3.4

Travail demandé :

Il vous est demandé d'étudier puis de présenter le texte joint à travers un exposé de synthèse d'une durée comprise entre 15 et 20 minutes.

Si l'étude de la totalité du dossier et la préparation d'un exposé cohérent dans la durée impartie ne vous paraît pas possible, vous pouvez décider de vous limiter à une partie du dossier.

Remarques générales :

1. Les textes proposés, quelle que soit leur origine, peuvent présenter des défauts (coquilles typographiques, négligences ou sous-entendus de l'auteur, voire erreurs...) qui, sauf exception, n'ont pas été corrigés.

2. Les textes proposés peuvent contenir des exercices qu'il n'est pas demandé de résoudre. Néanmoins, vous pouvez vous aider des énoncés de ces exercices pour enrichir votre exposé.

3. Vous pouvez annoter les documents qui vous sont fournis. Vos annotations ne seront pas regardées par l'examinateur.

Systèmes différentiels commandables

Après de courtes définitions, nous étudions en détail les systèmes linéaires explicites $\dot{x} = Ax + Bu$. Leur commandabilité est caractérisée par le critère de Kalman et la forme normale dite de Brunovsky. Cette dernière permet un paramétrage explicite de toutes les trajectoires en fonctions de m fonctions scalaires arbitraires $t \mapsto y(t)$ et d'un nombre fini de leurs dérivées. Ces quantités y, dites sorties de Brunovsky, sont des combinaisons linéaires de x. Elles jouent d'une certaine façon le rôle d'un potentiel. Elles permettent surtout de calculer très simplement les commandes u pour aller d'un état vers un autre (planification de trajectoire). Elles donnent également le bouclage (« feedback ») qui assure le suivi asymptotique d'une trajectoire de référence arbitraire (stabilisation par placement de pôles).

2.1. Commandabilité

On considère le système explicite (f fonction régulière)

$$\frac{d}{dt}x = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \tag{2.1}$$

2.1.a. Définitions

***Définition 2.1* (trajectoire).** On appelle trajectoire du système (2.1) toute fonction régulière $I \ni t \mapsto (x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ qui satisfait identiquement sur un intervalle d'intérieur non vide I de $\mathbb{R}$ les équations (2.1).

***Définition 2.2* (commandabilité).** Le système (2.1) est dit commandable en temps $T > 0$, si et seulement si, pour $p, q \in \mathbb{R}^n$, il existe une loi horaire $[0, T] \ni t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}^m$, dite commande en boucle ouverte, qui amène le système de l'état $x(0) = p$ à l'état $x(T) = q$, c'est à dire, telle que la solution du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u(t)) \quad \text{pour } t \in [0, T] \\ x(0) &= p \end{aligned}$$

vérifie $x(T) = q$. Le système est dit commandable lorsqu'il est commandable pour au moins un temps $T > 0$.

D'autres définitions sont possibles : elles correspondent toutes à des variantes plus ou moins subtiles de la définition 2.2. Nous renvoyons à **[20]** pour de plus amples développements.

Comme l'illustre la figure 2.1, la commandabilité est une propriété

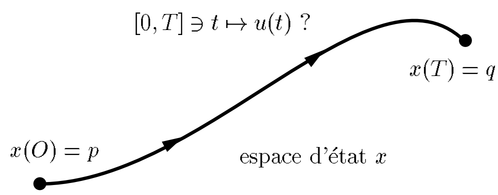

FIGURE 2.1. La planification de trajectoire

topologique très naturelle. En général, la *commande en boucle ouverte* $[0, T] \ni t \mapsto u(t)$ n'est pas unique, il en existe une infinité. Cette étape s'appelle *planification de trajectoire* : calculer $t \mapsto u(t)$ à partir de la connaissance de f, p et q constitue l'une des questions majeures de l'automatique. Cette question est loin d'être résolue actuellement.

Très souvent, l'absence de commandabilité est due à l'existence d'intégrales premières non triviales. Ce sont des observables qui restent constantes le long de toute trajectoire et qui ne sont pas influencées par la commande u.

2.1.b. Intégrale première. Considérons le réacteur exothermique de la figure 2.2. Les équations de bilan matière et énergie donnent

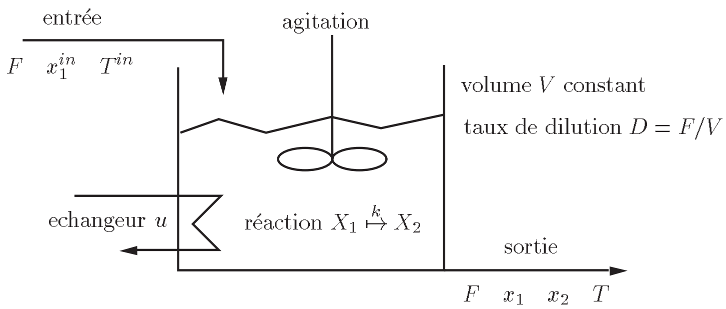

FIGURE 2.2. Un réacteur chimique exothermique où u correspond aux échanges thermiques avec l'extérieur

alors les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= D(x_1^{in} - x_1) - k_0 \exp(-E/RT) x_1 \\ \dot{x}_2 &= -D x_2 + k_0 \exp(-E/RT) x_1 \\ \dot{T} &= D(T^{in} - T) + \alpha \Delta H \exp(-E/RT) x_1 + u. \end{aligned} \tag{2.2}$$

