

Troisième partie

Introduction aux chaînes de Markov

Lorsque deux systèmes identiques à un instant donné peuvent avoir des comportements différents dans le futur, on est amené à introduire une suite de variables aléatoires $(X_t)_t$ pour décrire leurs évolutions : X_t servant à définir l'état du système étudié à l'instant t . Si le système étudié est une population, l'état du système à un instant donné peut être décrit simplement par un nombre lorsqu'on s'intéresse uniquement à la taille de cette population, ou par un ensemble de nombres tels que l'ensemble des positions de chaque individu lorsqu'on s'intéresse à la répartition spatiale de la population.

On va ici se limiter à des systèmes dont l'état peut être décrit par une variable aléatoire ou un vecteur aléatoire discret.

En général l'évolution futur d'un système dépendant au moins de son état présent, les variables aléatoires décrivant l'état du système à chaque instant ne pourront pas être considérées comme indépendantes. On va s'intéresser aux situations où l'évolution future d'un système ne dépend du passé qu'au travers de son état présent et pour simplifier on n'étudiera pas l'évolution du système en temps continu, mais son évolution en une suite infinie d'instant $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$. On travaillera donc avec une suite de variables aléatoires discrètes $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, chaque variable aléatoire étant à valeurs dans un ensemble fini ou infini dénombrable noté $\mathcal{X}$ que l'on identifiera à $\{1, \dots, N\}$ si $\mathcal{X}$ est composé de N éléments et à $\mathbb{N}^*$ si $\mathcal{X}$ est infini.

7 Généralités

Soit $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathcal{X}$.

7.1 Définitions et exemples

Définition. La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une *chaîne de Markov* si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $(i_1, \dots, i_{n+1}) \in \mathcal{X}^{n+1}$ tel que $P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) > 0$,

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0)$$

ne dépend que des valeurs de n, i_n et i_{n+1} . L'ensemble $\mathcal{X}$ est appelé *l'espace des états* de la chaîne de Markov $(X_n)_n$.

Proposition 19 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov d'espace d'états $\mathcal{X}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $(i_0, \dots, i_{n+1}) \in \mathcal{X}^{n+1}$ tel que $P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) > 0$, on a

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n).$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$, i et j deux états possibles. Posons $Z = (X_0, \dots, X_{n-1})$ le vecteur décrivant les positions successives du système jusqu'à l'instant $n-1$ (Z est à valeurs dans $\mathcal{X}^n$). Par définition, pour tout état $h \in \mathcal{X}^n$, $P(X_{n+1} = j | X_n = i, Z = h)$ ne dépend que de n, i et j . Notons cette probabilité conditionnelle $Q_n(i, j)$. Montrons que $P(X_{n+1} = j | X_n = i) = Q_n(i, j)$.

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j | X_n = i) &= \frac{P(X_{n+1} = j, X_n = i)}{P(X_n = i)} = \sum_{h \in \mathcal{X}^n} \frac{P(X_{n+1} = j, X_n = i, Z = h)}{P(X_n = i)} \\ &= \sum_{h \in \mathcal{X}^n} \frac{Q_n(i, j) P(X_n = i, Z = h)}{P(X_n = i)} \\ &= Q_n(i, j). \end{aligned}$$

□

N.B. Dire qu'une suite $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_{n+1} est indépendant du vecteur aléatoire $(X_0, \dots, X_{n-1})$ conditionnellement à la variable aléatoire X_n .

Les états successifs d'un système peuvent donc être décrits par une chaîne de Markov si la connaissance de

l'état du système à l'instant présent apporte autant d'information sur le futur que la connaissance de tout le passé. Les chaînes de Markov sont des processus sans mémoire.

- **Exemple 36. (Fortune d'un joueur)** On considère un joueur qui dispose initialement de s euros ($s \in \mathbb{N}$). Il joue à un jeu de hasard, dont l'enjeu à chaque partie est de 1 euro, jusqu'à ce qu'il soit en possession de m euros ($m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq s$) ou jusqu'à ce qu'il ait dépensé tout son argent. On suppose qu'à chaque partie, il a une probabilité p de gagner et $(1-p)$ de perdre et ceci indépendamment des résultats des autres parties ($p \in]0, 1[$). La fortune du joueur après la n -ième partie est décrite par une variable aléatoire notée X_n . La suite $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov.
- **Exemple 37.** On considère une population constituée de cellules de type A et de cellules de type B. Entre deux instants successifs t_n et $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, on suppose qu'exactly une cellule choisie au hasard dans la population se divise donnant deux cellules-filles identiques à la cellule-mère. Le nombre de cellules de type A dans la population à l'instant t_n est une variable aléatoire X_n pour tout n et la suite (X_n) ainsi définie est une chaîne de Markov.
- **Exemple 38. (Autofécondation)** On dispose d'une plante que l'on croise avec elle-même (génération 0). On choisit une plante au hasard parmi les plantes obtenues par cette autofécondation (génération 1). On répète le processus. On s'intéresse à un gène qui a deux allèles notées A et a . On note X_n le génotype pour ce gène de la plante choisie parmi les plantes de la génération n . Alors $(X_n)_n$ définit une chaîne de Markov à trois états AA , Aa et aa .

Définition. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathcal{X}$.

La chaîne de Markov est dite *homogène* si pour tout $(i, j) \in \mathcal{X}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité de passer à l'état j à l'instant $n+1$ sachant qu'on était à l'état i à l'instant n ne dépend pas de n :

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = Q(i, j) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Les nombres $Q(i, j)$, $(i, j) \in \mathcal{X}^2$ s'appellent les *probabilités de transition* de la chaîne de Markov.

N.B. Lorsque $\mathcal{X} = \{1, \dots, N\}$, la matrice de transition Q est représentée par un tableau à N lignes et N colonnes appelée *matrice de transition* de la chaîne de Markov $(X_n)_n$:

$$Q = \begin{pmatrix} Q(1, 1) & \cdots & Q(1, N) \\ \vdots & & \vdots \\ Q(N, 1) & \cdots & Q(N, N) \end{pmatrix}$$

Que $\mathcal{X}$ soit un ensemble fini ou dénombrable, on appellera $Q = (Q(i, j))_{(i, j) \in \mathcal{X}^2}$ la *matrice de transition* de la chaîne de Markov homogène $(X_n)_n$.

N.B. La loi de X_0 est appelée *la loi initiale de la chaîne de Markov*. On l'écrira

$$\pi_0 = (P(X_0 = 1), P(X_0 = 2), \dots, P(X_0 = N-1), P(X_0 = N)) \text{ si } \mathcal{X} = \{1, \dots, N\}.$$

Comme la i -ième ligne de la matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène $(X_n)_n$ définit la loi conditionnelle de X_n sachant que $\{X_{n-1} = i\}$, on a la propriété suivante :

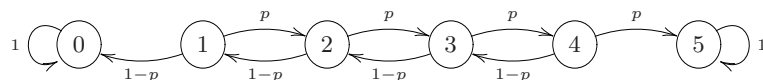
Propriété 20 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène à valeurs dans $\mathcal{X}$ de matrice de transition Q . La matrice Q est une matrice stochastique, c'est-à-dire : pour tout $i, j \in \mathcal{X}$, $Q(i, j) \geq 0$ et pour tout $i \in \mathcal{X}$, $\sum_{j \in \mathcal{X}} Q(i, j) = 1$.

- **Exemple 39.** Dans les exemples 36 et 38, les chaînes de Markov $(X_n)_n$ sont homogènes. Par contre, dans l'exemple 37, la suite $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov non homogène.

7.2 Graphe associé à une matrice de transition

Pour visualiser l'évolution d'une chaîne de Markov homogène, il est souvent utile de représenter la matrice de transition Q de la chaîne de Markov par un graphe orienté : les noeuds du graphe sont les états possibles pour la chaîne de Markov, une flèche allant de l'état i à l'état j indique qu'il y a une probabilité strictement positive que le prochain état de la chaîne soit l'état j si elle est actuellement dans l'état i . On met le poids $Q(i, j)$ à la flèche allant de l'état i à l'état j .

► **Exemple 40.** Lorsque $m = 5$, le graphe décrivant l'évolution de la fortune du joueur dans l'exemple 36 est :



▷ **Exercice 48.** Dans l'exemple 38, déterminer la matrice de transition et dessiner le graphe associé à cette matrice de transition.

Définition. Une suite d'états $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ définit un *chemin de longueur m allant de x_1 à x_m* dans le graphe associé à la chaîne de Markov homogène si et seulement si

$$Q(x_1, x_2)Q(x_2, x_3) \dots Q(x_{m-1}, x_m) > 0.$$

Grâce au graphe associé à Q , on peut voir la suite $(X_n)_n$ comme marquant les positions successives d'un pion que l'on déplace sur les noeuds du graphe : si le pion est sur le noeud i , on choisit de le déplacer au noeud j avec probabilité $Q(i, j)$ et ceci indépendamment de la trajectoire passée.

On peut directement lire sur le graphe la probabilité que le pion emprunte un chemin fixé :

Proposition 21 Soit $i_0, \dots, i_n \in \mathcal{X}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$$P(X_{n+k} = i_n, \dots, X_{k+1} = i_1 | X_k = i_0) = Q(i_0, i_1)Q(i_1, i_2)Q(i_2, i_3) \dots Q(i_{n-1}, i_n)$$

Preuve. Posons $A_j = \{X_{k+j} = i_j\}$ pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$. On a :

$$P(A_n \cap \dots \cap A_1 | A_0) = P(A_n | A_{n-1} \cap \dots \cap A_0)P(A_{n-1} | A_{n-2} \cap \dots \cap A_0) \dots P(A_1 | A_0)P(A_0).$$

Comme $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition Q , $P(A_j | A_{j-1} \cap \dots \cap A_0) = Q(i_{j-1}, i_j)$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, ce qui permet de conclure. $\square$

7.3 Caractérisations d'une chaîne de Markov homogène

Proposition 22 La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène si et seulement si il existe une matrice Q ayant la propriété suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $i_0, \dots, i_n \in \mathcal{X}$,

$$P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_0 = i_0)Q(i_0, i_1) \dots Q(i_{n-1}, i_n).$$

Dans ce cas, Q est la matrice de transition de la chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Preuve.

