I. Première partie : étude de quelques équations intégrales

(1) *Un premier exemple :*

a. Comme ϕ_z est solution, pour tout $x \in [0,1]$, $\phi_z(x) = ze^x\xi_z + f(x)$.

b. Les solutions éventuelles de (E_z) sont donc de la forme $x \mapsto kze^x + f(x)$.

Soit h_k une telle fonction. Pour tout $x \in [0,1]$, $\int_0^1 e^{x-y}h_k(y)dy = \int_0^1 e^x kzdy + \int_0^1 e^{x-y}f(y)dy = e^x\left(kz + \int_0^1 e^{-y}f(y)dy\right)$.

Dans le cas où $z \neq 0$, h_k solution est équivalent à :

$$\forall x \in [0,1], \quad ke^x = e^x\left(kz + \int_0^1 e^{-y}f(y)dy\right),$$

ce qui se réécrit : $k(1-z) = z\int_0^1 e^{-y}f(y)dy$.

Ainsi, si $z \neq 1$, (E_z) possède une et une seule solution :

$$\phi_z : x \mapsto f(x) + e^x\frac{z}{1-z}\int_0^1 e^{-y}f(y)dy$$

. Ce résultat demeure vrai pour $z = 0$.

En déduire que si $z \neq 1$, (E_z) possède une et une seule solution que l'on explicitera.

(2) Soient f et K deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques, f étant de classe C^2 et K de classe C^1. Considérons l'équation intégrale de paramètre $z \in \mathbb{C}$ et de fonction inconnue $\phi_z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique :

$$(F_z) \qquad \phi_z(x) - \frac{z}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\phi_z(t)\ \mathrm{d}t = f(x)$$

a. Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continue, 2π-périodique. On considèrela fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)g(t)\ \mathrm{d}t.$$

On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Comme l'intégrale est sur un segment, on peut dominer par des fonctions constantes (qui sont bien intégrables sur le segment $[-\pi,\pi]$). Pour cela, comme K et g sont continues et 2π-périodiques, elles sont bornées et on peut définir $M_1 = \sup_{\mathbb{R}}|g|$ et $M_2 = \sup_{\mathbb{R}}|K|$. On vérifie alors les hypothèses :

- $\forall t \in [-\pi,\pi]$, $x \mapsto K(x,t)g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto K(x-t)g(t)$ est continue par morceaux sur $[-\pi,\pi]$.
- $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[-\pi,\pi]$, $|K(x-t)g(t)| \leq M_1M_2 = \varphi(t)$ où la fonction (constante) φ est intégrable sur $[-\pi,\pi]$.

On peut donc bien conclure que h est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs pas périodicité de K, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x+2\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} K(x+2\pi-t)g(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)g(t)\ \mathrm{d}t = h(x)$.

Ainsi h est 2π-périodique et on peut définir ses cœfficients de Fourier.

On utilise le théorème de Fubini rappelé par l'énoncé (les fonctions intégrées sont bien continues sur $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$). Soit $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}(2\pi)^2\hat{h}(n) &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)g(t)\ \mathrm{d}t\right)e^{-inx}\ \mathrm{d}x\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\left(\int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)e^{-inx}\ \mathrm{d}x\right)\ \mathrm{d}t\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\left(\int_{-\pi-t}^{\pi-t} K(u)e^{-in(u+t)}\ \mathrm{d}u\right)\ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

Comme la fonction $u \mapsto K(u)e^{-inu}$ est 2π-périodique, on en déduit que :

$$(2\pi)^2\hat{h}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-int}\left(\int_{-\pi}^{\pi} K(u)e^{-inu}\ \mathrm{d}u\right)\ \mathrm{d}t = (2\pi)^2\hat{g}(n)\hat{K}(n).$$

Finalement, $\hat{h}(n) = \hat{K}(n)\hat{g}(n)$.

b. Le résultat $\lim_{n\to\pm\infty}|\hat{K}(n)| = 0$ n'est en fait que le lemme de Riemann-Lebesgue. L'hypothèse K C^1 nous permet de ne faire que la démonstration simple avec une IPP (*cf* Td-Cours). Le résultat est en fait vrai même si K est simplement continue.

