

## 3.2

### **Travail demandé :**

Il vous est demandé d'étudier puis de présenter le texte joint à travers un exposé de synthèse d'une durée comprise entre 15 et 20 minutes.

Si l'étude de la totalité du dossier et la préparation d'un exposé cohérent dans la durée impartie ne vous paraît pas possible, vous pouvez décider de vous limiter à une partie du dossier.

### **Remarques générales :**

1. Les textes proposés, quelle que soit leur origine, peuvent présenter des défauts (coquilles typographiques, négligences ou sous-entendus de l'auteur, voire erreurs...) qui, sauf exception, n'ont pas été corrigés.
2. Les textes proposés peuvent contenir des exercices qu'il n'est pas demandé de résoudre. Néanmoins, vous pouvez vous aider des énoncés de ces exercices pour enrichir votre exposé.
3. Vous pouvez annoter les documents qui vous sont fournis. Vos annotations ne seront pas regardées par l'examinateur.

# Les courbes de Bézier

## 1 Introduction

---

Les courbes de Bézier ont été inventées vers la fin des années 1950 par un ingénieur des usines Renault nommé Pierre Bézier. L'objectif était de faire tracer des courbes "comme à main levée" par l'ordinateur, notamment pour tracer des profils de carrosserie<sup>2</sup>, etc. Un autre ingénieur – de chez Citroën cette fois – Paul de Casteljaou inventa, à la même époque un algorithme de numérisation de ces courbes. Il faut bien comprendre que, sur le plan mathématique, ces courbes n'ont rien d'extraordinaire. Il s'agit simplement de courbes algébriques unicursales, cubiques le plus souvent. En revanche, l'utilisation qui en a été faite est très astucieuse.

Signalons qu'une autre application importante de ces courbes concerne la typographie et notamment les polices de caractères. En particulier, les polices Postscript sont calculées à partir des courbes de Bézier. L'intérêt est que les courbes sont recalculées lors de chaque agrandissement, ce qui évite les phénomènes de "pixellisation" c'est-à-dire d'apparition de la grille sous-jacente comme sur la figure ci-dessous.

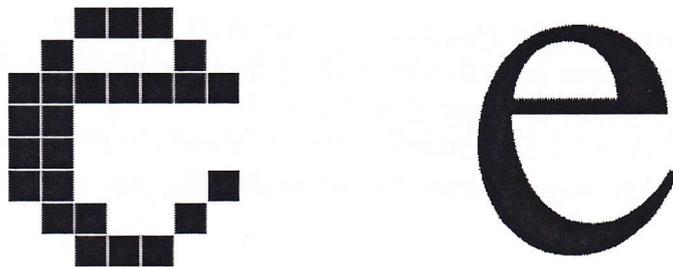


FIGURE 1 – À gauche la lettre e grossie avec un ordinateur des années 1980, à droite avec un ordinateur actuel

---

2. Y compris dans l'espace.

Enfin, les courbes de Bézier sont aussi utilisées dans certains logiciels de dessin (par exemple le logiciel *Paint* de *Windows*).

## 2 Courbes de Bézier et polynômes de Bernstein

### 2.1 La problématique

On considère  $n + 1$  points du plan ( $n \geq 1$ , le plus souvent  $n = 3$ ),  $A_0, A_1, \dots, A_n$  et on va définir une courbe paramétrée  $M(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , associée à ces points, où  $M(t)$  est un barycentre des  $A_i$  :

$$M(t) = B_0(t)A_0 + B_1(t)A_1 + \dots + B_n(t)A_n.$$

On demande que les coefficients  $B_i(t)$  soient  $\geq 0$ , de somme 1 et qu'ils dépendent de  $t$  de manière la plus régulière possible. La solution adoptée par P. Bézier consiste à prendre les polynômes de Bernstein :

**2.1 Définition.** Les polynômes de Bernstein d'ordre  $n$  sont les polynômes  $B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ . Lorsque  $n$  est fixé on notera simplement  $B_i$  au lieu de  $B_{i,n}$ .

On vérifie aussitôt que les  $B_i$  sont  $\geq 0$  sur  $[0, 1]$  et que leur somme est bien égale à 1 (c'est la formule du binôme appliquée à  $(1-t+t)^n$ ).

**2.2 Remarques.** 1) On a  $B_{0,n}(t) = (1-t)^n$  et  $B_{n,n}(t) = t^n$ .

2) On notera que les polynômes  $B_i(t)$  forment une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré  $\leq n$ . (Regarder la valuation des polynômes.)

3) Les polynômes  $B_i$  forment ce qu'on appelle une partition de l'unité. Ils sont bien connus en analyse. En particulier, si  $f$  est une fonction continue sur  $[0, 1]$  et si l'on pose :

$$B_n(f) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) B_i(t)$$

on montre que la suite de polynômes  $B_n(f)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$  (cela montre le théorème de Weierstrass).

## 2.2 Propriétés des polynômes de Bernstein

**2.3 Proposition.** 0) On a  $B_{i,n}(0) = 0$  pour  $i > 0$  et  $B_{0,n}(0) = 1$ . On a  $B_{i,n}(1) = 0$  pour  $i < n$  et  $B_{n,n}(1) = 1$ .

1) La fonction  $B_{i,n}(t)$  admet un maximum sur  $[0, 1]$ , au point  $\frac{i}{n}$ . Ce maximum vaut  $\binom{n}{i} \left(\frac{i}{n}\right)^i \left(1 - \frac{i}{n}\right)^{n-i}$ .

2) On a une relation de récurrence :

$$(*) \quad B_{i,n}(t) = (1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t).$$

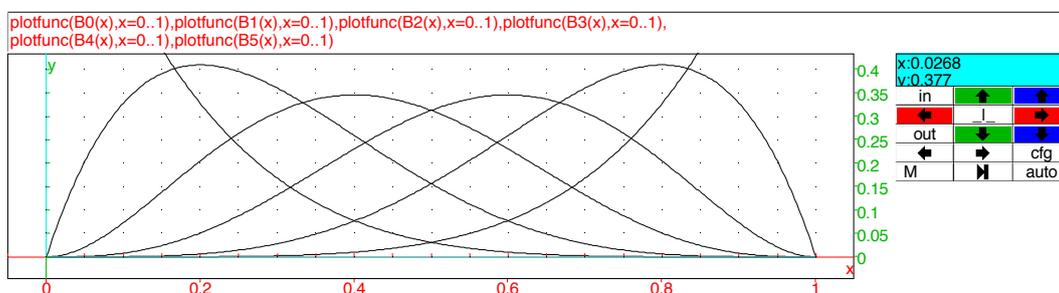


FIGURE 2 – Les polynômes de Bernstein pour  $n = 5$  avec leurs bosses en  $i/n$

*Démonstration.* Le point 0) est évident. Pour 1), les cas  $i = 0$  et  $i = n$  sont clairs. Supposons donc  $0 < i < n$ . On calcule la dérivée :

$$B'_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^{i-1} (1-t)^{n-i-1} (i - nt).$$

On voit qu'elle est positive pour  $t < i/n$  et négative au-delà et on a le résultat.