La cinétique est linéaire du premier ordre, les constantes physiques usuelles (D, x_1^{in}, k_0, E, T^{in}, α et ΔH) sont toutes positives, la commande u est proportionnelle à la puissance thermique échangée avec l'extérieur. x_i est la concentration de l'espèce chimique X_i, $i = 1, 2$. On reconnaît l'effet non linéaire essentiel de la loi d'Arrhenius $k = k_0 \exp(-E/RT)$ qui relie la constante de vitesse k à la température T. Il est assez facile de voir que ce système n'est pas commandable. En effet, le bilan global sur $X_1 + X_2$, élimine le terme non linéaire pour donner

$$\frac{d}{dt}(x_1 + x_2) = D(x_1^{in} - x_1 - x_2).$$

Ainsi donc la quantité $\xi = x_1 + x_2$ vérifie une équation différentielle autonome $\dot{\xi} = D(x_1^{in} - \xi)$. Donc $\xi = x_1^{in} + \xi_0 \exp(-Dt)$ où ξ_0 est la valeur initiale de ξ. Si, dans la définition 2.2, on prend l'état initial p tel que $\xi = x_1 + x_2 = x_1^{in}$ et q tel que $\xi = x_1 + x_2 = 0$, il n'existe pas de commande qui amène le système de p vers q. En effet, pour toute trajectoire démarrant en un tel p, la quantité $x_1 + x_2$ reste constante et égale à x_1^{in}. Cette partie non commandable du système représentée par la variable ξ admet ici un sens physique précis. Elle est bien connue des chimistes. C'est un invariant chimique.

L'exemple ci-dessus nous indique que l'absence de commandabilité peut-être liée à l'existence d'invariants, i.e., à des combinaisons des variables du système (on pourrait les appeler des observables) et éventuellement du temps, qui sont conservées le long de toute trajectoire. Pour (2.2), il s'agit de $(x_1 + x_2 - x_1^{in}) \exp(Dt)$ correspondant à ξ_0. Nous sommes donc conduits à prolonger la notion d'intégrale première pour les systèmes commandés.

***Définition 2.3* (intégrale première).** Une fonction régulière $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto h(t, x) \in \mathbb{R}$ est appelée intégrale première du système (2.1), si elle est constante le long de toute trajectoire du système. Une intégrale première est dite triviale si c'est une fonction constante sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Si h est une intégrale première, sa dérivée le long d'une trajectoire arbitraire est nulle :

$$\frac{d}{dt}h = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x}\dot{x} \equiv 0$$

pour toute trajectoire $(t \mapsto (x(t), u(t))$ du système.

Si (2.1) admet une intégrale première non triviale $t \mapsto h(t, x)$ alors, (2.1) n'est pas commandable. Sinon, il existe $T > 0$, tel que pour tout $p, q \in \mathbb{R}^n$ et tout instant initial t, $h(t, p) = h(t + T, q)$ (il existe une trajectoire reliant p à q sur $[t, t + T]$). Donc h est une fonction périodique du temps et indépendante de x. Mais alors la dérivée de h le long des trajectoires du système correspond à $\frac{\partial}{\partial t}h$. Comme elle est nulle, h est une constante, ce qui contredit l'hypothèse. Nous avons montré la proposition suivante

***Proposition 2.4*.** *Si le système (2.1) est commandable, alors ses intégrales premières sont triviales.*

2.2. Commandabilité linéaire

Nous considérons ici les systèmes linéaires stationnaires du type

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.3}$$

où l'état $x \in \mathbb{R}^n$, la commande $u \in \mathbb{R}^m$ et les matrices A et B sont constantes et de tailles $n \times n$ et $n \times m$, respectivement.