- Supposons que $(X_n)_n$ soit une chaîne de Markov homogène. Notons Q sa matrice de transition. D'après la proposition 21 avec $k = 0$,

$$\begin{aligned} P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) &= P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1 | X_0 = i_0)P(X_0 = i_0) \\ &= P(X_0 = i_0)Q(i_0, i_1) \dots Q(i_{n-1}, i_n). \end{aligned}$$

- Réciproquement, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $i_0, \dots, i_n \in \mathcal{X}$,

$$P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_0 = i_0)Q(i_0, i_1) \dots Q(i_{n-1}, i_n).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $i_0, \dots, i_{n+1} \in \mathcal{X}$ tels que $P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) > 0$,

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) = \frac{P(X_{n+1} = i_{n+1}, X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0)}{P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0)} = Q(i_n, i_{n+1}),$$

ce qui montre que $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition Q . $\square$

Proposition 23 Soit $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux ensembles finis ou dénombrables. Soit $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{Y}$.

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ à valeurs dans $\mathcal{X}$.

On définit une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{X}$ par :

- X_0 est une variable aléatoire indépendante de la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (c'est-à-dire que pour tout n , $X_0, Y_1, \dots, Y_n$ sont des variables aléatoires indépendantes).

– $X_{n+1} = f(X_n, Y_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Alors, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène.

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $i_0, \dots, i_{n+1} \in \mathcal{X}$.

$$P(X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) = P(i_n = f(i_{n-1}, Y_n), \dots, i_1 = f(i_0, Y_1), X_0 = i_0).$$

Comme $X_0, Y_1, \dots, Y_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et comme les variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_n$ ont même loi, $P(X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) = P(i_n = f(i_{n-1}, Y_1)) \cdots P(i_1 = f(i_0, Y_1))P(X_0 = i_0)$. Donc, d'après la proposition précédente, $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition Q définie par $Q(i, j) = P(j = f(i, Y_1))$ pour tout $i, j \in \mathcal{X}$. $\square$

► **Exemple 41.** Dans l'exemple 36, la fortune du joueur X_n après la n -ième partie, vérifie la relation de récurrence : $X_n = X_{n-1} + U_n \mathbb{1}_{\{X_n \in \{1, \dots, m-1\}\}}$ où U_n désigne la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la n -ième partie et qui vaut -1 si le joueur perd la n -ième partie. Comme le joueur joue à un jeu de hasard, la suite (U_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi : $P(U_n = 1) = p = 1 - P(U_n = -1)$ et cette suite est indépendante de X_0 .

7.4 Simulation des premiers états d'une chaîne de Markov homogène

Souvent la description de l'évolution d'un système qui pourra être modélisée par une chaîne de Markov homogène permet de trouver une relation de récurrence comme celle donnée dans la proposition 23 : $X_{n+1} = f(X_n, Y_{n+1})$ avec $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi qui est indépendante de X_0 .

On dispose alors d'une méthode simple pour simuler les états successifs de ce système.

Algorithme de simulation d'une réalisation de $(X_0, \dots, X_n)$:

Simuler une réalisation x_0 de X_0 suivant la loi initiale de la chaîne de Markov.

Pour i allant de 1 à n :

 Simuler une réalisation y_i d'une v.a. de même loi que Y_i ;

$x_i \leftarrow f(x_{i-1}, y_i)$;

FinDeLaBoucle

Retourner le vecteur $(x_0, \dots, x_n)$.

Lorsque l'on cherche à simuler les premiers états d'une chaîne de Markov homogène (X_n) d'espace d'états finis $\mathcal{X} = \{1, \dots, N\}$ décrite uniquement par sa loi initiale et sa matrice de transition Q on peut utiliser l'algorithme suivant qui repose sur la proposition 22 :

Algorithme de simulation d'une réalisation de $(X_0, \dots, X_n)$ si $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition Q :

Simuler une réalisation x_0 de X_0 suivant la loi initiale de la chaîne de Markov ;

Pour k allant de 1 à n :

 Simuler une réalisation x_k d'une v.a. dont la loi est égale à la loi conditionnelle de X_k sachant que $X_{k-1} = x_{k-1}$ (cette loi $\mathcal{X}$ décrite est décrite par le vecteur ligne $(Q(x_{k-1}, 1), \dots, Q(x_{k-1}, N))$).

FinDeLaBoucle

Retourner le vecteur $(x_0, \dots, x_n)$.

N.B. Rappelons que pour tout $k \in \mathcal{X}$, la loi conditionnelle de X_i sachant que $X_{i-1} = k$ est une loi sur $\mathcal{X}$ dont les coefficients sont décrits par la k -ième ligne de la matrice de transition Q :

$$Q(k, \ell) = P(X_i = \ell | X_{i-1} = k).$$

Avec le logiciel **R**, une réalisation d'une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathcal{X} = \{1, \dots, N\}$ peut être simulée en utilisant la fonction `sample( x = 1 :N, size=1, replace = TRUE, prob = p )` où p désigne un vecteur de taille N tel que $p[i] = P(Z = i)$ pour tout $i \in \mathcal{X}$.

7.5 Exemples de chaînes de Markov

- ▷ *Exercice 49.* On constitue une séquence de lettres prises dans l'alphabet fini $\mathcal{A} = \{a, c, g, t\}$ en tirant au hasard chaque lettre parmi $\mathcal{A}$. On définit une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ en posant : $X_0 = 0$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$,
- $X_n = 0$ si la n -ième lettre de la séquence n'est pas la lettre a .
 - $X_n = k$ si la n -ième lettre de la séquence est a et si elle constitue la k -ième occurrence d'une suite successive de a , pour $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Quelles sont les valeurs de X_1 , X_2 et X_3 si les 3 premières lettres tirées sont dans l'ordre a, a, c ?
2. Pour tout entier n , exprimer X_{n+1} en fonction de X_n et de la $(n+1)$ -ième lettre tirée.
3. Expliquer comment faire pour simuler $X_1, \dots, X_n$.
4. Montrer que $(X_n)_n$ constitue une chaîne de Markov homogène sur $\mathbb{N}$. Déterminer sa matrice de transition et dessiner le graphe associé.

- ▷ *Exercice 50.* Un patient qui arrive dans un cabinet médical est dirigé vers une salle d'attente. S'il y a déjà 3 personnes qui attendent, le patient découragé repart. Un médecin est présent en permanence dans ce cabinet. Il vient toutes les 20 mn dans la salle d'attente pour voir s'il y a des patients en attente. Si c'est le cas, il prend en consultation l'un des patients, sinon il revient 20 mn plus tard. On supposera qu'une consultation ne dure pas plus de 20 mn. On discrétise le temps en intervalles de temps (t_n, t_{n+1}) de durée 20 mn. On modélise le nombre de personnes qui arrivent à ce cabinet médical pendant les intervalles de temps successifs (t_0, t_1) , (t_1, t_2) , (t_2, t_3) ,... par des variables aléatoires indépendantes et de même loi $A_1, A_2, A_3, \dots$. La loi de ces variables aléatoires est décrite par le tableau ci-dessous :

i	0	1	2	3
$P(A_1 = i)$	0.1	0.4	0.3	0.2

On note X_0 le nombre de personnes dans la salle d'attente à l'instant t_0 et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de personnes qui sont dans la salle d'attente lorsque le médecin arrive à l'instant t_n dans la salle d'attente.

1. Si au moment où le médecin arrive dans la salle d'attente il y a deux personnes dans la salle d'attente, quelle est la probabilité pour qu'il y en ait trois lorsqu'il revient 20 mn plus tard ?
2. Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n et de A_{n+1} .
3. Montrer que $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov homogène et déterminer sa matrice de transition.

- ▷ *Exercice 51.* On croise deux souris, puis on choisit au hasard deux souris de sexes opposés dans leurs descendants directs. On croise alors les souris sélectionnées, puis on recommence. On s'intéresse à un gène qui peut s'exprimer sous deux formes A et a . Il y a alors 6 génotypes pour le couple de souris sélectionné à la n -ième génération $E_1 = AA \times AA$, $E_2 = AA \times Aa$, $E_3 = Aa \times Aa$, $E_4 = Aa \times aa$, $E_5 = aa \times aa$ et $E_6 = AA \times aa$.

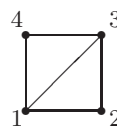
1. Expliquer comment simuler la suite des génotypes des couples de souris sélectionnés.
2. Montrer que la suite des génotypes des couples de souris sélectionnés constitue une chaîne de Markov.
3. Déterminer sa matrice de transition.

- ▷ *Exercice 52.* *Modèle simple pour une séquence d'ADN dont le premier nucléotide est a* : pour tout $n \geq 1$, on note X_n la n -ième base composant une séquence d'ADN en partant d'une de ses extrémités. On suppose que (X_n) est une chaîne de Markov homogène d'espace d'états $\mathcal{A} = \{a, c, g, t\}$ et d'état initial a (on identifiera a à l'état 1, c à l'état 2, g à l'état 3 et t à l'état 4). On note Q sa matrice de transition.

1. Exprimer à l'aide de la matrice Q , la probabilité que la séquence commence par le motif $aacg$.
2. Montrer que la 4-ième base est indépendante de la seconde sachant que la 3-ième base est a .
3. Expliquer comment simuler les n premières bases d'une séquence pour ce modèle.

- ▷ *Exercice 53.*

Une fourmi se déplace le long des arêtes du dessin ci-contre de la façon suivante : arrivée à un sommet, elle choisit au hasard une arête partant de ce sommet et la parcourt jusqu'à atteindre un autre sommet.



Montrer que la suite des sommets visités par la fourmi est une chaîne de Markov homogène et donner la matrice de transition de cette chaîne.

On observe à un instant donné, que la fourmi se trouve au sommet 4. Quelle est la probabilité pour que la fourmi se retrouve au sommet 4 après avoir parcouru 3 arêtes ?

- ▷ *Exercice 54.*

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Le tableau d'un jeu de l'oie simple est constitué de 9 cases numérotées de 1 à 9. La case 1 est la case de départ et la case 9 est la case d'arrivée. Pour faire avancer le pion, on lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on avance le pion d'un nombre de cases égal au nombre obtenu avec le dé. Le jeu s'arrête lorsque le pion tombe exactement sur la case 9. Sinon le pion recule.

