, ds$.

(3) Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$c_n(x, y) = N(x, y)a_n - n \int_a^b N(x, s)c_{n-1}(s, y) \, ds.$$

(On intégrera chacun des termes de la formule obtenue en question III2 par rapport à des variables judicieusement choisies, dans un ordre judicieusement choisi.)

(4) Montrer que la série entière $D(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini. (On pourra majorer $|a_n|$ en partant de la majoration de $|N(x, y)| \leq M$ et utiliser l'inégalité de Hadamard rappelée dans le préambule).

(5) On fixe $R > 0$. Pour tout entier n , majorer $\left| \frac{c_n(x, y)}{n!} z^n \right|$ pour tout $(x, y, z) \in [a, b]^2 \times \overline{D}(0, R)$ par une constante m_n qui soit le terme général d'une série convergente.

(6) Considérons la série entière $S_{x,y}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n(x, y)}{n!} z^n$.

Établir l'égalité $S_{x,y}(z) = N(x, y)D(z) + z \int_a^b N(x, s)S_{s,y}(z) \, ds$.

(7) En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $D(z) \neq 0$,

$$\phi_z(x) = f(x) + z \int_a^b \frac{S_{x,s}(z)}{D(z)} f(s) \, ds$$

est l'unique solution de l'équation intégrale (I_z) .