Programme de colles - Semaine 14 - du 27/1 au 31/1

Probabilités discrètes : Première partie du cours. Nous nous sommes arrêtés à la définition et premières propriétés de l'espérance, mais sans variance et aucune inégalité. Les étudiants manqueront encore un peu de pratique en début de semaine. Essayez de commencer la colle par des exercices relativement élémentaires. Les calculs d'espérance peuvent être l'occasion de refaire des calculs de sommes de séries entières. Les probabilités seront de nouveau au programme la semaine prochaine avec la fin du cours.

Espaces probabilisés : Tribu sur un ensemble Ω. On se borne à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables. Événements. Espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$. Probabilité sur un espace probabilisable, σ-additivité. Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

Propriétés élémentaires des probabilités Continuité croissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements croissante pour l'inclusion, alors :

$$P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big).$$

Continuité décroissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion, alors :

$$P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\Big).$$

Application : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone) :

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) = P\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\Big) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big) = P\Big(\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k\Big).$$

Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements, alors :

$$P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable. Intersection finie ou dénombrable d'évènements presque sûrs. Systèmes quasi-complets d'évènements.

Probabilités conditionnelles et indépendance : Extension des résultats vus en première année dans le cadre des univers finis : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formules de Bayes. Notations $P_B(A), P(A|B)$.
Par définition, les événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Lorsque $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\,|\,B) = P(A)$. Famille quelconque d'événements mutuellement indépendants. L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance. Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.

Espaces probabilisés discrets : Si Ω est un ensemble, une distribution de probabilités discrètes sur Ω est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par Ω et de somme 1. Support d'une distribution de probabilités discrète ; le support est au plus dénombrable.
Probabilité définie sur $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ associée à une distribution de probabilités discrètes sur Ω. Si Ω est au plus dénombrable, on obtient ainsi toutes les probabilités sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

Variables aléatoires discrètes : Étant donnés un ensemble E et un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, une variable aléatoire discrète définie sur Ω est une application X de Ω dans E telle que $X(\Omega)$ soit fini ou dénombrable et que, pour tout x de $X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{T}$. Notations $(X = x)$, $(X \in A)$, $\{X = x\}$, $\{X \in A\}$. Loi P_X de la variable aléatoire discrète X. Elle peut être au besoin définie sur un ensemble contenant $X(\Omega)$. Elle est déterminée par la distribution de probabilitès discrète $(P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$. Notations $X \sim Y$ (cela ne suppose pas que X et Y sont définies sur le même espace probabilisé).
Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle. Dans ce cas, notations des évènements $(X \geqslant x), (X \leqslant x), (X < x), (X > x)$.

Variable aléatoire $f(X)$. Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$. Loi conditionnelle d'une varaible aléatoire sachant un évènement A.
Couple de variables aléatoires ; cela définit une nouvelle variable aléatoire. Loi conjointe, lois marginales. Notation $P(X = x, Y = y)$. Détermination des mois marginales à partir de la loi conjointe. Extension aux n-uplets de variables aléatoires. Vecteurs aléatoires discrets.

Variables aléatoires discrètes : Couple de variables aléatoires indépendantes. Notation $X \perp Y$. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si la distribution de probabilités de (X, Y) est le produit des distributions de probabilités de X et Y. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.Famille quelconque de variables aléatoires indépendantes. Fonctions de variables aléatoires indépendantes : si $X \perp Y$, alors $f(X) \perp g(Y)$. Extension au cas de plus de deux variables. Lemme des coalitions : si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors pour tout m compris entre 1 et $n-1$, et toutes fonctions f et g, les variables $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.

Lois usuelles : Révisions des lois de sup (Bernoulli, binomiale). Pour p dans $]0, 1[$, loi géométrique de paramètre p. La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{G}(p)$ si $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$. Notations $\mathcal{G}(p)$, $X \sim \mathcal{G}(p)$. Interprétation comme rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes de paramètre p. Caractérisation comme loi sans mémoire : $P(X > n + k \mid X > n) = P(X > k)$.
Pour λ dans $\mathbb{R}_+^*$, loi de Poisson de paramètre λ. Variable de Poisson de paramètre λ. Notation $\mathcal{P}(\lambda)$, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Interprétation en termes d'événements rares.

Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe : Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, l'espérance de X est la somme, dans $[0, +\infty]$, de la famille $(P(X = x)\ x)_{x \in X(\Omega)}$. Notation $\mathrm{E}(X)$.

Pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, égalité $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.
Une variable aléatoire complexe X est dite d'espérance finie si la famille $(x\ P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable ; dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X. Notation $\mathrm{E}(X)$. La notation $X \in L^1$ signifie que X est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de L^1. Espérance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson.
Formule de transfert : soit X une variable aléatoire discrète, f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs complexes ; alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)\ P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable ; si tel est le cas : $\mathrm{E}(f(X)) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\ P(X = x)$.
Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire. Variables centrées. Caractérisation des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ d'espérance nulle. Si $|X| \leqslant Y$ et si $Y \in L^1$, alors $X \in L^1$.
Si X et Y sont dans L^1 et indépendantes, alors XY est dans L^1 et :

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\ \mathrm{E}(Y).$$

Extension au cas de n variables aléatoires.