Par exemple, si le pion se trouve sur la case 8 et si le dé tombe sur 3, le pion va à la case 7. Si au coup suivant, le dé tombe sur 1, le pion retourne sur la case 8. On supposera que lorsque le jeu s'arrête, les positions suivantes du pion sont toujours 9.

1. Montrer que les positions successives du pion définissent une chaîne de Markov homogène sur les entiers de 1 à 9. Donner la matrice de transition de cette chaîne de Markov.

Indication : pour chaque position i possible du pion et pour chaque nombre k obtenu en lançant le dé, déterminer la prochaine position $f(i, k)$ du pion. Les résultats obtenus pourront être écrits sous forme d'un tableau.

2. Dans le véritable jeu de l'oie, toutes les cases ne sont pas identiques. On modifie le plateau du jeu en supposant que la case 7 est une case "oubliette", ce qui signifie que si le pion tombe sur cette case, il y reste indéfiniment. Déterminer la matrice de transition de la chaîne de Markov qui décrit les positions successives du pion sur ce nouveau plateau.
3. *Une autre variante :* on modifie le plateau initial en supposant que sur la case 4, il est écrit "attendre deux tours". Les positions successives du pion sur le plateau ne constitue plus une chaîne de Markov. Expliquez pourquoi.
Montrer que l'on peut tout de même décrire le mouvement du pion dans ce nouveau jeu par une chaîne de Markov homogène en ajoutant deux cases fictives au plateau.

- ▷ **Exercice 55.** (*Chaîne d'Ehrenfest*) On modélise le mouvement de $m \geq 2$ molécules entre deux compartiments notés A et B de la façon suivante : on discrétise le temps en intervalles de même durée notée Δt . On suppose que pendant un intervalle de temps Δt , une molécule tirée au hasard change de compartiment. On note X_n le nombre de molécules dans le premier compartiment à l'instant $n\Delta t$.

Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov homogène dont on donnera la matrice de transition Q et le graphe associé.

- ▷ **Exercice 56.** On considère un système capable de reconnaître les lettres d'une séquence formée à partir des lettres **a**, **c**, **g**, **t** et capable de donner les positions du motif **aac** dans la séquence.

Description du fonctionnement du système : le système peut être dans quatre états différents numérotés de 0 à 3 :

- le système est dans l'état 3 si les trois dernières lettres qu'il a lues forment le motif **aac**,
- le système est dans l'état 2 si les deux dernières lettres qu'il a lues forment le motif **aa**,
- le système est dans l'état 1 si la dernière lettre qu'il a lue est **a** et si l'avant-dernière lettre lue n'est pas **a**,
- dans les situations autres que les trois situations précédentes, le système est dans l'état 0.

On fait lire au système une séquence de lettres que l'on constitue en tirant les lettres indépendamment les unes des autres, de sorte que :

- la lettre **a** est tirée avec probabilité $\frac{1}{3}$,
- les lettres **c** et **t** sont tirées avec probabilité $\frac{1}{4}$ chacune,
- la lettre **g** est tirée avec probabilité $\frac{1}{6}$.

L'état du système après la lecture de la n -ième lettre est une variable aléatoire que l'on note X_n (par hypothèse $X_0 = 0$).

1. Montrer que la suite $(X_n)_n$ définit une chaîne de Markov homogène. Déterminer sa matrice de transition.
2. Représenter le graphe associé à la matrice de transition de $(X_n)_n$.

- ▷ **Exercice 57.** Le modèle simple de Wright-Fisher décrit l'évolution de la fréquence des allèles A et a d'un même gène dans une population de taille fixe. Ce modèle suppose que les croisements se forment au hasard relativement à ce gène (hypothèse de panmixie) qu'il n'y a ni mutation, ni effet de la sélection.

Hypothèses :

- on suppose que la taille de la population est constante égale à N à chaque génération (les individus de la génération k sont par définition, les descendants directs d'un croisement de deux individus de la génération $k - 1$). Les gènes des individus d'une génération constituent un ensemble de $2N$ gènes.
- Pour constituer l'ensemble des gènes des individus de la génération $k + 1$, on tire au hasard chaque gène parmi les gènes des individus de la génération k (tirage avec remise).

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le nombre d'allèles A dans l'ensemble des gènes des individus de la k -ième génération. Montrer que la suite $(X_k)_k$ est une chaîne de Markov homogène et déterminer sa matrice de transition Q .

8 Loi de la chaîne à un instant donné

Dans toute la suite du cours, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une chaîne de Markov homogène de matrice de transition Q et d'espace d'états $\mathcal{X}$, fini ou dénombrable. D'après la proposition 22, la loi d'une chaîne de Markov homogène est entièrement déterminée par la donnée de la loi de X_0 et de sa matrice de transition Q . On peut déduire de cette proposition plusieurs formules simples permettant le calcul des probabilités de transition en m étapes et le calcul de la loi de X_n .

Proposition 24 (Probabilités de transition en m étapes)

Soit $i, j \in \mathcal{X}$ deux états et $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m \geq 1$. Notons H_{n-1} un événement ne dépendant que des valeurs de $X_0, \dots, X_{n-1}$ et tel que $P(\{X_n = i\} \cap H_{n-1}) > 0$. La probabilité $P(X_{n+m} = j | \{X_n = i\} \cap H_{n-1})$

ne dépend que de m , i et j . Notons-la $p^{(m)}(i, j)$. Elle peut s'obtenir par récurrence :

$$p^{(1)}(i, j) = Q(i, j) \text{ et pour tout } m \in \mathbb{N}^*, p^{(m)}(i, j) = \sum_{\ell \in \mathcal{X}} Q(i, \ell) p^{(m-1)}(\ell, j). \quad (3)$$

N.B. La probabilité que la chaîne de Markov passe de l'état i à j en m coups est égale à $p^{(m)}(i, j)$. La proposition dit simplement que cette probabilité est égale à la probabilité de passer de i à un certain état ℓ en un coup, puis d'aller de l'état ℓ à l'état j en $m - 1$ coups.

Si l'ensemble des états $\mathcal{X}$ est fini, la formule (3) dit que $p^{(m)}(i, j)$ est le coefficient (i, j) du produit matricielle de Q par la matrice $p^{(m-1)} = (p^{(m-1)}(i, j))_{(i, j) \in \mathcal{X}^2}$. La formule (3) a toujours un sens lorsque $\mathcal{X}$ est dénombrable ce qui permet d'étendre la multiplication à des matrices à coefficients positifs ayant un nombre infini de lignes et de colonnes. Donc, en utilisant les notations matricielles, on en déduit que $p^{(m)}(i, j)$ est le coefficient (i, j) de la matrice Q^m et en particulier :

Corollaire 25 Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $i, j \in \mathcal{X}$, $P(X_{n+m} = j \mid X_n = i)$ est le coefficient (i, j) de la matrice Q^m .

Preuve de la proposition 24. Le fait que $P(X_{n+m} = j \mid \{X_n = i\} \cap H_{n-1})$ ne dépend que de i , j et m peut se montrer par récurrence sur m .

- Pour $m = 1$, la propriété est une conséquence directe de la définition d'une chaîne de Markov homogène ; en effet, H_{n-1} est un événement de la forme " $(X_{n-1}, \dots, X_0) \in A$ " et

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, (X_{n-1}, \dots, X_0) \in A) &= \\ \sum_{(\ell_{n-1}, \dots, \ell_0) \in A} P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = \ell_{n-1}, \dots, X_0 = \ell_0) \frac{P(X_n = i, X_{n-1} = \ell_{n-1}, \dots, X_0 = \ell_0)}{P(X_n = i, (X_{n-1}, \dots, X_0) \in A)} &= Q(i, j) \end{aligned}$$

- Soit $m \geq 2$. Supposons que le résultat soit vrai pour $m - 1$, c'est-à-dire que pour tout n , $i \in \mathcal{X}$, $j \in \mathcal{X}$ et pour tout événement H_{n-1} ne dépendant que de $(X_0, \dots, X_{n-1})$, $P(X_{n+m-1} = j \mid \{X_n = i\} \cap H_{n-1})$ ne dépend ni de n , ni de H_{n-1} . On note cette probabilité $p^{(m-1)}(i, j)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En décomposant par rapport à la valeur de X_{n+1} on obtient :

$$P(X_{n+m} = j \mid \{X_n = i\} \cap H_{n-1}) = \sum_{k \in \mathcal{X}} P(X_{n+m} = j \mid \{X_{n+1} = k\} \cap G_n) P(X_{n+1} = k \mid \{X_n = i\} \cap H_{n-1})$$

avec $G_n = \{X_n = i\} \cap H_{n-1}$. Comme G_n est un événement ne dépendant que de $X_0, \dots, X_n$, l'hypothèse de récurrence implique que $P(X_{n+m} = j \mid \{X_{n+1} = k\} \cap G_n) = p^{(m-1)}(k, j)$.

D'autre part, $P(X_{n+1} = k \mid \{X_n = i\} \cap H_{n-1}) = Q(i, k)$. Donc, $P(X_{n+m} = j \mid \{X_n = i\} \cap H_{n-1})$ ne dépend que de i , de j et de m , ce qui termine la preuve par récurrence.

Remarquons enfin que si on note $p^{(m)}(k, j)$ la valeur de $P(X_{n+m} = j \mid \{X_{n+1} = k\} \cap G_n)$ on a aussi obtenu dans la preuve l'égalité suivante : $p^{(m)}(i, j) = \sum_{k \in \mathcal{X}} Q(i, k) p^{(m-1)}(k, j)$. $\square$

On peut déduire de la proposition 24 une façon simple de calculer la loi de X_n puisque

$$P(X_n = j) = \sum_{i \in \mathcal{X}} P(X_n = j \mid X_0 = i) P(X_0 = i) :$$

Corollaire 26 (Loi de X_n) On identifie ici l'espace des états $\mathcal{X}$ à l'ensemble $\{1, 2, \dots, N\}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons π_n le vecteur ligne donnant la loi de X_n :

$$\pi_n = (P(X_n = 1), P(X_n = 2), \dots, P(X_n = N)).$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\pi_n = \pi_0 Q^n$.
- Les lois de $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ peuvent s'obtenir de façon récursive :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ et } j \in \{1, \dots, N\}, \pi_{k+1}(j) = \sum_{i=1}^N \pi_k(i) Q(i, j),$$

ce qui s'écrit matriciellement, $\pi_{k+1} = \pi_k Q$.