Le point 2) est conséquence de la propriété du triangle de Pascal :  $\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}$ .

## 2.3 Définition et propriétés des courbes de Bézier

Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé, ce qui permet de l'identifier à  $\mathbf{R}^2$ .

**2.4 Définition.** Soient  $A_0, A_1, \dots, A_n$   $n + 1$  points distincts du plan. La courbe de Bézier (d'ordre  $n$ ) associée à ces points est la courbe paramétrée

$\mathcal{C}$  définie par :  $M(t) = \sum_{i=0}^n B_i(t)A_i$ , pour  $t \in [0, 1]$ , où les  $B_i$  sont les polynômes de Bernstein d'ordre  $n$ . On la note  $\mathcal{B}(A_0, A_1, \dots, A_n)$ .

Si  $A_i$  est le point  $(x_i, y_i)$ , la notation signifie que le point  $M(t)$  a pour coordonnées  $x(t) = \sum_{i=0}^n B_i(t)x_i$  et  $y(t) = \sum_{i=0}^n B_i(t)y_i$ .

**2.5 Théorème.** 0) La courbe  $\mathcal{C}$  est une courbe  $C^\infty$ .

1) On a  $M(0) = A_0$  et  $M(1) = A_n$ .

2) La droite  $(A_0A_1)$  (resp.  $A_{n-1}A_n$ ) est tangente à  $\mathcal{C}$  en  $A_0$  (resp.  $A_n$ ).

3) La courbe  $\mathcal{C}$  est dans l'enveloppe convexe des  $A_i$ .

*Démonstration.* La courbe est  $C^\infty$  puisque les coordonnées sont des fonctions polynomiales et le point 1) vient de 2.3.0.

La tangente en  $A_0$  a pour vecteur directeur :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}(0) = \sum_{i=0}^n B'_i(0) \overrightarrow{OA_i}.$$

Les  $B'_i$  ont été calculés plus haut. On vérifie aussitôt qu'on a  $B'_0(0) = -n$ ,  $B'_1(0) = n$  et  $B'_i(0) = 0$  pour  $i \geq 2$ . Le vecteur cherché est donc égal à  $n\overrightarrow{A_0A_1}$  ce qui donne le résultat.

Le calcul est analogue pour  $t = 1$ . Cette fois on a  $B'_n(1) = n$ ,  $B'_{n-1}(1) = -n$  et  $B'_i(1) = 0$  pour  $i \leq n-2$ , de sorte que le vecteur tangent est  $n\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ .

Le point 3) est évident puisque  $M(t)$  est un barycentre des  $A_i$  à coefficients positifs.

**2.6 Remarques.** 1) Les points  $A_0, A_n$  (resp.  $A_i$  pour  $i = 1, \dots, n-1$ ) sont appelés points d'ancrage (resp. de contrôle) de la courbe. On notera que la courbe ne passe pas en général par ces points<sup>3</sup>.

2) Comme les points  $A_i$  sont arbitraires et que les polynômes de Bernstein forment une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré  $\leq n$ , cela montre que les courbes de Bézier d'ordre  $n$  sont toutes les courbes définies par des représentations paramétriques polynomiales de degré  $\leq n$ .

3) On montre que  $\mathcal{C}$  est une partie d'une courbe algébrique de degré  $\leq n$  (voir Annexe 1).

4) Une courbe de Bézier  $\mathcal{C}$  ne peut pas être un arc de cercle non réduit à un point (voir Annexe 2).

5) Pour  $n = 1$ , la courbe  $\mathcal{C}$  est égale au segment de droite  $[A_0A_1]$ . Nous allons étudier plus précisément les cas  $n = 2$  et  $n = 3$ .

---

3. Contrairement à d'autres courbes, les  $B$ -splines, utilisées aussi en typographie, et où l'on impose qu'elles passent par un nombre fini de points.

## 2.4 Les courbes de Bézier d'ordre 2

On considère trois points distincts  $A, B, C$  du plan. On pose  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$ ,  $C = (c_1, c_2)$ . On considère la courbe de Bézier  $\Gamma$  définie par  $M(t) = (1-t)^2A + 2t(1-t)B + t^2C$ . Elle passe par  $A$  et  $C$  et elle est tangente respectivement à  $(AB)$  et  $(BC)$  en ces points. Si  $A, B, C$  sont alignés, la courbe  $\Gamma$  est égale au segment  $[AC]$ . Sinon on a :

**2.7 Théorème.** *On suppose  $A, B, C$  non alignés. La courbe  $\Gamma$  est une parabole.*

*Démonstration.* On a les formules :

$$x(t) = at^2 + bt + c \quad \text{et} \quad y(t) = a't^2 + b't + c'$$

avec  $a = a_1 - 2b_1 + c_1$ ,  $b = 2(b_1 - a_1)$ ,  $a' = a_2 - 2b_2 + c_2$ ,  $b' = 2(b_2 - a_2)$ . On note que  $a$  et  $a'$  ne sont pas tous deux nuls (sinon  $B$  est le milieu de  $[AC]$ ).

On élimine les termes en  $t^2$  entre ces équations :  $a'x - ay = (a'b - ab')t + a'c - ac'$ . Si le coefficient<sup>4</sup> de  $t$  est nul on obtient une droite, ce qui est absurde puisque les points  $A, B, C$  ne sont pas alignés (ne pas oublier que  $(AB)$  et  $(BC)$  sont tangentes à la courbe). Sinon, on a :

$$t = \frac{a'x - ay + ac' - a'c}{a'b - ab'}$$

Si on désigne par  $X$  cette quantité (ce qui revient à faire un changement de coordonnées cartésiennes) l'équation de  $\Gamma$  s'écrit  $y = a'X^2 + b'X + c'$  et on a bien une parabole.

Pour d'autres approches de ce résultat, voir Annexe 2.

## 2.5 Les courbes de Bézier d'ordre 3

Cette fois on a quatre points  $A, B, C, D$  et on pose :

$$M(t) = (1-t)^3A + 3(1-t)^2tB + 3(1-t)t^2C + t^3D.$$

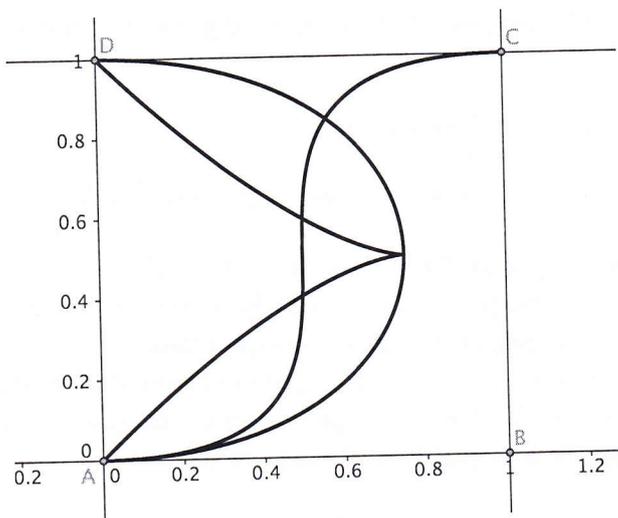
Il résulte d'un théorème général qui sera prouvé dans l'annexe 1 que la courbe  $\mathcal{C}$  est une (portion de) cubique, c'est-à-dire qu'elle est définie par une équation  $F(x, y) = 0$  où  $F$  est un polynôme de degré  $\leq 3$ .