2.2.a. Matrice de commandabilité. Supposons que (2.3) admette une intégrale première $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto h(t, x) \in \mathbb{R}$. Soit le changement de variables sur x défini par $x = \exp(tA)z$. Avec les variables (z, u), (2.3) devient $\dot{z} = \exp(-tA)Bu$ et l'intégrale première $h(t, \exp(tA)z) = l(t, z)$. Comme la valeur de l est constante le long de toute trajectoire nous avons, en dérivant le long d'une trajectoire arbitraire $t \mapsto (z(t), u(t))$

$$\dot{l} = \frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial l}{\partial z}\dot{z} = 0.$$

Comme $\dot{z} = \exp(-tA)Bu$, pour toute valeur de z et u on a l'identité suivante :

$$\frac{\partial l}{\partial t}(t, z) + \frac{\partial l}{\partial z}(t, z)\exp(-tA)Bu \equiv 0.$$

En prenant, $u = 0$, z et t arbitraires, on en déduit (prendre, par exemple, la trajectoire du système qui passe par z à l'instant t et dont la commande u est nulle) :

$$\frac{\partial l}{\partial t}(t,z) \equiv 0.$$

Donc nécessairement l est uniquement fonction de z. Ainsi

$$\frac{\partial l}{\partial z}(z)\exp(-tA)B \equiv 0.$$

En dérivant cette relation par rapport à t, on a,

$$\frac{\partial l}{\partial z}(z)\exp(-tA)AB \equiv 0$$

car $\frac{d}{dt}(\exp(-tA)) = -\exp(-tA)A$. Plus généralement, une dérivation à n'importe quel ordre $k \geqslant 0$ donne

$$\frac{\partial l}{\partial z}(z)\exp(-tA)A^kB \equiv 0.$$

En prenant $t = 0$ on obtient

$$\frac{\partial l}{\partial z}(z)A^kB = 0, \quad \forall\, k \geqslant 0.$$

Ainsi le vecteur $\partial l/\partial z(z)$ appartient à l'intersection des noyaux à gauche de la famille infinie de matrice $(A^kB)_{k\geqslant 0}$. Le noyau à gauche de A^kB n'est autre que $\mathrm{Im}(A^kB)^\perp$, l'orthogonal de l'image de A^kB. Donc

$$\frac{\partial l}{\partial z}(z) \in \bigcap_{k\geqslant 0} \mathrm{Im}(A^kB)^\perp.$$

Mais

$$\bigcap_{k\geqslant 0} \mathrm{Im}(A^kB)^\perp = \Big(\mathrm{Im}(B) + \cdots + \mathrm{Im}(A^kB) + \cdots\Big)^\perp.$$

La suite d'espace vectoriel $E_k = \mathrm{Im}(B) + \cdots + \mathrm{Im}(A^kB)$ est une suite croissante pour l'inclusion, $E_k \subset E_{k+1}$. Si pour un certain k, $E_k = E_{k+1}$, cela signifie que $\mathrm{Im}(A^{k+1}B) \subset E_k$, donc $A(E^k) \subset E_k$. Mais $\mathrm{Im}(A^{k+2}B) = \mathrm{Im}(AA^{k+1}B) \subset A(E^{k+1})$. Ainsi $\mathrm{Im}(A^{k+2}B) \subset E_k$. On voit donc que pour tout $r > 0$, $\mathrm{Im}(A^{k+r}B) \subset E_k$, d'où $E_{k+r} = E_k$. Ainsi la suite des E_k est une suite de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ emboîtés les uns dans les autres. Cette suite stationne dès qu'elle n'est plus, pour un certain k, strictement croissante. Il suffit donc de ne considérer que ses n premiers termes soit E_0, …, E_{n-1}, car automatiquement $E_{n-1} = E_{n+r}$ pour tout $r > 0$.

En revenant à la suite des noyaux à gauche de A^kB, nous voyons que $\partial l/\partial z(z)$ dans le noyau à gauche de la suite infinie de matrices $(A^kB)_{k\geqslant 0}$, est équivalent à $\partial l/\partial z(z)$ dans le noyau à gauche de la *suite finie* de matrices $(A^kB)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$[(1)].

Ainsi, pour tout z, $\partial l/\partial z(z)$ appartient au noyau à gauche de la matrice $n\times(nm)$,

$$\mathcal{C}=(B,AB,A^2B,\dots,A^{n-1}B) \tag{2.4}$$

dite *matrice de commandabilité* de Kalman. Si $\mathcal{C}$ est de rang n, son noyau à gauche est nul, donc l ne dépend pas de z : l est alors une fonction constante et h également.

Réciproquement, si la matrice de commandabilité $\mathcal{C}$ n'est pas de rang maximal, alors il existe un vecteur $w\in\mathbb{R}^n/\{0\}$, dans le noyau à gauche de (2.4). En remontant les calculs avec $l(z,t)=w'z$ on voit que $\dot\lambda=0$ le long des trajectoires. En passant aux variables (x,u), on obtient une intégrale première non triviale $=h(t,x)=w'\cdot\exp(-tA)x$. Toute trajectoire du système se situe dans un hyperplan orthogonal à w.

En résumé, nous avons démontré la

Proposition 2.5. *La matrice de commandabilité*

$$\mathcal{C}=(B,AB,A^2B,\dots,A^{n-1}B)$$

est de rang n, si, et seulement si, les seules intégrales premières du système (2.3) sont triviales.

Des propositions 2.4 et 2.5, il vient : si le système (2.3) est commandable, sa matrice de commandabilité est de rang n. Nous allons voir que la réciproque est vraie. Pour cela, nous avons besoin de certaines propriétés d'invariance.