- ▷ **Exercice 58.** Considérons un système qui peut se trouver dans 3 états différents notés 1, 2, 3 à chaque unité de temps. Supposons que l'on puisse décrire l'évolution de l'état du système par une chaîne de Markov homogène

$(X_n)_{n \geq 0}$ de matrice de transition $Q = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$, X_n décrivant l'état du système à l'instant n . On ne

connait pas l'état du système à l'instant 0 mais on sait qu'il a une chance sur 2 de s'être trouvé dans l'état 1 à l'instant 0 et une chance sur 2 de s'être trouvé dans l'état 2.

Quelle est la loi de X_3 ? A l'instant 1, on a observé que le système se trouvait dans l'état 2. Quelle est la probabilité qu'il se trouve dans l'état 3 à l'instant 4?

Solution. Notons π_k le vecteur contenant les coefficients de la loi de X_k : $\pi_k = (P(X_k = 1), P(X_k = 2), P(X_k = 3))$. D'après l'énoncé, la loi initiale est $\pi_0 = (1/2, 1/2, 0)$.

1. D'après le corollaire 26, $\pi_3 = \pi_0 Q^3 = (0.338, 0.432, 0.23)$.

2. On demande de déterminer $P(X_4 = 3 | X_1 = 2)$. D'après le corollaire 25, $P(X_4 = 3 | X_1 = 2) = [Q^3](2, 3) = 0.183$.

- ▷ **Exercice 59.** (suite de l'exercice 36, page 31) Donner une formule permettant de calculer la loi de X_n en fonction des coefficients de la loi de X_{n-1} lorsque la fortune qu'il cherche à atteindre est $m \geq 4$. On suppose que la fortune initiale du joueur est de 1 euro. Utiliser cette formule pour déterminer la loi de la fortune du joueur après la première partie, la deuxième partie, puis la troisième partie. Quelle est la probabilité qu'il joue au plus 4 parties?

Solution. D'après l'énoncé,

- $X_n = X_{n-1}$ si $X_{n-1} = 0$ ou $X_{n-1} = m$;
- $X_n = X_{n-1} - 1$ si $1 \leq X_{n-1} \leq m-1$ et si le joueur perd la n -ème partie.
- $X_n = X_{n-1} + 1$ si $1 \leq X_{n-1} \leq m$ et si le joueur gagne la n -ème partie.

Soit $k \in \{1, \dots, m-1\}$.

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= P(X_n = k \text{ et } X_{n-1} = k-1) + P(X_n = k \text{ et } X_{n-1} = k+1) \\ &= P(X_n = k | X_{n-1} = k-1)P(X_{n-1} = k-1) + P(X_n = k | X_{n-1} = k+1)P(X_{n-1} = k+1) \text{ avec} \end{aligned}$$

- $P(X_n = k | X_{n-1} = k-1) = p$ si $k \geq 2$ et $P(X_n = k | X_{n-1} = k-1) = 0$ si $k = 1$;
- $P(X_n = k | X_{n-1} = k+1) = 1-p$ si $k \leq m-2$ et $P(X_n = k | X_{n-1} = k+1) = 0$ si $k = m-1$.

De même,

$$P(X_n = 0) = P(X_n = 0 \text{ et } X_{n-1} = 0) + P(X_n = 0 \text{ et } X_{n-1} = 1) = P(X_{n-1} = 0) + (1-p)P(X_{n-1} = 1).$$

$$P(X_n = m) = P(X_n = m \text{ et } X_{n-1} = m) + P(X_n = m \text{ et } X_{n-1} = m-1) = P(X_{n-1} = m) + pP(X_{n-1} = m-1).$$

Notons $u_n(k) = P(X_n = k)$ pour tout $k \in \{0, \dots, m\}$. La loi de X_n est décrite par le vecteur $u_n = (u_n(0), \dots, u_n(m))$.

On a obtenu :

$$\begin{cases} u_n(0) &= u_{n-1}(0) + (1-p)u_{n-1}(1) \\ u_n(1) &= (1-p)u_{n-1}(2) \\ u_n(k) &= pu_{n-1}(k-1) + (1-p)u_{n-1}(k+1) \text{ si } k \in \{2, \dots, m-2\} \\ u_n(m-1) &= pu_{n-1}(m-2) \\ u_n(m) &= pu_{n-1}(m-1) + u_{n-1}(m) \end{cases}$$

Pour $s = 1$, on obtient : $u_0 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $u_1 = (1-p, 0, p, 0, \dots, 0)$, $u_2 = (1-p, p(1-p), 0, p^2, 0, \dots, 0)$ et $u_3 = (1-p+p(1-p)^2, 0, 2p^2(1-p), 0, p^3, 0, \dots, 0)$.

Le joueur s'arrête de jouer s'il n'a plus d'euro ou s'il a m euros. Comme par convention, $X_n = X_{n-1}$ si $X_{n-1} = 0$ ou m , la probabilité qu'il joue au plus 4 parties est égale à $a = P(X_4 = 0) + P(X_4 = m)$. Si $m > 4$ alors $a = 1-p+p(1-p)^2$ et si $m = 4$ alors $a = 1-p+p(1-p)^2+p^3$.

- ▷ **Exercice 60.** Une source émet une suite de bits 0 et 1. On suppose que la loi du premier bit émis est donnée par

le tableau suivant :

0	1
11/20	9/20

On suppose que les chiffres successivement émis constituent une chaîne de

Markov homogène dont la matrice de transition est : $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{11}{20} & \frac{9}{20} \end{pmatrix}$. Quelle est la probabilité que le premier bit 1 émis par la source soit le troisième bit de la suite?

- ▷ **Exercice 61.** (suite de l'exercice 38, page 31 sur l'autofécondation d'une plante)

Lorsqu'on ne connaît pas le génotype de la plante initiale, on peut par exemple supposer que l'on ait autant de chance que la plante soit de type AA, Aa ou aa pour le gène étudié : cela signifie que l'on prend comme loi initiale de la chaîne de Markov $(X_n)_n$ la loi uniforme sur les 3 états de la chaîne.

1. Calculer sous cette hypothèse la loi de X_1 , puis la loi de X_2 .

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 - 1/2^{n+1} & 1/2^n & 1/2 - 1/2^{n+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. En déduire une expression de la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par quelle loi peut-on approcher la loi de X_n lorsque n est grand?

- ▷ **Exercice 62.** *Modèle de substitution.* On s'intéresse uniquement aux mutations correspondant à des substitutions d'un nucléotide par un autre sur une base lors de la réplication d'une séquence d'ADN. On supposera qu'à chaque réplication et sur chaque base de la séquence, une purine a une probabilité $p \in [0, 1[$ d'être substituée en une

pyrimidine et une pyrimidine a une probabilité $q \in [0, 1[$ d'être substituée en une purine, ceci indépendamment des autres bases et de ce qui s'est passé dans les réplifications précédentes. On considère la suite des séquences obtenues à partir d'une séquence donnée par réplifications successives : la n -ième séquence désigne la séquence obtenue par réplification de la $(n-1)$ -ième séquence. A la k -ième base de la séquence, on associe la variable aléatoire $X_n^{(k)}$ qui vaut 1 si elle est occupée par une purine et qui vaut 2 si elle est occupée par une pyrimidine.

1. Ecrire la matrice de transition de la chaîne de Markov $X_n^{(k)}$. On la notera T dans la suite.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(p+q)T^n = (1-p-q)^n \begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}$.
3. Que peut-on dire de T^n lorsque n tend vers $+\infty$?
4. On pose $a = P(X_0 = 1) = 1 - P(X_0 = 2)$.
 - (a) Que peut-on dire de la loi de X_n lorsque n tend vers $+\infty$?
 - (b) Que peut-on dire de $P(X_n = X_0)$ lorsque n tend vers $+\infty$?
5. Montrer que si $k \neq l$ alors $(X_n^{(k)}, X_n^{(l)})_n$ définit une chaîne de Markov homogène et déterminer sa matrice de transition.

▷ **Exercice 63.** On considère une population de cellules toutes identiques (génération 0). Si on ne tient pas compte de l'apparition possible de mutations, chaque cellule de cette population donne naissance à deux cellules identiques avec probabilité p et meurt sans se diviser avec probabilité $1-p$ ($p \in [0, 1]$). Les cellules issues de la division des cellules de la génération $n-1$ constituent les cellules de la génération n . On note X_n le nombre de cellules à la génération n .

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ définit une chaîne de Markov homogène dont on déterminera l'espace des états.
2. On suppose que la population à la génération 0 est constituée d'une cellule. Déterminer la loi du nombre de cellules à la génération 2.
3. Si on suppose maintenant que la population de cellules à la génération 0 est constituée de deux cellules, quelle est la loi du nombre de cellules à la génération 2?

▷ **Exercice 64.** Une séquence d'ADN peut être vue comme une suite de lettres **a**, **c**, **g**, **t**.

On choisit de la modéliser comme une réalisation d'une chaîne de Markov homogène.

Plus précisément, pour tout $n \geq 1$, on note X_n la n -ième base composant une séquence d'ADN en partant d'une de ses extrémités et on suppose que (X_n) est une chaîne de Markov homogène d'espace d'états $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{g}, \mathbf{t}\}$ (on identifiera **a** à l'état 1, **c** à l'état 2, **g** à l'état 3 et **t** à l'état 4) de matrice de transition Q .

$$Q = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.6 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

La loi de la première base est décrite par le tableau suivant :

a	c	g	t
0	0.6	0	0.4

1. Déterminer la probabilité que la séquence commence par le codon **tag**.
2. Déterminer la probabilité que la troisième base soit **c**.
3. Déterminer la probabilité que le 4-ième nucléotide soit un **a** sachant que le 2-ième nucléotide est un **a**.
4. Déterminer la probabilité que les bases 1 et 2 forment le motif **ta**, sachant que les bases 3 et 4 forment le motif **ca**.

9 Loi invariante et comportement asymptotique de la loi de X_n

Dans cette partie $\mathcal{X}$ désigne un ensemble ayant un nombre fini d'éléments que l'on peut identifier à $\{1, \dots, r\}$ avec r un entier strictement positif, ou bien un ensemble dénombrable comme $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}$ et $(X_n)_n$ désigne une chaîne de Markov homogène d'espace d'états $\mathcal{X}$.