---

4. Précisément, ce coefficient vaut  $a'b - ab' = 2(-a_1b_2 + b_1a_2 + c_1b_2 - b_1c_2 + a_1c_2 - c_1a_2)$  et c'est le déterminant obtenu en bordant d'une ligne de 1 la matrice des coordonnées de  $A, B, C$ .

### 2.5.1 Un exercice

On donne les points  $A = (0, 0)$ ,  $B = (1, 0)$ ,  $C = (1, 1)$  et  $D = (0, 1)$ . Tracer et comparer les courbes de Bézier  $\alpha = \mathcal{B}(A, B, C, D)$  et  $\beta = \mathcal{B}(A, B, D, C)$ .



Voici les équations paramétriques de la courbe  $\alpha$  :  $x(t) = 3t - 3t^2$  et  $y(t) = 3t^2 - 2t^3$  et celles de  $\beta$  :  $x(t) = 3t - 6t^2 + 4t^3$  et  $y(t) = 3t^2 - 2t^3$ .

Pour construire ces courbes on étudie les fonctions sur  $[0, 1]$ . Dans le cas de  $\alpha$ ,  $y$  est croissante et  $x$  a un maximum en  $t = 1/2$  qui vaut  $3/4$ . Dans le cas de  $\beta$  les deux fonctions sont croissantes.

Si l'on revient à l'écriture en  $t$  et  $1 - t$  on note aussitôt qu'on a, pour  $\alpha$ ,  $x(1 - t) = x(t)$  et  $y(1 - t) = 1 - y(t)$  (sans calcul!) donc une symétrie par rapport à la droite  $y = 1/2$  et pour  $\beta$ ,  $x(1 - t) = 1 - x(t)$  et  $y(1 - t) = 1 - y(t)$  donc une symétrie par rapport au point  $(1/2, 1/2)$ . Ce dernier point est un point d'inflexion de  $\beta$ .

En fait, l'exercice aurait dû aussi demander<sup>5</sup> l'étude de la courbe  $\gamma = \mathcal{B}(A, C, B, D)$  qui présente un point de rebroussement pour  $t = 1/2$  et qui est aussi représentée ci-dessus.

Sur cet exemple on peut montrer que les courbes en question sont des portions de courbes algébriques. Faisons-le avec  $\alpha$ . Dire qu'un point  $(x, y)$  est sur  $\alpha$  c'est dire qu'il existe  $t$  tel que l'on ait à la fois  $x = -3t^2 + 3t$  et

5. Il y a 24 courbes possibles, mais comme le groupe des isométries du carré est d'ordre 8, il y a seulement trois courbes possibles, à isométrie près.

$y = -2t^3 + 3t^2$ . Un résultat général d'algèbre montre qu'alors les coordonnées  $x, y$  sont liées par une relation  $R(x, y) = 0$  où  $R$  est un polynôme appelé **résultant** des deux polynômes en  $t$ ,  $3t^2 - 3t + x$  et  $2t^3 - 3t^2 + y$ . Démontrons ce résultat dans ce cas particulier. On a, en multipliant les équations précédentes par des puissances de  $t$ , le système :

$$(S) \quad \begin{cases} 2t^4 - 3t^3 + yt = 0 \\ 2t^3 - 3t^2 + y = 0 \\ 3t^4 - 3t^3 + xt^2 = 0 \\ 3t^3 - 3t^2 + xt = 0 \\ 3t^2 - 3t + x = 0 \end{cases} .$$

Dire que le point  $(x, y)$  est sur  $\alpha$  implique qu'il existe  $t$  tel que ces équations soient toutes satisfaites. Le système linéaire homogène  $5 \times 5$  ci-dessus admet donc la solution non triviale  $(t^4, t^3, t^2, t, 1)$  et donc, son déterminant est nul. C'est ce déterminant qui est le résultant :

$$R(x, y) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & y & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & y \\ 3 & -3 & x & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & x & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & x \end{vmatrix} = 4x^3 + 9x^2 + 27y^2 - 27y.$$

Les logiciels de calcul formel font ce travail automatiquement. Par exemple, sur *xcas*, la commande est `resultant(x-P(t), y-Q(t), t)`. Nous revenons dans l'annexe 1 sur ce thème.

### 3 Implantation avec Geogebra

Il y a deux manières d'implanter les courbes de Bézier sur Geogebra. Nous décrivons ces manières dans le cas  $n = 3$ , mais le cas général est analogue. On se donne quatre points  $A, B, C, D$ . La première manière, que nous dirons dynamique, consiste à introduire un curseur  $t$ , variant de 0 à 1 et à définir, dans la fenêtre de saisie :

$$M = (1 - t)^3 * A + 3 * (1 - t)^2 * t * B + 3 * (1 - t) * t^2 * C + t^3 * D$$

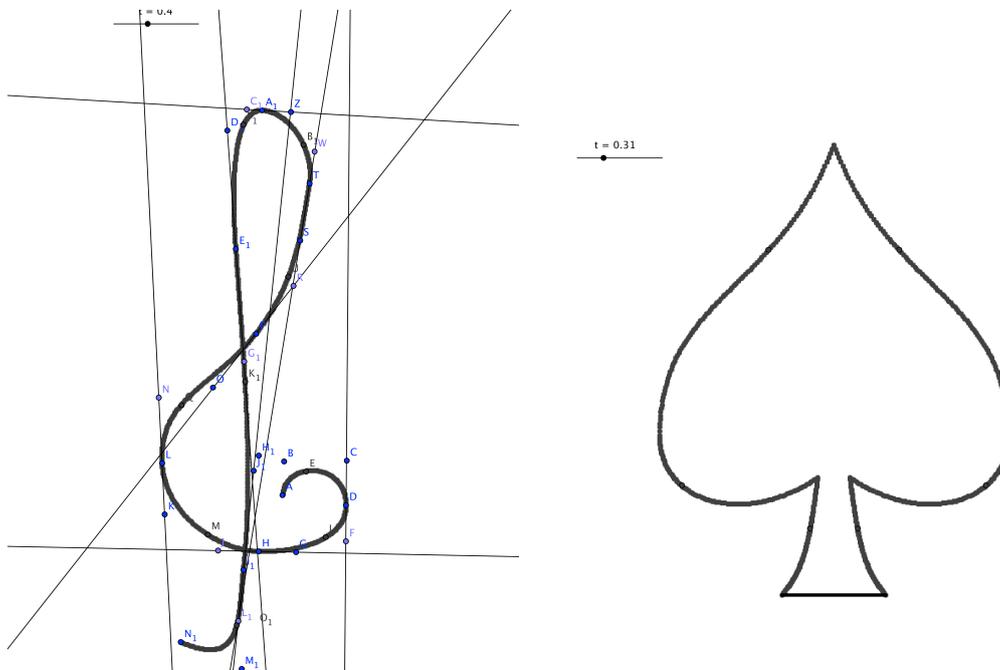
et il ne reste plus qu'à activer la trace du point  $M$  et à animer  $t$  pour voir se tracer la courbe. Le défaut de cette manière est que si on déplace les points de base il faut relancer l'animation pour y voir quelque chose.