---

(1) On pourrait aussi utiliser le théorème de Cayley-Hamilton qui donne un résultat plus précis : toute matrice carrée est racine de son polynôme caractéristique. Cela veut dire, A étant de taille n, que A^n est une combinaison linéaire des $(A^k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$:

$$A^n=\sum_{k=0}^{n-1}p_kA^k$$

où les p_k sont définis par $\det(\lambda I_n-A)=\lambda^n-\sum_{k=0}^{n-1}p_k\lambda^k$. Nous avons préféré un argument plus simple avec la suite des E_k mais qui a l'avantage de passer au non linéaire et qui correspond au calcul de l'algèbre de Lie de commandabilité.

2.2.b. Invariance

Définition 2.6 **(changement d'état, bouclage statique régulier)**
Un changement linéaire de coordonnées $x \mapsto \widetilde{x}$ est défini par une matrice M inversible d'ordre n : $x = M\widetilde{x}$. Un bouclage statique régulier $u \mapsto \widetilde{u}$ est défini par une matrice N inversible d'ordre m et une autre matrice K, $m \times n$: $u = K\widetilde{x} + N\widetilde{u}$. C'est un changement de variables sur les commandes paramétré par l'état.

L'ensemble des transformations

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{u} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ K & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{u} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

forment un groupe lorsque les matrices M, N et K varient (M et N restant inversibles).

Si $\dot{x} = Ax + Bu$ est commandable (resp. n'admet pas d'intégrale première) alors il est évident que $\dot{\widetilde{x}} = \widetilde{A}\widetilde{x} + \widetilde{B}\widetilde{u}$ obtenu avec (2.5) est commandable (resp. n'admet pas d'intégrale première).

Les notions de commandabilité et d'intégrale première sont intrinsèques, c'est-à-dire, indépendantes des coordonnées avec lesquelles les équations du système sont établies. Si la matrice de commandabilité dans les coordonnées (x, u) est de rang n, la matrice de commandabilité dans les coordonnées $(\widetilde{x}, \widetilde{u})$ sera aussi de rang n. Cette simple remarque conduit au résultat non évident suivant :

$$\operatorname{rang}(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n \Longleftrightarrow \operatorname{rang}(\widetilde{B}, \widetilde{A}\widetilde{B}, \ldots, \widetilde{A}^{n-1}\widetilde{B}) = n$$

où $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ s'obtiennent en écrivant $\dot{x} = Ax + Bu$ dans les coordonnées $(\widetilde{x}, \widetilde{u})$:

$$\dot{\widetilde{x}} = M^{-1}(AM + BK)\widetilde{x} + M^{-1}BN\widetilde{u}.$$

Soit $\widetilde{A} = M^{-1}(AM + BK)$ et $\widetilde{B} = M^{-1}BN$. En fait, il est possible d'aller beaucoup plus loin et de montrer que les indices de commandabilité définis ci-dessous sont aussi invariants.

Définition 2.7 **(indices de commandabilité).** Pour tout entier k, on note σ_k le rang de la matrice $(B, AB, A^2B, \ldots, A^kB)$. Les (σ_k) sont appelés indices de commandabilité du système linéaire (2.3),

La suite σ_k est croissance, majorée par n. Ainsi, l'absence d'intégrale première est équivalente à $\sigma_{n-1} = n$.

***Proposition 2.8* (invariance).** *Les indices de commandabilité de $\dot{x} = Ax+Bu$ sont invariants par changement de variable sur x et bouclage statique régulier sur u.*

Nous laissons la preuve de ce résultat par récurrence sur k en exercice.

Il est important de comprendre la géométrie derrière cette invariance. Les transformations $(x,u) \mapsto (\widetilde{x}, \widetilde{u})$ du type (2.5) forment un groupe. Ce groupe définit une relation d'équivalence entre deux systèmes ayant même nombre d'états et même nombre de commandes. La proposition précédente signifie simplement que les indices de commandabilité sont les même pour deux systèmes appartenant à la même classe d'équivalence, i.e, le même objet géométrique vu dans deux repères différents. En fait, on peut montrer que les indices de commandabilité sont les seuls invariants : il y a autant de classes d'équivalence que d'indices de commandabilité possibles. Nous ne montrerons pas directement ce résultat. Tous les éléments nécessaires à cette preuve se trouvent dans la construction de la forme de Brunovsky ci-dessous (voir aussi [**49, 121**]).