9.1 Loi de probabilité invariante

Définition. Soit Q une matrice stochastique sur l'ensemble $\mathcal{X} = \{1, \dots, r\}$ avec $r \in \mathbb{N}^*$ ou $r = +\infty$.

On dit qu'un vecteur $v = (v(1), \dots, v(r))$ est *invariant par Q* si $vQ = v$ c'est-à-dire si pour tout $j \in \mathcal{X}$,

$$v(j) = \sum_{i \in \mathcal{X}} v(i)Q(i, j).$$

On dit qu'un vecteur $\mu = (\mu(1), \dots, \mu(r))$ définit une *loi de probabilité invariante par Q* si les coefficients de μ sont positifs, leur somme est égale à 1 et si μ est invariant par Q .

Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition Q , une loi de probabilité invariante par Q est aussi appelée *une loi stationnaire de la chaîne $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$* .

N.B. Lorsque r est fini, trouver les lois de probabilité invariantes par Q revient donc à trouver les vecteurs $(x_1, \dots, x_r)$ à coefficients positifs ou nuls solution du système suivant formé de $r + 1$ équations :

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & \dots & + & x_r & = & 1 \\ x_1(Q(1,1) - 1) & + & x_2Q(2,1) & + & \dots & + & x_rQ(r,1) & = & 0 \\ x_1Q(1,2) & + & x_2(Q(2,2) - 1) & + & \dots & + & x_rQ(r,2) & = & 0 \\ \dots & & & & & & & & \\ x_1Q(1,r) & + & x_2Q(2,r) & + & \dots & + & x_r(Q(r,r) - 1) & = & 0 \end{cases}$$

N.B. Si μ_1 et μ_2 sont deux lois de probabilité invariantes par Q alors pour tout $\alpha \in [0, 1]$, $\alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2$ est encore une loi de probabilité invariante par Q .

► **Exemple 42.** (*Chaîne à deux états*) Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov homogène d'espace d'états $\{1, 2\}$ et de matrice de transition $Q = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ avec $p, q \in [0, 1]$. Si $p + q > 0$, la loi de probabilité $\mu = (\frac{q}{p+q}, \frac{p}{p+q})$ sur $\{1, 2\}$ est l'unique loi de probabilité invariante par Q . Si $p = q = 0$ alors Q est la matrice identité, toutes les lois de probabilité sur $\{1, 2\}$ sont invariantes par Q .

Propriété 27 Soit $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov de matrice de transition Q . Supposons que la loi de X_0 soit invariante par Q .

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_n est égale à la loi de X_0 .

Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$, $(X_m, \dots, X_{m+n})$ a même loi que $(X_0, \dots, X_n)$ (on dit alors que la suite $(X_n)_n$ est stationnaire).

N.B. Comme $P(X_{n+1} = x) - P(X_n = x) = P(X_{n+1} = x, X_n \neq x) - P(X_{n+1} \neq x, X_n = x)$, dire que la loi de la chaîne de Markov ne varie pas, signifie donc que si on considère un grand nombre de systèmes dont l'évolution est décrite par cette chaîne de Markov, on s'attend à ce que la proportion de systèmes qui arrivent dans l'état x entre deux instants successifs soit très proche de la proportion de ceux qui étaient dans l'état x et qui le quittent.

► **Exemple 43.** Si le déplacement quotidien d'un vélo en location entre les différents points de prêts/restitutions de la société de location se modélise fidèlement par une chaîne de Markov homogène, choisir le nombre de vélos disponibles dans les différents points de prêts/restitutions proportionnellement aux coefficients d'une probabilité invariante par la chaîne de Markov assure une stabilité de la répartition des vélos au cours du temps.

► **Exemple 44.** *Modélisation markovienne d'une séquence d'ADN de longueur K*

Une séquence d'ADN peut être vue comme une suite de lettres **a**, **c**, **g** et **t**. Modéliser une séquence d'ADN de longueur K par une chaîne de Markov homogène, consiste à considérer les K nucléotides de la séquence en partant de l'extrémité 5' comme une réalisation des K premiers états d'une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n \geq 1}$. Dans les applications, on choisit en général la matrice de transition Q de $(X_n)_{n \geq 1}$ comme une matrice dont tous les coefficients sont strictement positifs et on choisit X_1 , le premier nucléotide de la séquence d'ADN, suivant la loi de probabilité invariante⁴ notée μ dans la suite. Dans ce cas, on aura la même probabilité de trouver le nucléotide **a** (resp. **c**, **g** et **t**) sur la base 1 que sur n'importe quelle autre base. Cela est vrai aussi pour n'importe quelle suite de nucléotides.

Regardons par exemple le motif **tag**. Comme on a la même probabilité de trouver le motif **tag** en première position⁵ qu'à n'importe quelle autre position de la séquence, alors le nombre moyen de motifs **tag** dans la séquence $(X_1, \dots, X_K)$ est $(K-2)\mu(\mathbf{t})Q(\mathbf{t}, \mathbf{a})Q(\mathbf{a}, \mathbf{g})$. Comme la probabilité que le motif **tag** occupe en même temps les bases $(i, i+1, i+2)$ et les bases $(j, j+1, j+2)$ est nulle pour $|i-j| \leq 2$ et vaut $\mu(\mathbf{t})Q(\mathbf{t}, \mathbf{a})Q(\mathbf{a}, \mathbf{g})Q^\ell(\mathbf{g}, \mathbf{t})Q(\mathbf{t}, \mathbf{a})Q(\mathbf{a}, \mathbf{g})$ si $|i-j| = 2 + \ell$ pour $\ell \geq 1$ alors la variance du nombre de motifs **tag** est

$$(K-2)p_{tag} - (K-2)^2 p_{tag}^2 + 2 \frac{p_{tag}^2}{\mu(\mathbf{t})} \sum_{\ell=1}^{K-5} (K-\ell-4) Q^\ell(\mathbf{g}, \mathbf{t}) \text{ où } p_{tag} = \mu(\mathbf{t})Q(\mathbf{t}, \mathbf{a})Q(\mathbf{a}, \mathbf{g}).$$

► **Exercice 65.** (*suite de l'exemple 38, page 31 sur l'autofécondation d'une plante*) Déterminer les lois stationnaires de la chaîne de Markov $(X_n)_n$ décrivant le génotype de la plante choisie à la génération n .

► **Exercice 66.** Pour la chaîne de Markov décrivant l'évolution de la fortune du joueur (exemple 36), montrer que toutes les lois de probabilité de la forme suivante sont des lois de probabilité invariantes par la chaîne : $\mu = (a, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-1 \text{ fois}}, 1-a)$ avec $a \in [0, 1]$.

⁴On verra dans la suite du cours qu'une telle matrice de taille finie et dont tous les coefficients sont strictement positifs admet une unique loi de probabilité invariante

⁵On dira qu'il y a un motif **tag** en positif ℓ si la ℓ -ième base est un **t**, la $(\ell+1)$ -ième base est un **a** et si la $(\ell+2)$ -ième base est un **g**.

▷ **Exercice 67.** Deux joueurs A et B s'affrontent à un jeu de hasard. On définit le score du joueur A de la façon suivante : initialement le score de A est 0. A chaque partie gagnée, son score augmente de 1. A chaque partie perdue son score diminue de 1. On suppose que le jeu est équitable. On note X_n le score du joueur A après la n -ième partie.

1. Montrer que la suite $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov homogène sur $\mathbb{Z}$ et donner sa matrice de transition Q .
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\ell \in \{0, \dots, n\}$. Calculer la probabilité que sur n parties le joueur A en gagne ℓ .
3. Dédurre de la question précédente que, pour tout $n, k \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{Z}$, $P(X_{n+k} = y | X_n = x) = C_k^{(y-x+k)/2} 1/2^k$ si $(y-x+k)/2$ est un entier compris entre 0 et k .
4. Montrer que si la famille de réels positifs $(z_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est invariante par la matrice de transition Q , c'est-à-dire si $z_j = \sum_{i \in \mathbb{Z}} z_i Q(i, j)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ alors pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $z_i = z_0 + i(z_1 - z_0)$.
5. Dédurre de la question précédente que la chaîne de Markov n'a pas de loi stationnaire.
6. En utilisant la formule de Stirling suivante :

$$\frac{n!e^n}{\sqrt{2\pi n}n^n} \text{ tend vers } 1 \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty,$$

montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, $P(X_{n+k} = y | X_n = x)$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$.

▷ **Exercice 68.** (suite de l'exercice 49) Montrer que la chaîne de Markov décrite dans l'exercice 49 admet, comme unique probabilité invariante, la loi géométrique⁶ sur $\mathbb{N}$ de paramètre $\frac{3}{4}$.

▷ **Exercice 69.** On construit une suite de 100 bits 0 et 1 de la façon suivante : on tire le premier bit X_1 suivant la loi $\mu_1 = (1/3, 2/3)$. Une fois les n premiers bits choisis, on tire le $(n+1)$ -ième bit X_{n+1} de sorte que $P(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) = 1/2$ et $P(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) = 1/4$.

1. En moyenne combien de bits 1 y aura-t-il dans une telle suite ?
2. En moyenne combien de motifs 000111 y aura-t-il dans une telle suite ?

▷ **Exercice 70.**

Dans le modèle de substitution en temps discret proposé par Kimura, la substitution d'un nucléotide par un autre à une base donnée est décrite par une chaîne de Markov homogène dont les états sont $e_1 = a$, $e_2 = g$, $e_3 = c$ et $e_4 = t$ et dont la matrice transition est de la

forme

$$Q = \begin{pmatrix} 1 - \alpha - 2\beta & \alpha & \beta & \beta \\ \alpha & 1 - \alpha - 2\beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & 1 - \alpha - 2\beta & \alpha \\ \beta & \beta & \alpha & 1 - \alpha - 2\beta \end{pmatrix}$$

avec $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + 2\beta < 1$.

1. Montrer que la chaîne de Markov admet la loi uniforme comme loi de probabilité invariante.
2. On dispose d'une séquence d'ADN dont le premier nucléotide est un **a**. En supposant que chaque base a subi des mutations suivant le modèle de Kimura au cours des réplifications successives et que les nucléotides sur la séquence d'origine sont distribués suivant la loi uniforme, quelle est la probabilité que la séquence avant la dernière répllication commence par le nucléotide **t** ?