Comme f est de classe C^2, en réalisant deux IPP et on obtient $\hat{f}(n) = \dfrac{\hat{(f'')}}{(in)^2}$, ce qui permet de conclure.

c. On procède par analyse-synthèse. Soit ϕ_z une solution éventuelle de (F_z). En notant $h : x \mapsto \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\phi_z(t)\ \mathrm{d}t$, comme ϕ_z est solution, $\phi_z = zh + f$. D'après la question I(2)a (avec $g = \phi_z$), et par linéarité du calcul des coefficients de Fourier :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \hat{\phi}_z(n) = z\hat{h}(n) + \hat{f}(n) = z\hat{K}(n)\hat{\phi}_z(n) + \hat{f}(n).$$

Si de plus, pour tout n de $\mathbb{Z}$, $z\hat{K}(n) \neq 1$, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\quad \hat{\phi}_z(n) = \frac{\hat{f}(n)}{1 - z\hat{K}(n)}.$$

Ainsi, deux solutions éventuelles ont les mêmes coefficients de Fourier ; et comme elles sont continues, elles sont égales. Une solution éventuelle est donc unique.

Suite à l'analyse ci-dessus, on définit pour tout n de $\mathbb{Z}$, $c_n = \dfrac{\hat{f}(n)}{1 - z\hat{K}(n)}$, puis on pose $\varphi_0 : t \mapsto c_0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : t \mapsto c_{-n}e^{-int} + c_n e^{int}$.
Or d'après la question précédente, $\sup_{\mathbb{R}} |\varphi_n| \leq |c_{-n}| + |c_n| = O_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi, ka série $\sum \varphi_n$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction ϕ. Par continuité des ϕ_n et convergence uniforme, ϕ est continue sur $\mathbb{R}$ et par convergence simple, elle est 2π-périodique.
Comme la convergence de la série est uniforme sur le segment $[-\pi, \pi]x$, cela permet les interversions somme-intégrale : pour tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
2\pi\hat{\phi}(p) &= \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t)e^{-ipt}\ \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(t)e^{-ipt}\ \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)e^{-ipt}\ \mathrm{d}t. \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}e^{-ipt}\ \mathrm{d}t \\
&= c_p
\end{aligned}$$

(On utilise que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\ \mathrm{d}t = \delta_{k,0}$.)

Or, si on pose $h(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\phi(t)\ \mathrm{d}t$, par la question I(2)a (avec $g = \phi$) on a :

$$\forall p \in \mathbb{Z},\quad \hat{\phi}(n) - z\hat{h}(n) = c_n - z\hat{K}(n)c_n = \hat{f}(n).$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto \phi(x) - \dfrac{z}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\phi(t)dt$ est élément de $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et a les mêmes coefficients de Fourier que f. Elle est donc égale à f et ϕ est solution de (F_z).

(3) Soit $z \in \mathbb{C}$. On considère ϕ_z une solution de (H_z) ; ainsi elle est de classe C^1 et vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi_z(x) - z\displaystyle\int_0^x \phi_z(t)dt = e^x$. En dérivant, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi_z'(x) - z\phi(x) = e^x$. Ainsi, ϕ_z est solution de l'équation différentielle (E) : $y' - zy = e^x$.

Si $z \neq 1$, une solution particulière est $x \mapsto \dfrac{e^x}{1-z}$.
La solution générale de (E) est donc $x \mapsto ke^{zx} + \dfrac{e^x}{1-z}$.
Réciproquement soit $\phi : x \mapsto ke^{zx} + \dfrac{e^x}{1-z}$.
Un calcul direct donne : $\phi(x) - z\displaystyle\int_0^x \phi(t)dt - e^x = k - \dfrac{z}{z-1}$
Donc si $z \neq 1$, (H_z) possède une seule solution sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\phi_z(x) = \frac{e^x - ze^{zx}}{1-z}.$$

Dans le cas $z = 1$, par le même raisonnement, on obtient que nécessairement $\phi(x) = e^x(x + k)$. Et réciproquement ϕ_z est solution si seulement si $k = 1$. Finalement,

$$\phi_1(x) = e^x(x+1).$$

II. Deuxième partie : quelques considérations d'algèbre linéaire

(1) a. Soit A un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E vérifiant $A^2 = A$. On note Id_E l'identité de E. Soit $z \neq 1$. Et on considère $B = Id_E - zA$. Ainsi $Id_E - B = zA$ et donc $(Id_E - B)^2 = z^2A^2 = z^2A = z(Id_E - B)$. On obtient ainsi un polynôme annulateur de B (qui

n'admet pas 0 comme racine) puisque : $B^2+(z-2)B-(z-1)Id_E=0$. Ainsi (comme $z\neq 1$),

$$B\left(\frac{1}{(z-1)}B+\frac{z-2}{(z-1)}Id_E\right)=Id_E=\left(\frac{1}{(z-1)}B+\frac{z-2}{(z-1)}Id_E\right)B.$$