2.2.c. Un exemple. Soit le système mécanique à deux degrés de liberté et une seule commande de la figure 2.3. Il s'agit d'un système

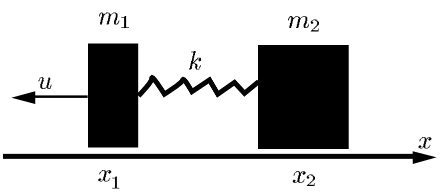

FIGURE 2.3. Deux masses couplées par un ressort, le tout piloté par une seule force u

mécanique sous actionné contrairement au bras motorisé étudié dans l'introduction (un degré de liberté (l'angle θ) et un moteur). En négligeant les frottements et en supposant le ressort linéaire de raideur k, on est conduit au modèle suivant :

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) + u \\ m_2\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2). \end{cases} \tag{2.6}$$

Montrons que ce système est commandable. Il suffit pour cela de remarquer que la quantité x_2, l'abscisse de la masse qui n'est pas directement soumise à la force u, joue un rôle très particulier (sortie de Brunovsky). Si au lieu de donner $t \mapsto u(t)$ et d'intégrer (2.6) à partir de positions et vitesses initiales, on fixe $t \mapsto x_2(t) = y(t)$. Alors $x_1 = (m_2/k)\ddot{y}+y$ et donc $u = m_1\ddot{x}_1+m_2\ddot{x}_2 = (m_1m_2/k)y^{(4)}+(m_1+m_2)\ddot{y}$. Ainsi on peut écrire le système en faisant jouer à x_2 un rôle privilégié :

$$\begin{cases} x_1 = (m_2/k)\ \ddot{y} + y \\ x_2 = y \\ \ u = (m_1m_2/k)\ y^{(4)} + m_1 + m_2)\ddot{y}. \end{cases}$$

On obtient ainsi un paramétrisation explicite de toutes les trajectoires du système. Les relations précédentes établissent une correspondance bi-univoque et régulière entre les trajectoires de (2.6) et les fonctions régulières $t \mapsto y(t)$.

Cela permet de calculer de la façon la plus élémentaire possible une commande $[0,T] \ni t \mapsto u(t)$ qui fait passer de l'état $p = (x_1^p, v_1^p, x_2^p, v_2^p)$ à l'état $q = (x_1^q, v_1^q, x_2^q, v_2^q)$ (v_i correspond à $\dot{x}_i$). Comme

$$\begin{cases} x_1 = (m_2/k)\ \ddot{y} + y \\ v_1 = (m_2/k)\ y^{(3)} + \dot{y} \\ x_2 = y \\ v_2 = \dot{y} \end{cases}$$

imposer p en $t = 0$ revient à imposer y et ses dérivées jusqu'à l'ordre 3 en 0. Il en est de même en $t = T$. Il suffit donc de trouver une fonction régulière $[0,T] \ni t \mapsto y(t)$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre 3 sont données a priori en 0 et en T : un polynôme de degré 7 en temps répond à la question mais il existe bien d'autres possibilités.

Nous allons voir, avec la forme normale de Brunovsky, qu'une telle correspondance entre y et les trajectoires du système est générale. Il suffit que (2.3) soit commandable. Tout revient donc à trouver la sortie de Brunovsky y de même dimension que la commande u.

2.2.d. Critère de Kalman et forme de Brunovsky

***Théorème 2.9* (critère de Kalman).** *Le système $\dot{x} = Ax + Bu$ est commandable si, et seulement si, la matrice de commandabilité $\mathcal{C} = (B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$ est de rang $n = \dim(x)$.*

La paire (A, B) *est dite commandable* si le rang de la matrice de commandabilité $\mathcal{C}$ est maximum.

La preuve que nous allons donner de ce résultat n'est pas la plus courte possible. Cependant, elle permet de décrire explicitement, pour toute durée $T > 0$ et pour $p, q \in \mathbb{R}^n$, les trajectoires du système qui partent de p et arrivent en q. Cette preuve utilise la forme dite de Brunovsky. Cette dernière se construit grâce à une méthode d'élimination, proche de celle très classique du pivot de Gauss.

***Théorème 2.10* (forme de Brunovsky).** *Si la matrice de commandabilité* $(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$ *du système* $\dot{x} = Ax + Bu$ *est de rang* $n = \dim(x)$ *et si* B *est de rang* $m = \dim(u)$*, alors il existe un changement d'état* $z = Mx$ *(*M *matrice inversible* $n \times n$*) et un bouclage statique régulier* $u = Kz + Nv$ *(*N *matrice inversible* $m \times m$*), tels que les équations du système dans les variables* (z, v) *admettent la forme suivante (écriture sous la forme de* m *équations différentielles d'ordre* $\geqslant 1$*) :*

$$y_1^{(\alpha_1)} = v_1, \ldots, \quad y_m^{(\alpha_m)} = v_m \tag{2.7}$$

avec comme état $z = (y_1, y_1^{(1)}, \ldots, y_1^{(\alpha_1-1)}, \ldots, y_m, y_m^{(1)}, \ldots, y_m^{(\alpha_m-1)})$*, les* α_i *étant des entiers positifs.*

Les m quantités y_j, qui sont des combinaisons linéaires de l'état x, sont appelées *sorties de Brunovsky.*

Pour une paire (A, B) commandable, les indices de commandabilité σ_k sont directement reliés aux m entiers α_i de la forme de Brunovsky. Il est facile de voir que, dans le cas commandable, se donner les σ_k revient à ce donner les α_i. Ainsi, deux systèmes commandables ayant les mêmes indices de commandabilité admet la même forme de Brunovsky, ils sont donc équivalents. Ce n'est plus vrai si ces deux systèmes ne sont plus commandables avec les mêmes indices de commandabilité. Il n'y aura équivalence que de la partie commandable. L'équivalence sera complète, si les parties non commandables sont équivalents, i.e., si les matrices définissant les dynamiques autonomes des parties non commandables sont semblables et donc admettent la même forme normale de Jordan.