▷ **Exercice 71.** Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition Q et de loi initiale μ . On suppose que μ est une loi de probabilité invariante par Q . On note $\mathcal{A}$ le support de μ (c'est-à-dire l'ensemble des états i pour lesquels $\mu(i) > 0$). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose $Y_k = X_{n-k}$.

Déterminer la loi conditionnelle de Y_k sachant que $\{Y_0 = i_0, \dots, Y_{k-1} = i_{k-1}\}$ pour tout $i_0, \dots, i_{k-1} \in \mathcal{A}$.

▷ **Exercice 72.** (suite de l'exercice 55) On suppose qu'au départ, chaque molécule est placée au hasard dans l'un des deux compartiments. Quelle est la loi de X_0 . Déterminer la loi de X_1 ? Que peut-on dire de la loi de X_n pour tout $n \geq 2$?

9.2 Convergence en loi

Définition. Soit $(Z_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathcal{X}$.

1. Soit μ une loi de probabilité sur $\mathcal{X}$. On dit que la loi de Z_n converge vers μ lorsque n tend vers $+\infty$ si pour tout $x \in \mathcal{X}$, $P(Z_n = x)$ converge vers $\mu(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. On dit que la loi de Z_n converge lorsque n tend vers $+\infty$ s'il existe une loi de probabilité μ sur $\mathcal{X}$ telle que $P(Z_n = x)$ tende vers $\mu(x)$ pour tout $x \in \mathcal{X}$.

► **Exemple 45.** Notons Z_n une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors la loi de Z_n converge vers la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

► **Exemple 46.** Soit a un réel strictement positif. Pour tout entier $n \geq a$, notons Z_n une variable aléatoire de loi de binomiale $\mathcal{B}(n, a/n)$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(Z_n = k)$ tend vers $q_k = e^{-a} \frac{a^k}{k!}$ lorsque n tend vers $+\infty$. L'ensemble des coefficients q_k , $k \in \mathbb{N}$ forme une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$ puisque $\sum_{k=0}^{+\infty} q_k = 1$. Cette loi est appelée la loi de Poisson de paramètre a . On en déduit donc que la loi de Z_n converge vers la loi de Poisson de paramètre a lorsque n tend vers $+\infty$.

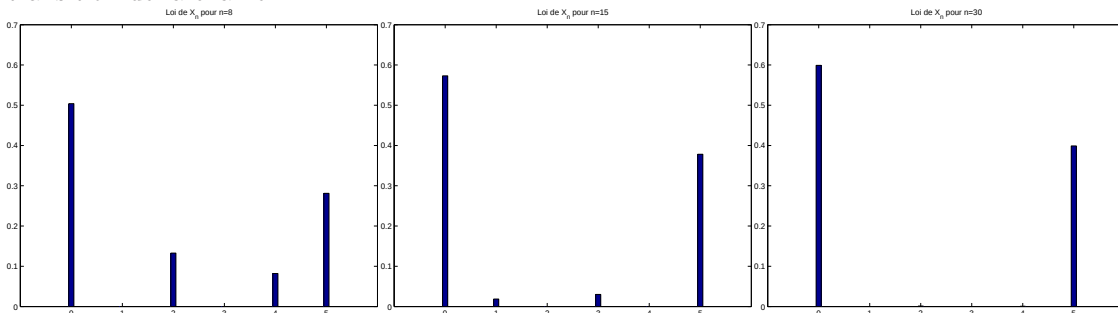
⁶La loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $a \in [0, 1]$ est définie comme la probabilité sur $\mathbb{N}$ qui affecte, à chaque entier positif k , le « poids » $(1-a)^k a$.

9.3 Exemples de comportements en loi

Nous donnons dans ce paragraphe des exemples illustrant différents types d'évolutions de la loi à un instant donné d'une chaîne de Markov homogène.

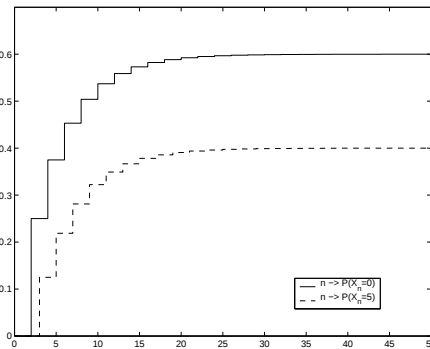
9.3.1 Exemple d'une chaîne de Markov dont la loi converge vers une loi qui dépend de la loi initiale de la chaîne.

Dans l'exemple de la chaîne de Markov (X_n) décrivant l'évolution de la fortune d'un joueur jouant à un jeu de hasard équitable (voir exemple 36), la loi de la fortune du joueur converge vers la loi $\mu = (1 - \frac{s}{m}, 0, \dots, 0, \frac{s}{m})$ sur $\{0, \dots, m\}$: pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$, $P(X_n = i)$ tend vers 0, $P(X_n = 0)$ tend vers $1 - \frac{s}{m}$ et $P(X_n = m)$ tend vers $\frac{s}{m}$. Dans cet exemple, toutes les lois dont le support est $\{0, m\}$ sont invariantes par la matrice de transition de la chaîne.



Les diagrammes en bâtons ci-dessus décrivent les lois de la fortune du joueur après la 8-ième partie, la 15-ième partie et la 30-ième partie dans le cas où sa fortune initiale est de 2 euros et où il cherche à atteindre la somme de $m = 5$ euros.

Les courbes ci-contre montrent l'évolution de la probabilité que le joueur n'ait plus d'argent (respectivement dispose de 5 euros) après la n -ième partie en fonction de n .



9.3.2 Exemple d'une chaîne de Markov à deux états

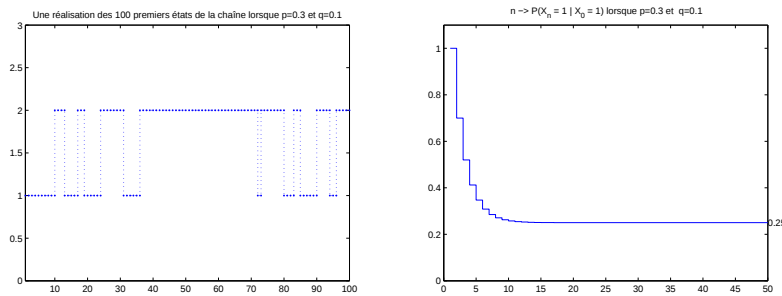
Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov homogène d'espace d'états $\{1, 2\}$ et de matrice de transition $Q = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ avec $p, q \in [0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(p+q)Q^n = (1-p-q)^n \begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Si $0 < p+q < 2$ alors Q^n tend vers la matrice $L = \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \\ \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{pmatrix}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Cela montre que quelle que soit la loi de X_0 , la loi de X_n converge vers la loi $\mu = (\frac{q}{p+q}, \frac{p}{p+q})$ qui est l'unique loi invariante par Q .

Par contre, si $p = q = 1$ c'est-à-dire si la matrice de transition s'écrit $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X_{2n} = 1 | X_0 = 1) = 1$ et $P(X_{2n+1} = 1 | X_0 = 1) = 0$. Dans ce cas, la loi de la chaîne de Markov partant de l'état 1 ne converge pas.

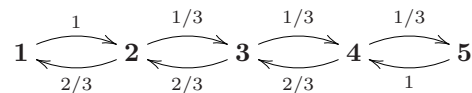
Enfin si $p = q = 0$, $X_n = X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toutes les probabilités sur $\{1, 2\}$ sont invariantes par Q .



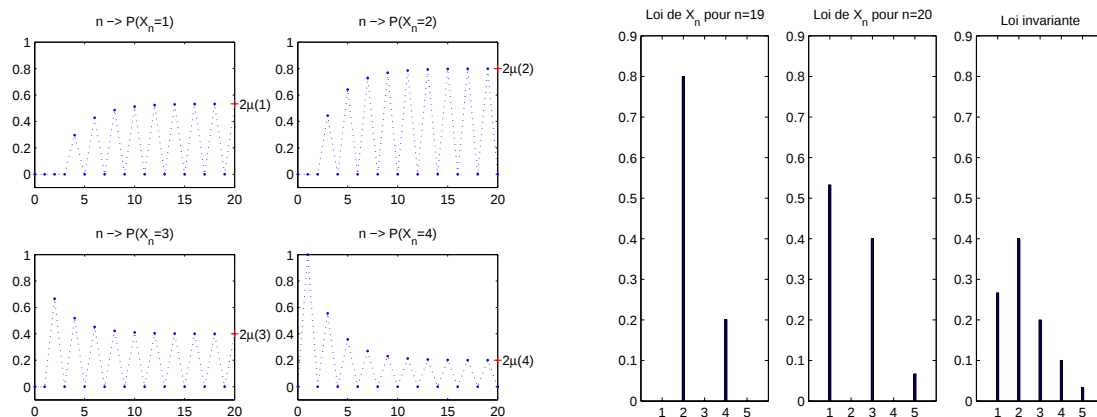
Les deux figures concernent l'exemple de la chaîne de Markov homogène à deux états avec $p = 0.3$ et $q = 0.1$. Sa loi invariante est $\mu = (1/4, 3/4)$. Sur la figure de gauche, on peut voir une réalisation de $(X_0, \dots, X_{100})$ et sur la figure de droite, la courbe $n \mapsto P(X_n = 1 | X_0 = 1)$.

9.3.3 Exemple d'une chaîne dont les lois aux instants pairs et impairs se stabilisent vers des lois différentes

Considérons la chaîne de Markov homogène $(X_n)_n$ partant de l'état 5 et dont le graphe associé à la matrice de transition est :

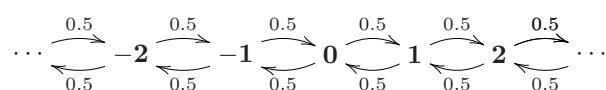


Aux instants pairs, la chaîne de Markov se trouvera dans les états 1, 3 ou 5 et aux instants impairs, elle se trouvera dans les états 2 ou 4. Les figures ci-dessous montrent que lorsque n augmente, les lois de X_{2n} et de X_{2n+1} se stabilisent rapidement vers deux lois différentes que l'on peut comparer à la loi invariante $\mu = (4/15, 2/5, 1/5, 1/10, 1/30)$ de la chaîne : la loi de X_{2n} se stabilise vers la loi $\mu_0 = (2\mu(1), 0, 2\mu(3), 0, 2\mu(5))$. La loi de X_{2n+1} se stabilise vers la loi $\mu_1 = (0, 2\mu(2), 0, 2\mu(4), 0)$.