La seconde manière, dite statique, consiste à rentrer la courbe paramétrée, la commande est la suivante : **courbe**  $[P(t), Q(t), t, 0, 1]$ . Par exemple, avec quatre points  $A, B, C, D$ , on rentre :

$$P(t) = (1-t)^3 * x(A) + 3 * (1-t)^2 * t * x(B) + 3 * (1-t) * t^2 * x(C) + t^3 * x(D).$$

Là, si l'on bouge les points de base, la courbe se déforme en direct.

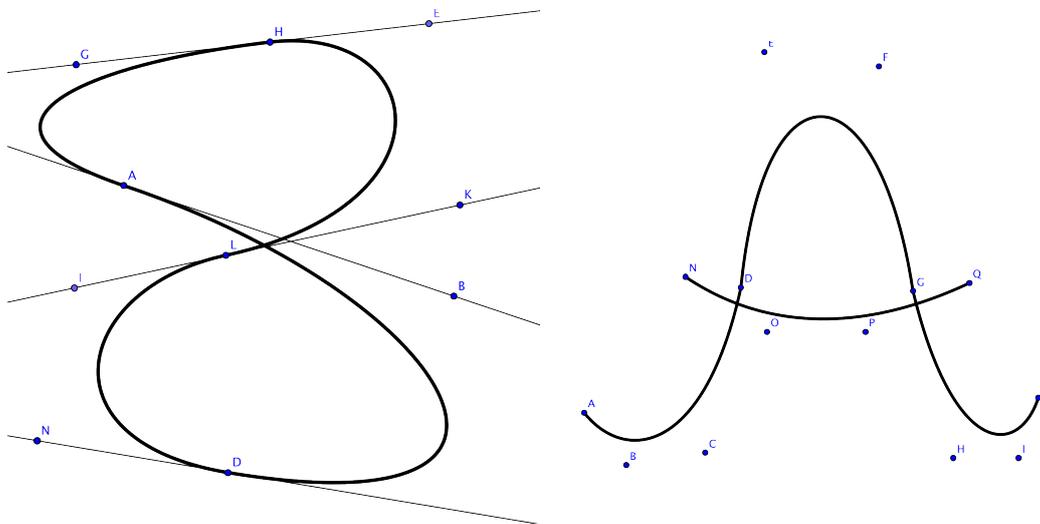
Bien entendu, on peut mettre ensemble diverses courbes pour obtenir des dessins. Si l'on veut des courbes de classe  $C^1$  il faut veiller à aligner les tangentes en un point. On peut ensuite, selon les souhaits, supprimer ou non les lignes de construction. Voici quelques exemples.



Une fois réalisées ces procédures, on en fait des outils que l'on enregistre pour pouvoir les réutiliser.

## 4 Construction récursive des courbes de Bézier

Le principe de ce paragraphe est de construire une courbe de Bézier d'ordre  $n$  à partir de deux courbes de Bézier d'ordre  $n - 1$ . Précisément, on a le résultat suivant :



**4.1 Proposition.** On considère  $n + 1$  points  $A_0, A_1, \dots, A_n$  du plan. On note  $M(t)$  (resp.  $P(t)$ , resp.  $Q(t)$ ) le point courant de la courbe de Bézier  $\mathcal{B}(A_0, A_1, \dots, A_n)$  (resp.  $\mathcal{B}(A_0, A_1, \dots, A_{n-1})$ , resp.  $\mathcal{B}(A_1, \dots, A_n)$ ). Alors, on a la formule  $M(t) = (1 - t)P(t) + tQ(t)$ .

*Démonstration.* On a, par définition,  $M(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)A_i$ ,  $P(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}A_i$

et  $Q(t) = \sum_{i=1}^n B_{i-1,n-1}(t)A_i$ . (Pour la dernière formule, on pose  $A'_j = A_{j+1}$

pour  $j = 0, \dots, n - 1$  et on a  $Q(t) = \sum_{j=0}^{n-1} B_{j,n-1}A'_j$  par la même formule

que  $P(t)$ .) La conclusion est alors évidente grâce à l'égalité  $B_{i,n}(t) = (1 - t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t)$ .

**4.2 Remarques.** 1) Le sens cinématique de cette proposition est clair : on imagine que  $P(t)$  et  $Q(t)$  parcourent respectivement  $\mathcal{B}(A_0, A_1, \dots, A_{n-1})$  et  $\mathcal{B}(A_1, \dots, A_n)$  avec une vitesse uniforme et l'on fait parcourir à  $M(t)$  le segment  $[P(t)Q(t)]$ .

2) Avec Geogebra, cela permet de fabriquer sans peine un outil pour tracer les courbes d'ordre  $n$  quand on en dispose pour celles d'ordre  $n - 1$ . En particulier on peut tracer  $\mathcal{B}(A, B, C)$  à partir de  $\mathcal{B}(A, B)$  et  $\mathcal{B}(B, C)$ , puis  $\mathcal{B}(A, B, C, D)$  à partir de  $\mathcal{B}(A, B, C)$  et  $\mathcal{B}(B, C, D)$ .

3) On peut d'ailleurs, en allant au bout de la méthode, obtenir une animation assez spectaculaire, disons pour la courbe  $\mathcal{B}(A, B, C, D)$ . Elle consiste à prendre des points :  $M \in [AB]$ ,  $N \in [BC]$ ,  $P \in [CD]$ ,  $I \in [MN]$  et  $J \in [NP]$ ,

et enfin  $Q \in [IJ]$  et à animer tous ces points avec la même vitesse uniforme (autrement dit on prend  $M = (1-t)A + tB$ , etc. ). On voit alors que le point  $Q$  décrit la courbe de Bézier  $\mathcal{B}(A, B, C, D)$ . Dans cette opération, les points  $I, J$  décrivent les courbes  $\mathcal{B}(A, B, C)$  et  $\mathcal{B}(B, C, D)$  et  $Q$  parcourt la droite  $[IJ]$  comme dans 4.1.

On notera aussi que la figure obtenue ressemble beaucoup à celle de l'algorithme de Casteljau.

## 5 L'algorithme de Casteljau

### 5.1 Définition

Une question non évidente est de savoir comment procède un ordinateur pour construire une courbe, par exemple de Bézier. Même si l'apparence de la courbe est continue, il est clair qu'elle est en réalité formée de points isolés (les pixels de l'écran) et qu'elle n'est qu'une approximation de la courbe considérée. Dans le cas d'une courbe de Bézier, disons  $\mathcal{B}(A, B, C, D)$ , une première approximation grossière consiste à l'approcher par la ligne polygonale  $[AB] \cup [BC] \cup [CD]$ . L'algorithme de Casteljau permet d'affiner cette approximation en ajoutant progressivement des points de contrôle.