Démonstration du théorème 2.10. Elle repose sur

(1) une mise sous forme triangulaire des équations d'état et l'élimination de u ;

(2) l'invariance du rang de $(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$ par rapport aux transformations (2.5) ;

(3) une récurrence sur la dimension de l'état.

Mise sous forme triangulaire. On suppose que B est de rang $m = \dim(u)$ (sinon, faire un regroupement des commandes en un nombre plus petit que m de façon à se ramener à ce cas). Alors, il existe une partition de l'état $x = (x_r, x_u)$ avec $\dim(x_r) = n-m$ et $\dim(x_u) = m$ telle que les équations (2.3) admettent la structure bloc suivante

$$\begin{aligned}\dot{x}_r &= A_{rr}x_r + A_{ru}x_u + B_r u\\ \dot{x}_u &= A_{ur}x_r + A_{uu}x_u + B_u u\end{aligned}$$

où B_u est une matrice carrée inversible. Cette partition n'est pas unique, bien sûr. En tirant u de la seconde équation et en reportant dans la première, on obtient

$$\begin{aligned}\dot{x}_r &= A_{rr}x_r + A_{ru}x_u + B_r B_u^{-1}(\dot{x}_u - A_{ur}x_r - A_{uu}x_u)\\ \dot{x}_u &= A_{ur}x_r + A_{uu}x_u + B_u u.\end{aligned}$$

En regroupant les dérivées dans la première équation, on a

$$\begin{aligned}\dot{x}_r - B_r B_u^{-1}\dot{x}_u &= (A_{rr} - B_r B_u^{-1}A_{ur})x_r + (A_{ru} - B_r B_u^{-1}A_{uu})x_u\\ \dot{x}_u &= A_{ur}x_r + A_{uu}x_u + B_u u.\end{aligned}$$

Avec une transformation (2.5) définie par

$$\widetilde{x}_r = x_r - B_r B_u^{-1}x_u, \quad \widetilde{x}_u = x_u, \quad \widetilde{u} = A_{ur}x_r + A_{uu}x_u + B_u u,$$

les équations $\dot{x} = Ax + Bu$ deviennent

$$\begin{aligned}\dot{\widetilde{x}}_r &= \widetilde{A}_r\widetilde{x}_r + \widetilde{A}_u\widetilde{x}_u\\ \dot{\widetilde{x}}_u &= \widetilde{u}\end{aligned}$$

où $\widetilde{A}_r = (A_{rr} - B_r B_u^{-1}A_{ur})$ et $\widetilde{A}_u = (A_{rr} - B_r B_u^{-1}A_{ur})B_r B_u^{-1} + (A_{ru} - B_r B_u^{-1}A_{uu})$. Dans cette structure triangulaire où la commande $\widetilde{u}$ n'intervient pas dans la première équation, nous voyons apparaître un système plus petit d'état $\widetilde{x}_r$ et de commande $\widetilde{x}_u$. Cela nous permet de réduire la dimension de x et de raisonner par récurrence.

Invariance. Un simple calcul par blocs nous montre que si $(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$ est de rang n alors $(A_u, A_r A_u, \ldots, A_r^{n-m-1}A_u)$ est de rang $n-m$. Du système de taille n on passe ainsi au système de taille réduite $n-m$, $\dot{\widetilde{x}}_r = \widetilde{A}_r\widetilde{x}_r + \widetilde{A}_u\widetilde{x}_u$ ($\widetilde{x}_r$ l'état, $\widetilde{x}_u$ la commande).

Récurrence sur le nombre d'états. Supposons donc, le résultat vrai pour toutes les dimensions d'état inférieures ou égales à $n-1$. Considérons un système $\dot{x} = Ax + Bu$ avec $n = \dim(x)$, sa matrice de commandabilité de rang n, et B de rang $m = \dim(u) > 0$. L'élimination de u donne, après une transformation de type (2.5),

$$\begin{aligned} \dot{x_r} &= A_r x_r + A_u x_u \\ \dot{x_u} &= u \end{aligned}$$