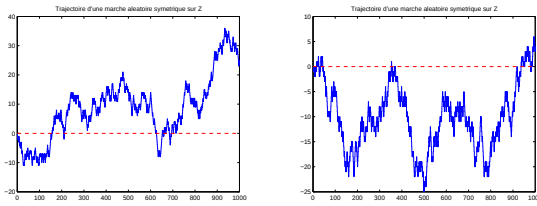


9.3.4 Exemple d'une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ dont la loi ne converge pas

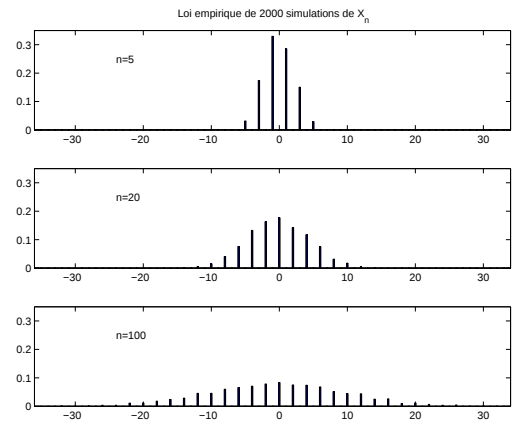
Considérons la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ définie par $X_{n+1} = X_n + \epsilon_n$ avec (ϵ_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ et indépendante de X_0 . C'est une chaîne de Markov homogène sur $\mathbb{Z}$ dont le graphe associé à la matrice de transition est :



Dans cet exemple, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X_n = k)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Donc, la loi de X_n ne converge pas lorsque n tend vers $+\infty$. On peut montrer qu'il n'existe aucune loi de probabilité invariante par la matrice de transition de cette chaîne de Markov (voir exercice 67, page 40).



Deux simulations des 1000 premiers pas d'une marche aléatoire symétrique partie de 0.



Evolution de la loi empirique de 2000 simulations de la marche aléatoire symétrique $(X_n)_n$ partie de 0.

9.4 Résultats théoriques

Sur tous les exemples vus précédemment, on observe que si la loi d'une chaîne de Markov homogène $(X_n)_n$ converge, alors sa loi limite est une loi invariante par la matrice de transition de $(X_n)_n$. On a le résultat général suivant :

Proposition 28

1. Cas d'une chaîne de Markov homogène $(X_n)_n$ d'espace d'états fini $\mathcal{X} = \{1, \dots, r\}$ et de matrice de transition Q :
 - (a) Supposons que pour tout $k \in \mathcal{X}$, $P(X_n = k)$ tend vers un nombre $L(k)$ lorsque n tend vers $+\infty$, alors $L = (L(1), \dots, L(r))$ est une probabilité invariante par Q .
 - (b) Si pour tout $k, \ell \in \mathcal{X}$, $Q^n(k, \ell)$ tend vers un nombre $\mu(\ell)$ ne dépendant pas de k , alors μ est l'unique probabilité invariante par Q .
2. Cas d'une chaîne de Markov homogène $(X_n)_n$ d'espace d'états $\mathcal{X} = \mathbb{N}^*$ et de matrice de transition Q :
 - (a) Supposons que pour tout $k \in \mathcal{X}$, $P(X_n = k)$ tend vers un nombre $L(k)$ lorsque n tend vers $+\infty$, alors le vecteur $L = (L(1), L(2), \dots)$ est invariant par Q et $\sum_{k=1}^{+\infty} L(k) \leq 1$.
 - (b) Si pour tout $k, \ell \in \mathcal{X}$, $Q^n(k, \ell)$ tend vers un nombre $\mu(\ell)$ ne dépendant pas de k , alors :
 - soit $\mu(\ell) = 0$ pour tout $\ell \in \mathcal{X}$ et dans ce cas il n'existe pas de probabilité invariante par Q ;
 - soit $\mu = (\mu(\ell), \ell \in \mathcal{X})$ définit une probabilité sur $\mathcal{X}$ qui est l'unique probabilité invariante par Q .

Preuve dans le cas d'une chaîne de Markov d'espace d'états fini.

1. Supposons que pour tout $k \in \mathcal{X}$, $P(X_n = k)$ tend vers un nombre $L(k)$. Comme limite d'une suite de termes compris entre 0 et 1, $L(k) \in [0, 1]$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k \in \mathcal{X}} P(X_n = k) = 1$ et que $\mathcal{X}$ est fini, on a $\sum_{k \in \mathcal{X}} L(k) = 1$.
Enfin, comme pour tout $i, j \in \mathcal{X}$ et $n \in \mathbb{N}$, $P(X_{n+1} = j) = \sum_{i \in \mathcal{X}} P(X_n = i)Q(i, j)$, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans les deux membres de l'égalité, on obtient : $L(j) = \sum_{i \in \mathcal{X}} L(i)Q(i, j)$. Donc L définit bien une loi de probabilité invariante par Q .
2. La même preuve que précédemment montre que si pour tout $k, \ell \in \mathcal{X}$, $Q^n(k, \ell)$ tend vers un nombre $\mu(\ell)$ ne dépendant pas de k , alors μ est une probabilité invariante par Q . Montrons que c'est la seule : soit ν une loi de probabilité invariante par Q . Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\ell \in \mathcal{X}$, $\nu(\ell) = \sum_{k \in \mathcal{X}} \nu(k)Q^n(k, \ell)$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient que pour tout $\ell \in \mathcal{X}$, $\nu(\ell) = \sum_{k \in \mathcal{X}} \nu(k)\mu(\ell) = \mu(\ell)$. Cela montre que μ est l'unique probabilité invariante. □

Les exemples précédents montrent par contre qu'il faut ajouter des hypothèses si on veut donner un résultat de convergence de la loi de X_n lorsque n tend vers $+\infty$. Nous allons donner ici des conditions suffisantes pour que la loi de X_n converge dans le cas où l'espace des états de la chaîne est fini ; le théorème suivant affirme que, pour une chaîne de Markov dont l'espace d'états est fini, si on peut trouver un entier $k \geq 1$ tel que

l'on puisse passer en exactement k étapes de n'importe quel état i à n'importe quel état j avec probabilité strictement positive alors, la loi de X_n converge à une vitesse exponentielle vers son unique loi stationnaire :

Théorème 29 Soit $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov homogène à espace d'états $\mathcal{X}$ **fini** et de matrice de transition Q vérifiant : il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ telle que tous les coefficients de Q^k soient **strictement positifs**. Alors, la loi de X_n converge vers l'unique loi de probabilité μ invariante par Q à une vitesse exponentielle. Plus précisément, il existe $A > 0$ et $\rho \in [0, 1[$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x, y \in \mathcal{X}$,

$$|Q^n(y, x) - \mu(x)| \leq A\rho^n.$$

Preuve.

1. On suppose dans un premier temps que tous les coefficients de la matrice de transition Q sont strictement positifs. Notons N le nombre d'états de la chaîne et $\delta = \min(Q(i, j), i, j \in \mathcal{X})$. On a $\delta > 0$ et $N\delta \leq 1$ puisque $1 = \sum_j Q(i, j) \geq N\delta$. Pour $j \in \mathcal{X}$, on considère les suites $m_{j,n} = \min_i Q^n(i, j)$ et $M_{j,n} = \max_i Q^n(i, j)$. On montre qu'elle ont les propriétés suivantes :

(i) $(m_{j,n})_n$ est une suite croissante et $(M_{j,n})_n$ est une suite décroissante.

(ii) $M_{j,n} - m_{j,n} \leq (1 - N\delta)(M_{j,n} - m_{j,n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc, pour tout $j \in \mathcal{X}$, $(M_{j,n})_n$ et $(m_{j,n})_n$ ont une limite commune que l'on note $\pi(j)$ et pour tout n , $m_{j,n} \leq \pi(j) \leq M_{j,n}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $i, j \in \mathcal{X}$, $|Q^n(i, j) - \pi(j)| \leq (1 - N\delta)^n$ (puisque $Q^n(i, j) - M_{j,n} \leq Q^n(i, j) - \pi(j) \leq Q^n(i, j) - m_{j,n}$). D'après la proposition 28, π définit une loi de probabilité invariante par Q et c'est la seule probabilité invariante par Q .

2. Cas général : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que tous les coefficients de Q^k soient strictement positifs.

On déduit de la première partie que $M_{j,nk} - m_{j,nk} \leq (1 - N\eta)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathcal{X}$, avec $\eta = \min(Q^k(i, j), i, j \in \mathcal{X})$. Comme $(M_{j,n} - m_{j,n})_n$ est une suite décroissante, $M_{j,n} - m_{j,n} \leq (1 - N\eta)^{[n/k]} \leq (1 - N\eta)^{n/k-1}$. On en déduit que les deux suites $(M_{j,n})_n$ et $(m_{j,n})_n$ ont la même limite et que pour tout $i, j \in \mathcal{X}$ et $n \in \mathbb{N}$, $|Q^n(i, j) - \pi(j)| \leq A\rho^n$ avec $\rho = (1 - N\delta)^{1/k}$ et $A = \rho^{-1}$.

Montrons les propriétés (i) et (ii) :

- $m_{j,n+1} = \min_i \sum_k Q(i, k)Q^n(k, j) \geq \min_i \sum_k Q(i, k)m_{j,n} = m_{j,n}$.
De même, $M_{j,n+1} \leq \max_i \sum_k Q(i, k)M_{j,n} = M_{j,n}$.
- Soit x et y deux états, posons $\Delta_n(x, y, z) = Q^n(x, z) - Q^n(y, z)$. On a

$$\Delta_{n+1}(x, y, z) = Q^{n+1}(x, z) - Q^{n+1}(y, z) = \sum_{i \in \mathcal{X}} (Q(x, i) - Q(y, i))Q^n(i, z).$$

Notons $I = \{i \in \mathcal{X}, Q(x, i) \geq Q(y, i)\}$. Alors,

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1}(x, y, z) &\leq \sum_{i \in I} (Q(x, i) - Q(y, i))M_{z,n} + \sum_{i \notin I} (Q(x, i) - Q(y, i))m_{z,n} \\ &= \sum_{i \in I} (Q(x, i) - Q(y, i))(M_{z,n} - m_{z,n}) \end{aligned}$$

car $\sum_{i \in I} (Q(x, i) - Q(y, i)) + \sum_{i \notin I} (Q(x, i) - Q(y, i)) = 0$.