Rappelons la notion de concaténation (ou mise bout à bout) de deux courbes :

**5.1 Définition.** Soient  $\beta$  et  $\gamma$  deux courbes paramétrées par le segment  $[0, 1]$ . On note aussi  $\beta(t)$  et  $\gamma(t)$  les fonctions  $(x(t), y(t))$  correspondantes. On appelle courbe obtenue par **concaténation** (ou mise bout à bout) des courbes  $\beta, \gamma$  la courbe  $\alpha$  définie comme suit sur  $[0, 1]$  :

- Pour  $t \in [0, 1/2]$  on pose  $\alpha(t) = \beta(2t)$ .
- Pour  $t \in [1/2, 1]$  on pose  $\alpha(t) = \gamma(2t - 1)$ .

On note  $\alpha = \beta \vee \gamma$ .

On est dans le cas  $n = 3$ . On se reportera à la figure 3.

On note  $mil(A, B)$  le milieu des points  $A, B$ . Au départ on a quatre points  $A_0, A_1, A_2, A_3$  et on cherche à approcher la courbe de Bézier  $\alpha = \mathcal{B}(A_0, A_1, A_2, A_3)$  associée à ces points. On construit d'abord le point  $M = mil(A_1, A_2)$ , puis on définit des points  $B_i$  :  $B_0 = A_0, B_1 = mil(A_0, A_1), B_2 = mil(B_1, M)$  et des points  $C_i$  :  $C_3 = A_3, C_2 = mil(A_2, A_3), C_1 = mil(M, C_2)$ .

On a alors le théorème suivant :

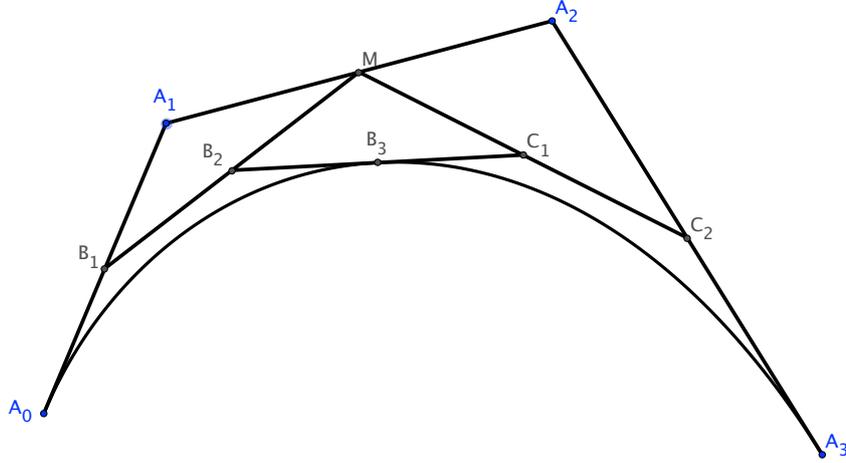


FIGURE 3 – L’algorithme de Casteljau

**5.2 Théorème.** *Le point  $B_3 = C_0$ , milieu de  $[B_2C_1]$  est égal à  $\alpha(1/2)$  et la courbe  $\alpha$  est obtenue en concaténant les courbes  $\beta = \mathcal{B}(B_0, B_1, B_2, B_3)$  et  $\gamma = \mathcal{B}(C_0, C_1, C_2, C_3)$ .*

*Démonstration.* On a  $\alpha(t) = (1-t)^3 A_0 + 3(1-t)^2 t A_1 + 3(1-t)t^2 A_2 + t^3 A_3$ . On calcule les points intermédiaires :

$$\begin{aligned}
 B_0 &= A_0, & B_1 &= \frac{A_0 + A_1}{2}, & C_2 &= \frac{A_2 + A_3}{2}, & M &= \frac{A_1 + A_2}{2}, \\
 B_2 &= \frac{B_1 + M}{2} = \frac{A_0 + 2A_1 + A_2}{4}, & C_1 &= \frac{C_2 + M}{2} = \frac{A_1 + 2A_2 + A_3}{4}, \\
 B_3 = C_0 &= \frac{B_2 + C_1}{2} = \frac{A_0 + 3A_1 + 3A_2 + A_3}{8}.
 \end{aligned}$$

On constate qu’on a  $B_3 = \alpha(1/2)$  ce qui montre que ce point est bien sur  $\alpha$ . Pour montrer que la courbe  $\alpha$  est bien la concaténée de  $\beta, \gamma$  il faut montrer d’abord qu’on a, pour  $t \in [0, 1/2]$ ,  $\alpha(t) = \beta(2t)$ , puis, pour  $t \in [1/2, 1]$ ,  $\alpha(t) = \gamma(2t - 1)$ . Faisons le premier calcul, assez saumâtre, le second est analogue.

On a la formule :

$$\beta(2t) = (1-2t)^3 B_0 + 3(1-2t)^2 (2t) B_1 + 3(1-2t)(2t)^2 B_2 + (2t)^3 B_3.$$

On remplace les  $B_i$  par leurs valeurs en fonction des  $A_i$  et on regroupe les termes. Seul le terme en  $B_3$  a une contribution sur  $A_3$ , qui est exactement  $t^3$ . Sur  $A_2$  on a  $3(1-2t)t^2 + 3t^3 = 3t^2(1-t)$  comme attendu. Sur  $A_1$  on a :

$$3t(1-2t)^2 + 6t^2(1-2t) + 3t^3 = 3t(1-t)^2.$$

Enfin, sur  $A_0$ , on a :

$$(1-2t)^3 + 3t(1-2t)^2 + 3t^2(1-2t) + t^3$$

et on reconnaît le développement de  $((1-2t)+t)^3 = (1-t)^3$ .

**5.3 Remarques.** 0) Contrairement à la construction récursive qui permet de construire une courbe de Bézier d'ordre  $n$  à partir des courbes d'ordres plus petits, on écrit ici la courbe comme réunion de deux sous-courbes de même ordre.

1) L'algorithme donne la tangente à  $\alpha$  au point  $t = 1/2$ , c'est la droite  $(B_2C_1)$ . En effet, c'est à la fois  $(B_2B_3)$  sur la courbe  $\beta$  et  $(C_0C_1)$  sur la courbe  $\gamma$ . On peut d'ailleurs le vérifier par le calcul. On a :

$$\alpha'(1/2) = \frac{3}{4}(A_3 + A_2 - A_1 - A_0) = 3\overrightarrow{B_2C_1}.$$

2) On notera que l'algorithme de Casteljau s'exprime très simplement en termes de matrices avec comme seuls coefficients des inverses de puissances de 2 :

$$\begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}.$$

## 5.2 Utilisation

Pour utiliser Casteljau, on part de quatre points définissant la courbe  $\alpha$  et on produit les points intermédiaires donnant  $\beta$  et  $\gamma$ , puis on recommence avec ces nouveaux points. Pour avoir un tracé on peut utiliser simplement l'approximation de la courbe  $\mathcal{B}(A, B, C, D)$  par la ligne brisée  $[AB] \cup [BC] \cup [CD]$ . Ce qui est une approximation grossière avec ces seuls quatre points s'avère beaucoup plus convaincant quand on utilise les points de Casteljau appliqué trois, quatre fois ou plus si affinité.