D'où B est inversible d'inverse $B^{-1}=\dfrac{1}{(z-1)}B+\dfrac{z-2}{(z-1)}Id_E=Id_E-\dfrac{z}{z-1}A$.

b. On note $E=C([0,1],\mathbb{C})$. La linéarité de A découle de la linéarité de l'intégrale.

Pour $\phi\in E$, ϕ est continue est bornée sur $[0,1]$ et on montre donc avec le théorème des intégrales à paramètres, comme à la quezstion I2 que $A\phi$ est continue et donc un élément de E. L'application A est donc bien un endomorphisme de E.

Soit $\phi\in E$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$A(A\phi)(x)=\int_0^1 e^{x-y}\left(\int_0^1 e^{y-t}\phi(t)\ \mathrm{d}t\right)\ \mathrm{d}y.$$

En utilisant le théorème de Fubini (l'application intégrée est bien continue sur $[0,1]\times[0,1]$, on obtient :

$$\begin{aligned}A(A\phi)(x) &= e^x\int_0^1\left(\int_0^1 e^{-t}\phi(t)\ \mathrm{d}t\right)\ \mathrm{d}y\\ &= e^x\int_0^1 e^{-y}\phi(y)\ \mathrm{d}y\\ &= \int_0^1 e^{x-y}\phi(y)\ \mathrm{d}y=A\phi(x).\end{aligned}$$

On a bien montré $A^2=A$; ainsi pour $z\neq 1$, $Id-zA$ est donc inversible.

Or, $(E_z)\Leftrightarrow\phi-zA\phi=f$. Le problème a donc une solution unique donnée par : $\phi_z=B^{-1}(f)=f-\dfrac{z}{z-1}Af=f+\dfrac{z}{1-z}Af$, c'est-à-dire $\phi_z:x\mapsto f(x)+\dfrac{z}{1-z}e^x\displaystyle\int_0^1 e^{-y}f(y)\ \mathrm{d}y$, ce qu'on avait obtenu à la question I1b.

(2) a. On considère dans cette question $E=\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Une fois encore, la linéarité découle de la linéarité de l'intégrale et se montre de manière directe. On avait montré en question I2 que pour $\phi\in E$, $A\phi\in E$; A est donc bien un endomorphisme de E.

L'énoncé rappelle que deux fonctions de E sont égales si et seulement si elles ont la même suite de cœfficients de Fourier. On en déduit pour tout $\phi\in E$ et $\lambda\in\mathbb{C}$ les équivalences :

$$\begin{aligned}A\phi=\lambda\phi &\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{Z},\hat{A\phi}(n)=\lambda\hat{\phi}(n)\\ &\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{Z},\hat{\phi}(n)\hat{K}(n)=\lambda\hat{\phi}(n)\end{aligned}$$

Ainsi, si λ une valeur propre de A et $\phi\in E$ un vecteur propre associé (nécessairement non nul), ϕ a nécessairement un cœfficient de Fourier non nul (sinon elle aurait la même suite de cœfficients que l'application nulle) ; en posant $p\in\mathbb{Z}$ tel que $\hat{\phi}(p)\neq 0$, comme $\hat{K}(p)\hat{\phi}(p)=\lambda\hat{\phi}(p)$, on a nécessairement $\lambda=\hat{K}(p)$.

On va montrer que réciproquement les $\hat{K}(p)$ pour $p\in\mathbb{Z}$ sont bien valeurs propres. Soit $p\in\mathbb{Z}$. On considère $\phi_p:t\mapsto e^{ipt}$; par le calcul habituel, on obtient que pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $\hat{\phi}_p(n)=\delta_{p,n}$. Ainsi, on a bien, avec $\lambda=\hat{K}(p)$, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $\hat{\phi}_p(n)\hat{K}(n)=\lambda\hat{\phi}_p(n)$, et donc par les équivalences ci-dessus, $A\phi_p=\lambda\phi_p$.