avec $(A_u, A_r A_u, \ldots, A_r^{n-m-1} A_u)$ de rang $n - m < n$, où $\dim(u) = \dim(x_u) = m$ et $\dim(x_r) = n-m$ (les $\tilde{}$ ont été enlevés pour alléger les notations). Notons $\overline{m}$ le rang de A_u. Comme $\overline{m} \leqslant m$, un changement de variable sur x_u, $(\overline{x}_u, \widetilde{x}_u) = P x_u$ avec P inversible, permet d'écrire le système sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{x_r} &= A_r x_r + \overline{A}_u \overline{x}_u \\ \dot{\overline{x}}_u &= \overline{u} \\ \dot{\widetilde{x}}_u &= \widetilde{u} \end{aligned} \tag{2.8}$$

avec $(\overline{u}, \widetilde{u}) = Pu$, $\dim(\overline{x}_u) = \overline{m}$ et $\overline{A}_u$ de rang $\overline{m}$. Comme le rang de la matrice de commandabilité de $\dot{x_r} = A_r x_r + \overline{A}_u \overline{x}_u$ (x_r est l'état et $\overline{x}_u$ la commande) est égal à $n - m = \dim(x_r)$, l'hypothèse de récurrence assure l'existence d'un changement de variable $x_r = Mz$ et d'un bouclage statique régulier $\overline{x}_u = Kz + N\overline{v}$ ($\overline{v}$ est la nouvelle commande ici) mettant ce sous système sous forme de Brunovsky. Alors le changement d'état $(x_r, \overline{x}_u, \widetilde{x}_u)$ défini par

$$\begin{pmatrix} x_r \\ \overline{x}_u \\ \widetilde{x}_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ K & N & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \overline{v} \\ \widetilde{x}_u \end{pmatrix}$$

et le bouclage statique régulier sur $(\overline{u}, \widetilde{u})$

$$\overline{u} = KM^{-1}(A_r x_r + \overline{A}_u \overline{x}_u) + N\overline{v}, \quad \widetilde{u} = \widetilde{v}$$

transforme alors le système (2.8) sous forme de Brunovsky avec $v = (\overline{v}, \widetilde{v})$ comme nouvelle commande. □

Démonstration du théorème 2.9. La commandabilité est indépendante du choix des variables sur x et d'un bouclage statique régulier sur u. On peut donc supposer le système sous sa forme de Brunovsky. Dans ces coordonnées, aller d'un état à un autre est élémentaire. On se ramène à étudier la commandabilité du système scalaire $y^{(\alpha)} = v$.

L'état initial $(y_a, \dots, y_a^{(\alpha-1)})$ et l'état final $(y_b, \dots, y_b^{(\alpha-1)})$ ainsi que la durée T étant donnés, les lois horaires $t \mapsto v(t)$ assurant le passage entre ces deux états pendant la durée T correspondent alors à la dérivée α-ième de fonctions $[0, T] \ni t \mapsto \varphi(t) \in \mathbb{R}$, dont les dérivées jusqu'à l'ordre $\alpha - 1$ en 0 et T sont imposées par

$$\varphi^{(r)}(0) = y_a^{(r)}, \quad \varphi^{(r)}(T) = y_b^{(r)}, \quad r = 0, \dots, \alpha - 1.$$

Il existe bien sûr une infinité de telles fonctions φ (on peut prendre pour φ un polynôme de degré $2\alpha - 1$, par exemple). □

2.2.e. Planification et suivi de trajectoires. De la preuve des deux théorèmes précédents, il est important de retenir deux choses :

– Dire que le système $\dot{x} = Ax+Bu$ est commandable, est équivalent à l'existence d'un bouclage statique régulier $u = Kz + Nv$ et d'un changement d'état $x = Mz$ se ramenant à la forme de Brunovsky $y^{(\alpha)} = v$ et $z = (y, \dots, y^{(\alpha-1)})$ (par abus de notation $y = (y_1, \dots, y_m)$ et $y^{(\alpha)} = (y_1^{(\alpha_1)}, \dots, y_m^{(\alpha_m)})$). Ainsi

$$x = M(y, \dots, y^{(\alpha-1)}), \quad u = L(y, \dots, y^{(\alpha)})$$

où la matrice L est construite avec K, N et M. Lorsque l'on considère une fonction régulière arbitraire du temps $t \mapsto \varphi(t) \in \mathbb{R}^m$ et que l'on calcule $x(t)$ et $u(t)$ par les relations

$$x(t) = M(\varphi(t), \dots, \varphi^{(\alpha-1)}(t)), \quad u(t) = L(\varphi(t), \dots, \varphi^{(\alpha)}(t))$$

alors $t \mapsto (x(t), u(t))$ est une trajectoire du système : on a identiquement $\dot{x}(t) - Ax(t) - Bu(t) = 0$. Réciproquement, toutes les trajectoires régulières du système se paramétrisent de cette façon, grâce à m fonctions scalaires arbitraires $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$ et un nombre fini de leurs dérivées par les formules ci-dessus.