Avec l'algorithme de Casteljau, on peut obtenir un outil Geogebra donnant un polygone qui approche la courbe de Bézier donnée par quatre points. La figure 4 est réalisée avec l'algorithme de Casteljau utilisé quatre fois.

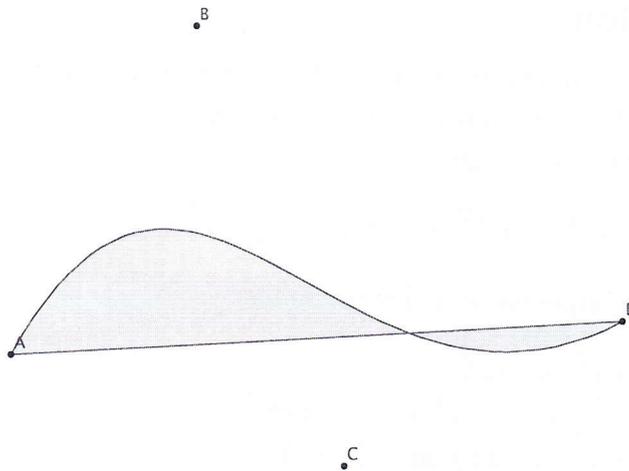


FIGURE 4 – Une courbe de Bézier approchée par Casteljau

### 5.3 Compléments

Les notations utilisées ci-dessus ne sont sans doute pas optimales. Si on reprend la courbe  $\mathcal{B}(A_0, A_1, A_2, A_3)$ , une façon plus logique, mais un peu lourde, de noter consiste à poser  $A_{01} = \text{mil}(A_0, A_1)$  et de même pour  $A_{12}$  et  $A_{23}$ , puis  $A_{012} = \text{mil}(A_{01}, A_{12})$  et de même pour  $A_{123}$  et enfin  $A_{0123} = \text{mil}(A_{012}, A_{123})$ . Avec ces notations, la courbe  $\mathcal{B}(A_0, A_1, A_2, A_3)$  s'obtient par concaténation de  $\mathcal{B}(A_0, A_{01}, A_{012}, A_{0123})$  et de  $\mathcal{B}(A_{0123}, A_{123}, A_{23}, A_3)$ . Cette notation permet de généraliser l'algorithme aux courbes de Bézier d'ordre  $n$  et d'obtenir la formule :

$$\mathcal{B}(A_0, \dots, A_n) = \mathcal{B}(A_0, A_{01}, A_{012}, \dots, A_{01\dots n}) \vee \mathcal{B}(A_{01\dots n}, A_{1\dots n}, \dots, A_{n-1, n}, A_n).$$

Une autre généralisation possible de l'algorithme de Casteljau consiste à prendre, au lieu des milieux, des barycentres de coefficients  $1 - \lambda, \lambda$  avec  $\lambda \in ]0, 1[$ . On retrouve exactement la figure obtenue en combinant les mouvements uniformes, voir 4.2.3.

## 6 Une variante : définition avec les vecteurs de contrainte

---

## 6.1 Définition

On définit une courbe paramétrée  $\Gamma$  en se donnant quatre vecteurs  $\vec{V}_0, \vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$  (dits de contrainte) et trois fonctions  $f_1, f_2, f_3$  définies sur  $[0, 1]$ . On pose alors, avec une origine  $O$  :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{V}_0 + f_1(t)\vec{V}_1 + f_2(t)\vec{V}_2 + f_3(t)\vec{V}_3.$$

Les **contraintes** imposées sont les suivantes :

- $C_0)$   $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{V}_0 := \overrightarrow{OM}_0,$
- $C_1)$   $\overrightarrow{OM}(1) = \vec{V}_0 + \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 := \overrightarrow{OM}_1,$
- $C'_0)$  le vecteur  $\vec{V}_1$  est tangent à  $\Gamma$  en  $M_0,$
- $C'_1)$  le vecteur  $\vec{V}_3$  est tangent à  $\Gamma$  en  $M_1.$

**6.1 Définition.** Avec les notations et les contraintes ci-dessus, la courbe  $\Gamma$  est la courbe de Bézier définie par les vecteurs  $\vec{V}_i$  et les fonctions  $f_i$ .

**6.2 Proposition.** Les conditions précédentes sont réalisées si les fonctions  $f_i$  vérifient les conditions suivantes :

- 1)  $f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = 0,$
- 2)  $f_1(1) = f_2(1) = f_3(1) = 1,$
- 3)  $f'_2(0) = f'_3(0) = 0$  et  $f'_1(0) \neq 0,$
- 4)  $f'_1(1) = f'_2(1) = 0$  et  $f'_3(1) \neq 0.$

Il existe des polynômes de degré 3,  $f_1, f_2, f_3,$  vérifiant ces conditions. On peut de plus imposer aux polynômes  $f_i$  les conditions supplémentaires suivantes :  $f''_3(0) = f''_1(1) = 0$  et ils sont alors uniquement déterminés.

*Démonstration.* Il est clair que les condition 1) et 2) impliquent respectivement  $C_0)$  et  $C_1)$ . On a alors  $\overrightarrow{M_0M}(t) = f_1(t)\vec{V}_1 + f_2(t)\vec{V}_2 + f_3(t)\vec{V}_3$  et le vecteur tangent à  $\Gamma$  en  $M_0$  est le vecteur dérivé  $f'_1(0)\vec{V}_1 + f'_2(0)\vec{V}_2 + f'_3(0)\vec{V}_3$ . Il est donc clair que la condition 3) assure  $C'_0)$ . Enfin, on a :

$$\overrightarrow{M_1M}(t) = (f_1(t) - 1)\vec{V}_1 + (f_2(t) - 1)\vec{V}_2 + (f_3(t) - 1)\vec{V}_3$$

et le vecteur tangent à  $\Gamma$  en  $M_1$  est  $f'_1(1)\vec{V}_1 + f'_2(1)\vec{V}_2 + f'_3(1)\vec{V}_3$ , d'où le fait que 4) implique  $C'_1)$ .

Pour le dernier point, on cherche  $f_i$  sous la forme  $f_i(t) = a_it^3 + b_it^2 + c_it + d_i$ . La condition 1) impose que les  $d_i$  sont nuls, la 2) que l'on a  $a_i + b_i + c_i = 1$  pour  $i = 1, 2, 3$ . La condition 3) donne  $c_2 = c_3 = 0$  mais  $c_1 \neq 0$ , la condition 4) mène à  $3a_1 + 2b_1 + c_1 = 0$  et  $3a_2 + 2b_2 = 0$ , mais  $3a_3 + 2b_3 \neq 0$ . Enfin, les conditions supplémentaires donnent respectivement  $b_3 = 0$  et  $6a_1 + 2b_1 = 0$ .

On obtient trois systèmes linéaires en les coefficients de  $f_1, f_2, f_3$  et on vérifie que les trois sont de Cramer. On trouve  $a_3 = 1, b_3 = c_3 = 0$ , puis  $a_2 = -2, b_2 = 3, c_2 = 0$  et enfin  $a_1 = 1, b_1 = -3$  et  $c_1 = 3$ .