On a bien établi que l'ensemble des valeurs propres de A est l'ensemble $\left\{\hat{K}(n),n\in\mathbb{Z}\right\}$.

b. On suppose que pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $z\hat{K}(n)\neq 1$. Les valeurs propres de l'opérateur $Id-zA$ sont les $1-z\hat{K}(n)$, n dans $\mathbb{Z}$ et par hypothèse, elles sont toutes non nulles, donc $B=Id_E-zA$ est injective. Mais d'après la question I2, B est également surjective. Elle est donc bien inversible.

III. **Troisième partie : équations intégrales, le cas général**

(1) a. On montre par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$ que les fonctions N_k sont bien définies et continues. C'est bien le cas de N_0 et N_1 par hypothèse.

Soit $k\geq 2$ telle que N_{k-1} soit définie et continue sur $[a,b]^2$. On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

— Pour tout $s\in[a,b]$, $(x,y)\mapsto N(x,s)N_{k-1}(s,y)$ est continue, puisque N et N_{k-1} le sont.

— Pour $(x,y)\in[a,b]^2$, la fonction $s\mapsto N(x,s)N_{k-1}(s,y)$ est continue donc continue par morceaux sur $[a,b]$.

— Les fonctions N et N_{k-1} sont continues sur le compact $[a,b]^2$, donc bornées par M et M_{k-1} respectivement. Ainsi,

$$\forall s \in [a,b],\ \forall (x,y) \in [a,b]^2,\ [N(x,s)N_{k-1}(s,y)| \leq M \times M_{k-1} = \varphi(s),$$

avec φ intégrable sur le segment $[a,b]$.

Le théorème de continuité des intégrales à paramètres s'applique et N_k est bien définie et continue sur $[a,b]^2$.

b. Si on reprend les notations ci-dessus, on constate que pour tout $(x,y) \in [a,b]^2$, $|N_k(x,y)| \leq (b-a)M \times M_{k-1}$, et donc $M_k \leq (b-a)M \times M_k$, avec $M_1 = M$. On en déduit par récurrence rapide que pour tout $k \geq 1$, $M_k \leq (b-a)^{k-1}M^k$. Si $M = 0$, tous les N_k, pour $k \geq 1$, sont nuls et le résultat est évident.

Si $M \neq 0$, on choisit $0 < R < \dfrac{1}{(b-a)M}$. Ainsi $\displaystyle\sup_{(x,y,z)\in[a,b]^2\times\overline{D}(0,R)} |N_k(x,y)z^{k-1}| \leq ((b-a)MR)^{k-1}M$, qui est le terme général d'une série convergente par choix de R.

c. Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(x,y,z) \mapsto N_k(x,y)z^{k-1}$ est continue sur $[a,b]^2 \times \overline{D}(0,R)$; d'après la question précédente, la série converge a fortiori uniformément ; et A est donc bien continue sur $[a,b]^2 \times \overline{D}(0,R)$. Cela va permettre d'appliquer de nouveau le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Pour cela, on commence par remarquer que comme A est continue sur un compact, elle est bornée ; et f est bornée en tant que fonction continue sur un segment. On peut donc de nouveau dominer par une fonction constante et conclure. Ainsi, ψ_z est bien définie et continue sur $[a,b]$.

Par ailleurs, en appliquant le théorème de Fubini et en utilisant la convergence normale, donc uniforme, sur un segment qui permet d'intervertir $\int$ et $\sum$ on obtient :

$$\begin{aligned}
z\int_a^b N(x,y)\psi_z(y)\ \mathrm{d}y &= \int_{t=a}^{t=b}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} z^k \int_{y=a}^{y=b} N(x,y)N_k(y,t)\ \mathrm{d}y\right) f(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{+\infty} z^k N_{k+1}(x,t)\right) f(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left(A(x,t,z) - N_1(x,t)z^0\right) f(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \psi_z(x) - \int_a^b N(x,t)f(t)\ \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Notons alors $\phi_z = f + z\psi_z$.

$$z\int_a^b N(x,y)\phi_z(y)dy = z\int_a^b N(x,y)(f(y) + z\psi_z(y))dy$$

$$z\int_a^b N(x,y)\phi_z(y)dy = z\int_a^b N(x,y)f(y)dy + z\left(\psi_z(y) - \int_a^b N(x,t)f(t)dt\right)$$

$$z\int_a^b N(x,y)\phi_z(y)dy = z\psi_z(y) = \phi_z(x) - f(x)$$

On vérifie donc que si $|z| < 1/(M(b-a))$, ϕ_z est solution de (I_z). que

$$z\int_a^b N(x,y)\psi_z(y)dy = \psi_z(x) - \int_a^b N(x,t)f(t)dt.$$

En déduire que pour tout z de module strictement plus petit que R, $\phi_z(x) = f(x) + z\psi_z(x)$ est solution de l'équation (I_z).