– La commandabilité de $\dot{x} = Ax + Bu$ implique la stabilisation par retour d'état. En effet, il suffit de considérer la forme de Brunovsky et dans la forme de Brunovsky, chacun des m sous-systèmes indépendants $y_i^{(\alpha_i)} = v_i$. Soient α_i valeurs propres, $\lambda_1, \dots, \lambda_{\alpha_i}$, correspondant au spectre d'une matrice réelle de dimension α_i. Notons s_k les fonctions symétriques des λ_i (des quantités réelles donc) homogènes de degré k,

$$\prod_{k=1}^{\alpha_i}(X-\lambda_k) = X^{\alpha_i} - s_1 X^{\alpha_i-1} + s_2 X^{\alpha_i-2} + \cdots + (-1)^{\alpha_i} s_{\alpha_i}$$

Alors, dès que les λ_k sont à partie réelle strictement négative, le bouclage

$$v_i = s_1 y_i^{(\alpha_i-1)} - s_2 y_i^{(\alpha_i-2)} + \cdots + (-1)^{\alpha_i-1} s_{\alpha_i} y_i$$

assure la stabilité de $y_i^{(\alpha_i)} = v_i$: en effet, les exposants caractéristiques (on dit aussi les *pôles*) du système bouclé sont les λ_k.

Aussi de la forme de Brunovsky l'on déduit directement le résultat suivant :

***Théorème 2.11* (placement de pôles).** *Si la paire (A, B) est commandable alors, pour toute matrice réelle F $n \times n$, il existe une matrice $m \times n$, K (non nécessairement unique), telle que le spectre de $A+BK$ coïncide avec celui de F.*

De retour dans les coordonnées de modélisation, $\dot{x} = Ax + Bu$, la planification de trajectoire nous donne une trajectoire du système (par exemple la trajectoire que doit suivre une fusée au décollage, la manœuvre d'atterrissage d'un avion, ...). Nous la notons $t \mapsto (x_r(t), u_r(t))$ avec l'indice r pour référence. En pratique, et à cause des aléas de l'existence, il convient, comme l'illustre la figure 2.4, de corriger en fonction de l'écart Δx, la commande de référence u_r (il est rare de piloter un système en aveugle, uniquement en sachant d'où l'on part et où l'on veut aller). Le problème est donc de calculer la correction Δu à partir de Δx de façon à revenir sur la trajectoire de référence. On peut alors utiliser un bouclage stabilisant en plaçant les pôles sur la forme de Brunovsky.

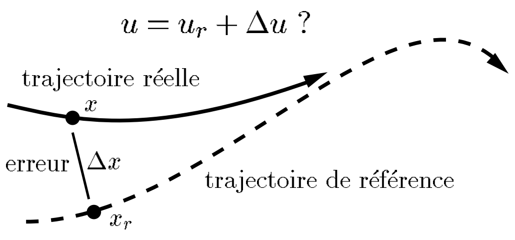

FIGURE 2.4. Le suivi de trajectoire

D'une façon plus précise : comme $\dot{x}_r = Ax_r + Bu_r$, on obtient, par différence avec $\dot{x} = Ax + Bu$ l'équation d'erreur suivante

$$\frac{d}{dt}(\Delta x) = A\ \Delta x + B\ \Delta u$$

où $\Delta x = x - x_r$ et $\Delta u = u - u_r$; le système étant commandable, il existe K, matrice $m \times n$, telle que les valeurs propres de $A+BK$ soient à parties réelles strictement négatives (placement de pôles). Ainsi la correction

$$\Delta u = K\ \Delta x$$

assure le suivi asymptotique de la trajectoire de référence $t \mapsto x_r(t)$. La stabilité structurelle des points d'équilibres hyperboliques garantie que toute erreur assez faible (petite incertitude sur A et B, effets non linéaires faibles, erreurs de mesure, erreurs de troncature dues à la discrétisation de la loi de contrôle obtenue, ...) ne sera pas amplifiée au cours du temps : x restera ainsi proche de x_r.

Nous terminerons par une constatation d'ordre expérimental : lorsque le modèle dynamique $\dot{x} = Ax + Bu$ est d'origine physique, il n'est pas rare que sa partie non commandable, i.e., ses intégrales premières, ait une signification physique immédiate, tout comme les grandeurs y, fonction de x et intervenant dans la forme de Brunovsky (*cf.* théorème 2.10) de sa partie commandable. Cet état de fait n'est vraisemblablement pas dû entièrement au hasard : en physique, les grandeurs qui admettent une signification intrinsèque, i.e., les grandeurs physiques, sont celles qui ne dépendent pas du repère de l'observateur. En automatique, le passage d'un repère à un autre correspond, entre autre, à une transformation de type (2.5). Il est alors clair que le « sous-espace » engendré par les sorties de Brunovsky est un invariant. Il a donc toutes les chances d'avoir un sens physique immédiat. De plus les sorties de Brunovsky admettent un équivalent non linéaire pour de nombreux systèmes physiques. On les appelle alors sorties plates (voir le chapitre 3).