## 6.2 Le lien avec les courbes de Bézier ordinaires

La proposition suivante montre qu'une courbe de Bézier ordinaire peut être définie avec des vecteurs de contrainte :

**6.3 Proposition.** *Soit  $\Gamma = \mathcal{B}(A_0, A_1, A_2, A_3)$  la courbe de Bézier associée aux points  $A_i$  et soit  $O$  une origine. La courbe  $\Gamma$  est la courbe associée aux vecteurs  $\vec{V}_0 = \overrightarrow{OA_0}, \vec{V}_1 = \overrightarrow{A_0A_1}, \vec{V}_2 = \overrightarrow{A_1A_2}, \vec{V}_3 = \overrightarrow{A_2A_3}$  et aux fonctions  $f_1(t) = t^3 - 3t^2 + 3t, f_2(t) = -2t^3 + 3t^2$  et  $f_3(t) = t^3$ .*

*Démonstration.* Par définition, on a :

$$\overrightarrow{OM}(t) = (1-t)^3 \overrightarrow{OA_0} + 3(1-t)^2 t \overrightarrow{OA_1} + 3(1-t)t^2 \overrightarrow{OA_2} + t^3 \overrightarrow{OA_3}$$

et le résultat est immédiat en écrivant  $\overrightarrow{OA_0} = \vec{V}_0, \overrightarrow{OA_1} = \vec{V}_0 + \vec{V}_1, \overrightarrow{OA_2} = \vec{V}_0 + \vec{V}_1 + \vec{V}_2$  et  $\overrightarrow{OA_3} = \vec{V}_0 + \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$ .

Inversement, si l'on a une courbe de Bézier définie en termes de contraintes on récupère une courbe de Bézier ordinaire :

**6.4 Proposition.** *Soit  $\Gamma$  une courbe de Bézier définie par les vecteurs  $\vec{V}_i$  et les fonctions  $f_i$  vérifiant les conditions de 6.2. On choisit une origine  $O$  et on définit les  $A_i$  comme en 6.3. Alors, on a  $M(t) = B_0(t)A_0 + B_1(t)A_1 + B_2(t)A_2 + B_3(t)A_3$ , de sorte que  $\Gamma$  n'est autre que  $\mathcal{B}(A_0, A_1, A_2, A_3)$ .*

*Démonstration.* Cela résulte des calculs effectués dans la démonstration de 6.2.

## 7 Conclusion

Finalement, on peut se poser la question : quel est l'intérêt des courbes de Bézier ? Après tout, il ne s'agit que de courbes paramétrées, rationnelles, et plus précisément définies par des polynômes, le plus souvent de degré 3 et finalement quelconques. Ce sont donc des courbes algébriques, bien connues depuis longtemps et très étudiées avant Bézier.

En fait, il y a plusieurs avantages. Le premier est que les polynômes en question étant de degré assez petit, sont faciles à calculer et que les courbes sont donc faciles à tracer (surtout avec les moyens actuels). Le second est

qu'ils permettent déjà, même avec le seul degré trois, d'avoir des formes élémentaires variées (courbe convexe ou concave, ou au contraire admettant une inflexion, voire un nœud, voire un rebroussement), que l'on peut ensuite raccorder de manière  $C^1$ . Mais, ces avantages là valent pour des polynômes de degré 3 écrits sous une forme quelconque et pas nécessairement avec les polynômes de Bernstein, qui constituent le cœur des courbes de Bézier. L'intérêt de ces polynômes est double :

- D'abord, ils permettent de tracer la courbe en la subdivisant, comme on l'a vu avec l'algorithme de Casteljau, voire en utilisant la définition récursive.
- Ensuite, et surtout, ils permettent un guidage géométrique de la courbe en agissant sur les points de contrôle. Le fait que les polynômes de Bernstein admettent un maximum en  $i/n$  fait que le mouvement du point  $A_i$  n'influe surtout sur la courbe au voisinage de  $t = i/n$  et permet des corrections commodes.

## 8 Annexe 1 : Courbes de Bézier et courbes algébriques

### 8.1 Un résultat général

**8.1 Proposition.** Soient  $P(t) = a_m t^m + \dots + a_0$  et  $Q(t) = b_n t^n + \dots + b_0$  deux polynômes à coefficients réels, de degrés  $m, n > 0$ . La courbe paramétrée  $V$  définie par  $M(t) = (P(t), Q(t))$ , avec  $t \in \mathbf{R}$  est contenue dans une courbe algébrique, c'est-à-dire l'ensemble des zéros d'un polynôme non nul  $F(x, y) \in \mathbf{R}[x, y]$ . De plus, on peut supposer que  $F$  est de degré  $\leq \text{Max}(m, n)$ .

*Démonstration.* On considère les polynômes  $P(t) - x$  et  $Q(t) - y$ . On note  $a'_i$  et  $b'_j$  leurs coefficients. On a donc  $a'_i = a_i$  sauf pour  $a'_0 = a_0 - x$  et de même pour  $b'_j$  et on convient que, si l'indice  $i$  est négatif ou  $> m$ , on a  $a'_i = 0$  et de même pour  $b'_j$ . Le résultant des polynômes  $P(t) - x$  et  $Q(t) - y$  est le déterminant de taille  $m + n$  dont le coefficient  $c_{i,j}$  vaut  $a_{m-j+i}$  pour  $1 \leq i \leq n$  et dont le coefficient  $c_{n+i,j}$  vaut  $b_{n-j+i}$  pour  $1 \leq i \leq m$ . On obtient

le déterminant suivant (écrit ici avec  $m = n$ ), qui dépend de  $x$  et  $y$  :

$$R(x, y) = \begin{vmatrix} a_m & a_{m-1} & \dots & a_0 - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_m & a_{m-1} & \dots & a_0 - x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 - x \\ b_n & b_{n-1} & \dots & b_0 - y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_n & b_{n-1} & \dots & b_0 - y & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & b_n & b_{n-1} & \dots & b_0 - y \end{vmatrix}.$$

Le résultat principal sur le résultant c'est que  $R(x, y)$  est nul si et seulement il existe  $t$  tel que  $P(t) - x = Q(t) - y = 0$ . La démonstration est analogue à celle donnée en 2.5.1 et consiste à regarder un système de  $m + n$  équations en  $1, t, t^2, \dots, t^{m+n-1}$  dont le déterminant est  $R(x, y)$ . On obtient donc le résultat annoncé. De plus, on voit que  $R(x, y)$  est un polynôme en  $x, y$  de degré  $\leq \text{Max}(m, n)$  en développant le déterminant.

**8.2 Remarques.** 1) Le fait que le degré de la courbe algébrique  $V$  soit  $\leq \text{Max}(m, n)$  se voit aussi en coupant  $V$  par une droite  $ux + vy + w = 0$ . On a à résoudre  $uP(t) + vQ(t) + w = 0$ , équation de degré  $N = \text{Max}(m, n)$ , qui admet au plus  $N$  solutions.

