Programme de colles - Semaine 15 - du 3/2 au 7/2

Probabilités discrètes : Tout le programme a été vu mais nous continuerons avec des compléments (sur les processus stochastiques, les marches aléatoires, les modes de convergence des variables aléatoires, *etc*) afin d'approfondir le cours, la semaine prochaine.

Variance, écart type et covariance : Si $\mathrm{E}\left(X^2\right) < +\infty$, X est d'espérance finie. La notation $X \in L^2$ signifie que X^2 est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de L^2.
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X et Y sont dans L^2, XY est dans L^1 et $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}\left(X^2\right)\ \mathrm{E}\left(Y^2\right)$. Cas d'égalité.
Pour $X \in L^2$, variance et écart type de X. Notations $\mathrm{V}(X), \sigma(X)$. Variables réduites. Caractérisation des variables aléatoires de variance nulle.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2$. Relation $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$. Si $\sigma(X) > 0$, la variable aléatoire $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite. Variance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson.
Covariance de deux variables aléatoires de L^2. Relation $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$. Cas de variables indépendantes. Variance d'une somme de n variables aléatoires, cas de variables décorrélées.

Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres : Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, où $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m = \mathrm{E}(X_1)$. Utilisation des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour établir des inégalités de concentration.
Démonstration du théorème de Weierstrass avec les polynômes de Bernstein.

Fonction génératrice d'une la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $G_X(t) = \mathrm{E}(t^X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)\ t^k$. La série entière définissant G_X est de rayon supérieur ou égal à 1 et converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1. Continuité de G_X. Détermination de la loi de X par G_X. La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathrm{E}(X) = {G_X}'(1)$. Utilisation de G_X pour le calcul de $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$. Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.