Problème 1 Le théorème taubérien fort

Pour chaque suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on définit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série de terme général a_n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

À toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rayon de convergence supérieur ou égal à 1, on associera

$$f : \begin{cases}]-1,1[& \to \mathbb{C} \\ x & \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{cases}.$$

Dans ce problème, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ sera supposé égal à 1.

I. Introduction

(1) Rappeler l'énoncé du lemme radial d'Abel (dans le cas d'une rayon de covnergence égal à 1).

(2) Expliquer la réciproque est en générale fausse, *i.e.* que l'on peut avoir $\lim_{x\to 1_-} f(x) = l \in \mathbb{R}$ mais $\sum a_n$ diverge.

On souhaite désormais montrer cette réciproque dans le cas particulier où $a_n = O_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

II. Démonstration du théorème Taubérien fort de Littlewood

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n = O_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$. On introduit $K > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $(n+1)|a_n| \le K$.

On note $f : \begin{cases}]-1,1[& \to \mathbb{C} \\ x & \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{cases}$, et on suppose dans cette partie que $\lim_{x\to 1_-} f(x) = 0$.

On notera pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n : x \to \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Et on introduit $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [n, n+1[,\ a(t) = a_n.$$

Soit $\epsilon > 0$.

(1) On définit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \mathrm{e}^{-1}[\\ 1 & \text{si } x \in [\mathrm{e}^{-1}, 1] \end{cases}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} a_k = s_{n-1} = n \int_0^{+\infty} a(nt) g(\mathrm{e}^{-t})\, \mathrm{d}t$ (en justifiant la convergence de l'intégrale).

(2) On note $h : \begin{cases}]0,1[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{g(x) - x}{x(1-x)} \end{cases}$. Expliquer que h est prolongeable en un fonction continue par morceaux sur $[0,1]$.

(3) En déduire l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\int_0^1 |h(x) - P(x)|\, \mathrm{d}x \le \frac{\epsilon}{K}$.

Un tel polynôme P étant trouvé, on pose $Q = X + X(1-X)P = \sum_{k=1}^{d} c_k X^k$.

(4) Montrer que $\left| s_{n-1} - \sum_{k=1}^{d} c_k n \int_0^{+\infty} a(nt) \mathrm{e}^{-kt}\, \mathrm{d}t \right| \le \epsilon$.

(5) Montrer que $\int_0^{+\infty} a(t) \mathrm{e}^{-st}\, \mathrm{d}t = \frac{1 - \mathrm{e}^{-s}}{s} f(\mathrm{e}^{-s})$.

(6) En déduire que la série $\sum a_n$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = 0$.

(7) Montrer le *théorème Taubérien fort de Littlewood* : soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, telle que $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. On suppose que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1 et que la somme de cette série entière vérifie $\lim_{x\to 1_-} f(x) = l \in \mathbb{C}$. Montrer que la série $\sum a_n$ converge et que sa somme vaut l.

III. Théorème d'Abel non tangentiel

On souhaite dans cette partie généraliser le lemme radial d'Abel et en déduire une application de ce résultat..

(1) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum a_n$ converge. On note pour $z \in \mathbb{C}$ telle que $|z| < 1$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_n$. Pour $0 \le \theta_0 < \frac{\pi}{2}$, on note $\Delta_{\theta_0, r} = \left\{ z \in \mathbb{C},\ |z| < 1,\ \exists \rho \in]0, R],\ \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0],\ z = 1 - \rho \mathrm{e}^{i\theta} \right\}$. Montrer que

pour un $r > 0$ suffisamment petit, la convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est uniforme sur $\Delta_{\theta_0,r}$.

(2) En déduire que $\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0,r}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

(3) Retrouver un résultat de la première partie.

(4) *Application :* On va en déduire que pour tout $t \in]0, 2\pi[$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kt)}{k} = \frac{\pi - t}{2}$.

Pour cela, pour tout $0 < r < 1$, on note $g_r(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kt)}{k} r^k$.

a. En dérivant g_r, montrer que pour tout t, $g_r(t) = \arctan \frac{r \sin t}{1 - r\cos t}$.

b. En appliquant le théorème d'Abel à la série entière $f_t(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(kt)}{k} z^k$, conclure.

IV. Théorème taubérien de Hardy-Littlewood

On souhaite dans cette partie montrer un autre théorème taubérien (qui permet de déduire d'informations sur f des informations sur la suite $(a_n)_n$).

(1) Soient $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ avec $P \leq f \leq Q$ et $\int_0^1 (Q - P) \leq \varepsilon$.

(2) Soit $(a_n)_{n\geq 0} \in {\mathbb{R}^+}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{1-x}$. Pour $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, montrer que $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n f(x^n) = \int_0^1 f$.

(3) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. On pourra considérer $g_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ avec $g_1(x) = 0$ si $x \in [0, 1/e]$ et $1/x$ sinon.