2) On peut trouver des points  $A_0, \dots, A_n$  tels que  $\mathcal{B}(A_0, \dots, A_n)$  (avec  $A_i = (x_i, y_i)$ ) coupe, par exemple, l'axe des  $x$  en  $n$  points distincts. Pour cela on choisit les paramètres  $0 < t_1 < \dots < t_n < 1$  des points en question et on a à trouver des réels  $y_0, \dots, y_n$  vérifiant les  $n$  équations linéaires homogènes :

$$(1 - t_i)^n y_0 + n(1 - t_i)^{n-1} t_i y_1 + \dots + t_i^n y_n = 0$$

pour  $i = 1, \dots, n$ . Comme on a  $n$  équations et  $n + 1$  inconnues, il y a une solution non triviale.

## 8.2 Les courbes de Bézier d'ordre 3

Commençons par quelques remarques.

**8.3 Proposition.** *Les polynômes de Bernstein  $(1 - t)^3, 3(1 - t)^2 t, 3(1 - t)t^2$  et  $t^3$  constituent une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré  $\leq 3$ .*

*Démonstration.* Il suffit de noter que leurs valuations sont respectivement 0, 1, 2, 3.

Une conséquence de ce résultat c'est que les courbes de Bézier d'ordre 3 sont exactement toutes les courbes paramétrées par des polynômes de degré

$\leq 3$ . En effet, si on pose  $A = (a_1, a_2)$ , etc. on obtient tous les couples de polynômes de degré  $\leq 3$  possibles.

**8.4 Corollaire.** *Les courbes de Bézier d'ordre 3 sont des courbes algébriques de degré  $\leq 3$  (on dit aussi des cubiques) qui admettent un paramétrage par des polynômes (on dit qu'elles sont rationnelles, ou unicursales). Ce sont des cubiques singulières<sup>6</sup>.*

*Démonstration.* Le premier point a été vu en 8.1. Pour le second, voir, par exemple, D. Perrin *Introduction à la géométrie algébrique*, Ch. IX.

**8.5 Remarque.** Soient  $P(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$  et  $Q(t) = a't^3 + b't^2 + c't + d'$  deux polynômes de degré 3 et soit  $C$  la courbe paramétrique définie par  $x = P(t)$  et  $y = Q(t)$ . La théorie dit qu'il s'agit d'une cubique unicursale, donc singulière. Parmi les points singuliers possibles, on a les points stationnaires du paramétrage, donnés par  $P'(t) = 3at^2 + 2bt + c = Q'(t) = 3a't^2 + 2b't + c' = 0$ , mais, attention, il y en a d'autres. En effet, si l'on prend des polynômes  $P, Q$  généraux, leurs dérivées seront elles aussi générales et n'auront pas de zéros communs. Il y a plusieurs raisons qui expliquent cet apparent paradoxe.

1) D'abord, le théorème affirme que la courbe est singulière, mais cette singularité peut se trouver à l'infini (comme dans le cas de la courbe  $y = x^3$ , ou encore dans le cas de la courbe  $\mathcal{B}(A, B, D, C)$  de l'exercice 2.5.1). Cependant ce cas n'est toujours pas générique.

2) En fait, il y a trois sortes de points singuliers pour une cubique : les points doubles ordinaires à tangentes réelles, les points doubles ordinaires à tangentes imaginaires et enfin les points de rebroussement. Seuls les troisièmes correspondent à des points stationnaires du paramétrage, les premiers correspondant, eux, à des points atteints pour deux valeurs distinctes de  $t$ . Quant aux derniers, ils sont isolés et ne sont pas dans l'image du paramétrage, donc sont invisibles !

Voici un exemple de chaque type.

a) La courbe  $y^2 - x^3 = 0$  est paramétrée par  $x = t^2$ ,  $y = t^3$  et elle admet un rebroussement en  $(0, 0)$ . Ici, la singularité se voit sur le paramétrage : on a  $P'(t) = 2t$  et  $Q'(t) = 3t^2$  et tous deux sont nuls en 0.

b) La courbe  $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ , paramétrée par  $x = t^2 - 1$ ,  $y = t(t^2 - 1)$  a un point singulier à l'origine, qui est un point double à tangentes distinctes ( $y = \pm x$ ). On le voit sur le paramétrage comme un point atteint par les deux valeurs  $t = 1$  et  $t = -1$ .

c) Enfin, la courbe paramétrée par  $(t^3, t^2 + t)$  (d'équation cartésienne  $-y^3 + x^2z + 3xyz + xz^2 = 0$ , comme on le voit facilement avec *xcas*) admet

6. Mais leurs singularités peuvent être à l'infini ou imaginaires, voir 8.5 ci-dessous.

le point  $(1, -1)$  comme point singulier. Ce point est atteint pour  $t = j, j^2$  et il est isolé.

## 9 Annexe 2 : Compléments

### 9.1 Cercles

**9.1 Proposition.** *Une courbe de Bézier non réduite à un point n'est pas contenue dans un cercle.*

*Démonstration.* Plus généralement, si une courbe  $\mathcal{C}$  est paramétrée par  $x = P(t)$ ,  $y = Q(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , où  $P, Q$  sont des polynômes de degrés  $m, n$  avec  $m, n$  non tous deux nuls, elle n'est pas contenue dans un cercle. Posons  $P(t) = a_m t^m + \dots$  et  $Q(t) = b_n t^n + \dots$  avec  $a_m$  et  $b_n$  non nuls et supposons par exemple  $m \geq n$ . Supposons que  $\mathcal{C}$  est contenue dans le cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$$

On a alors, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $R(t) := P(t)^2 + Q(t)^2 - 2aP(t) - 2bQ(t) + c = 0$ , donc le polynôme  $R$  est identiquement nul. Mais le terme dominant de  $R$  est soit  $a_m^2 t^{2m}$  si  $m > n$  soit  $(a_m^2 + b_n^2) t^{2m}$  si  $m = n$ . Dans les deux cas il est non nul et de degré  $> 0$  ce qui est absurde.

### 9.2 Paraboles

Voici d'autres arguments pour prouver le théorème 2.7.

a) Quitte à faire un changement de coordonnées affine, on peut supposer<sup>7</sup>  $A = (1, 0)$ ,  $B = (0, 0)$  et  $C = (0, 1)$ . On en déduit  $x(t) = (1-t)^2$  et  $y(t) = t^2$ . On tire  $t = \frac{y-x+1}{2}$  et si on appelle cette quantité  $X$ , on a  $y = X^2$ .

b) Il y a un pinceau de coniques passant par  $A, C$  et tangentes aux droites  $(AB)$ ,  $(BC)$ . Dans ce pinceau il y a une seule parabole  $P$ . Quand on a lu Archimède, on sait (!) que cette parabole passe par le milieu entre  $B$  (intersection des tangentes en  $A, C$ ) et le milieu de  $[AC]$ . Mais, ce point n'est autre que  $M = M(1/2)$ . Il est donc sur  $\Gamma$  qui est égale à  $P$ .

Cette remarque est une variante de Casteljaou. On peut d'ailleurs continuer avec  $A, M$ . On construit la tangente en  $M$  à  $\Gamma$  comme parallèle à  $(AC)$ . Elle coupe  $(AB)$  en  $D$ . Le milieu entre  $D$  et le milieu de  $[AM]$  est sur la parabole, etc.

---

7. Ou  $A = (-1, 0)$ ,  $B = (0, 1)$ ,  $C = (1, 0)$  qui donne  $y = (1-x^2)/2$ .