Le but de la fin du problème est de montrer l'existence (sous certaines conditions) d'une solution de (I_z) en dehors du disque $\{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$. Soit n un entier naturel non nul. Notons pour $x_i, y_i, i = 1, ..., n$ dans l'intervalle $[a,b]$,

$$N\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ y_1, \ldots, y_n \end{pmatrix}$$

le déterminant de la matrice dont le coefficient de la k-ième ligne et l-ième colonne est $N(x_k, y_l)$.

(2) Montrer que

$$N\begin{pmatrix} x, s_1, \dots, s_n \\ y, s_1, \dots, s_n \end{pmatrix} = N(x,y)N\begin{pmatrix} s_1, \dots, s_n \\ s_1, \dots, s_n \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k N(x,s_k)N\begin{pmatrix} s_1, \dots\dots\dots, s_n \\ y, s_1, \dots, s_{k-1}, s_{k+1}, \dots, s_n \end{pmatrix}$$

et en déduire que

$$N\begin{pmatrix} x, s_1, \dots, s_n \\ y, s_1, \dots, s_n \end{pmatrix} = N(x,y)N\begin{pmatrix} s_1, \dots, s_n \\ s_1, \dots, s_n \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^{n} N(x,s_k)N\begin{pmatrix} s_k, s_1, \dots, s_{k-1}, s_{k+1}, \dots, s_n \\ y, s_1, \dots, s_{k-1}, s_{k+1}, \dots, s_n \end{pmatrix}.$$

Définissons $C_n^{(j)}$ pour tout entier naturel non nul n, et tout entier j, $1 \leq j \leq n$, par

$$C_n^{(n)}(x, y, s_1, \dots, s_n) = N\begin{pmatrix} x, s_1, \dots, s_n \\ y, s_1, \dots, s_n \end{pmatrix}$$

et, pour tout $k = 1, \dots, n-1$,

$$C_n^{(n-k)}(x, y, s_1, \dots, s_{n-k}) = \int_a^b C_n^{(n-k+1)}(x, y, s_1, \dots, s_{n-k+1})ds_{n-k+1}.$$

Posons aussi $c_0(x,y) = N(x,y)$ et si $n \geq 1$, $c_n(x,y) = \displaystyle\int_a^b C_n^{(1)}(x,y,s_1)ds_1$,

puis $a_0 = 1$, et si $n \geq 1$, $a_n = \displaystyle\int_a^b c_{n-1}(s,s)ds$.

(1) Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$c_n(x,y) = N(x,y)a_n - n\int_a^b N(x,s)c_{n-1}(s,y)ds.$$

(On intégrera chacun des termes de la formule obtenue en **7** par rapport à des variables judicieusement choisies, dans un ordre judicieusement choisi.)

(2) Montrer que la série entière $D(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{a_n}{n!}z^n$ a un rayon de convergence infini. (On pourra majorer $|a_n|$ en partant de la majoration de $|N(x,y)| \leq M$ et utiliser l'inégalité de Hadamard rappelée dans le préambule).

(3) On fixe $R > 0$. Pour tout entier n, majorer $\left|\dfrac{c_n(x,y)}{n!}z^n\right|$ pour tout $(x,y,z) \in [a,b]^2 \times \overline{D}(0,R)$ par une constante m_n qui soit le terme général d'une série convergente.

(4) Considérons la série entière $S_{x,y}(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{c_n(x,y)}{n!}z^n$.

Établir l'égalité $S_{x,y}(z) = N(x,y)D(z) + z\displaystyle\int_a^b N(x,s)S_{s,y}(z)ds$.

(5) En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $D(z) \neq 0$,

$$\phi_z(x) = f(x) + z\int_a^b \frac{S_{x,s}(z)}{D(z)}f(s)ds$$

est l'unique solution de l'équation intégrale (I_z).