Enfin, $\sum_{i \in I} (Q(x, i) - Q(y, i)) = 1 - \sum_{i \notin I} Q(x, i) - \sum_{i \in I} Q(y, i) \leq 1 - N\delta$, puisque $Q(k, l) \geq \delta$ pour tout $k, l \in \mathcal{X}$. On en déduit que $\Delta_n(x, y, z) \leq (1 - N\delta)(M_{z,n} - m_{z,n})$ pour tout $x, y, z \in \mathcal{X}$ et donc que $M_{z,n+1} - m_{z,n+1} \leq (1 - N\delta)(M_{z,n} - m_{z,n})$. □

► **Exemple 47.** Si $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov homogène sur $\{1, 2\}$ dont la matrice de transition est $Q = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ avec $0 < p+q < 2$, elle est récurrente positive. L'expression de de Q^n (voir l'exemple traité au paragraphe 9.3.2, page 41) montre que pour tout $x, y \in \{1, 2\}$, $|P(X_n = x | X_0 = y) - \mu(x)| \leq A\rho^n$ avec $\rho = |1 - (p - q)|$ et $A = \frac{1}{p+q} \max(p, q)$ et μ sa loi de probabilité invariante.

▷ **Exercice 73.** Décrire le comportement asymptotique de la chaîne de Markov donnée dans l'exercice 70, page 40. Lorsqu'il y a eu un grand nombre de répliquations, quelle est la probabilité d'observer sur une base donnée le même nucléotide que sur la séquence d'origine ?

▷ **Exercice 74.** Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition Q . Posons $Y_n = X_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que $(Y_n)_n$ est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition Q^2 .

Application : on considère la chaîne de Markov décrite dans le paragraphe 9.3.3, page 42. Déterminer la matrice de transition de la chaîne de Markov $Y_n = X_{2n}$ et montrer que la loi de Y_n converge vers $\mu = (8/15, 0, 2/5, 0, 1/15)$.

▷ **Exercice 75.** (suite de l'exercice 49, page 34)

1. Que vaut $P(X_n = k)$ pour $k > n$? Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, déterminer $P(X_n = k)$.

2. En déduire que la loi de X_n converge vers la loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $3/4$.
3. montrer que $|P(X_n = k) - 3/4(1/4)^k| \leq C/4^n$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ où C est une constante. Cela montre que la vitesse de convergence de la loi de X_n vers la loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $3/4$ est exponentielle.

▷ Exercice 76.

Considérons la dynamique suivante qui modélise l'évolution d'un écosystème méditerranéen⁷. A l'origine la forêt méditerranéenne, sur roche calcaire à faible altitude, était très certainement dominée par des chênes (chênes pubescents). Mais l'action de l'homme a éradiqué ces forêts primitives pour leur substituer des parcours pastoraux, des vergers ... Puis l'abandon de toute activité agricole, au lieu de conduire à la restauration naturelle de ces chênaies, a bien souvent favorisé l'implantation d'une autre espèce, le pin d'Alep, après un passage par un état de garrigue. Or ces forêts de substitution, hautement inflammables, subissent de manière récurrente le passage du feu (incendies volontaires ou non), le sol mis à nu se recouvre pendant un temps de pelouses; ces forêts sont donc condamnées à une perpétuelle reconstitution. Pour étudier l'évolution à long terme de l'écosystème, on propose de modéliser cette évolution par une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à cinq états $e_1, \dots, e_5$:

e_1 : chênaie, e_2 : zone de production agricole (vigne, vergers, ...), e_3 : pelouse, e_4 : garrigue, e_5 : pinède

Le temps est discrétisé en intervalles de temps de durée Δt (exprimée en années). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n désignera l'état de cet écosystème à l'instant $t_n = n\Delta t$. La matrice de transition de cette chaîne de Markov est la matrice Q définie par :

$$Q = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.1 & 0 & 0.25 & 0 & 0.65 \end{pmatrix}$$

1. Représenter le graphe associé à la matrice de transition de $(X_n)_n$.
2. On note τ le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $X_n \neq e_1$. Déterminer la loi de τ . Si à l'instant t_0 , l'écosystème est une chênaie, combien de temps en moyenne restera-t-il dans cet état d'après le modèle?
3. Suite à un incendie, l'écosystème est constitué d'une pelouse à l'instant t_n . Quelle est la probabilité qu'alors l'écosystème soit une pinède à l'instant t_{n+3} ?

4. Expliquer ce que retourne et trace la fonction `calcul` suivante :

```
calcul <- function(A,n){
  # n est un entier strictement plus grand que 1, A est une matrice carré
  R <- A; m <- numeric(n-1)
  for(i in 2:n){
    B <- R%*%A
    m[i-1] <- max(abs(B-R))
    R <- B
  }
  par(lty=2,pch='+')
  plot(x=1:(n-1), y=log(m), type='b', xlab='n', ylab='')
  return(list(mat=R,val=m))
}
```

5. Utiliser la fonction `calcul(A,n)` avec pour A la matrice de transition de $(X_k)_k$ et $n=50$. Qu'observe-t-on? Quelle information cela donne-t-il sur l'évolution en loi de la chaîne de Markov?
6. Les hypothèses du théorème sont-elles satisfaites par $(X_n)_n$?
7. Si on suppose que l'écosystème méditerranéen évolue suivant ce modèle, les proportions de terrains occupés par des chênes, des pinèdes et de la garrigue vont-elles se stabiliser au bout d'un certain nombre d'années? Si oui vers quelles valeurs? (la réponse doit être justifiée en détail)
8. Ecrire une fonction `recosyst(x0,n)` qui simule une réalisation de $X_1, \dots, X_n$ en supposant que $X_0=x_0$. Cette fonction devra retourner un vecteur x de taille $n+1$ de sorte que le coefficient i de x soit la réalisation obtenue de X_{i-1} pour tout $1 \leq i \leq n$.

Utiliser la fonction suivante pour simuler et tracer une réalisation de $X_0, X_1, \dots, X_n$ avec $n = 50$ et $X_0 = 1$:

```
dessinraj <- function(x0,n){
  X <- recosyst(x0,n)
  par(lty=2,pch='+')
  plot(x=0:n, y=X, type='b', xlab='n', ylab='Xn')
}
```

Si on interprète la courbe comme décrivant l'évolution sur $50\Delta t$ années de l'état d'une parcelle recouverte de chênes dans une zone méditerranéenne, combien de temps cette parcelle restera-t-elle une chênaie? Combien de fois la parcelle sera-t-elle recouverte d'une pinède et ensuite se retrouvera au stade pelouse?

9. On considère la fonction `trace` suivante. Expliquer ce que contient le coefficient (i, j) de la matrice R à la fin de l'exécution de la fonction

⁷Cet exercice est inspiré d'un exemple tiré du livre *Modélisation et simulation d'écosystèmes*, P. Coquillard et D. Hill, Masson 1997.

```

trace <- function(x0,n){
  R <- matrix(data=0, ncol=5, nrow=n+1)
  X <- recosyst(x0,n)
  for (j in 1:5){
    for(i in 1:(n+1)){
      R[i,j] <- mean(X[1:i]==j)
    }
  }
  matplot(x=0:n, y=R,type='s',xlab='n',ylab=' ')
  return(R[n+1,])
}

```

Exécuter la commande `trace1(x0=1,n=5000)`. Recommencer en changeant la valeur de `x0`. Qu'observe-t-on ? Commenter les figures et les valeurs affichées.

10 Temps d'atteinte d'un état

Dans toute la section, $(X_n)_n$ désignera une chaîne de Markov homogène d'espace d'états $\mathcal{X}$ fini ou dénombrable de matrice de transition Q : on pourra interpréter X_n comme modélisant l'état d'un système à l'instant n .

La loi initiale de la chaîne (X_n) ayant été fixée, seuls interviennent dans l'étude de l'évolution de la chaîne les états susceptibles d'être atteints. On pose

$$\mathcal{X}_a = \{x \in \mathcal{X}, \text{ il existe } n \geq 0, P(X_n = x) > 0\}.$$

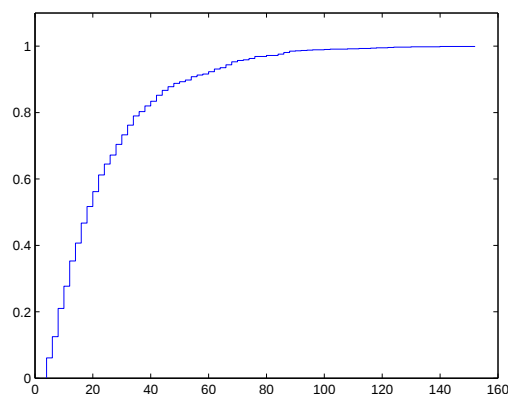
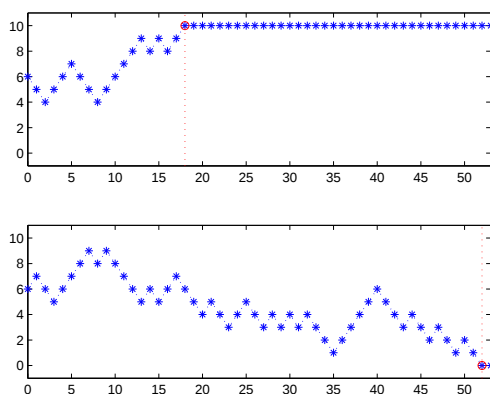
Pour un état $e \in \mathcal{X}_a$, on notera $T_e^{(n)}$ le temps qu'il faut à la chaîne pour atteindre l'état e strictement après l'instant n :

- $T_e^{(n)}$ désigne donc le plus petit entier $k > 0$ tel que $X_{n+k} = e$ si la chaîne passe par e après l'instant n
- $T_e^{(n)} = +\infty$ si la chaîne ne passe pas par l'état e après l'instant n .

Pour simplifier les notations $T_e^{(0)}$ sera aussi noté simplement T_e .

► *Exemple 48. (suite de l'exemple 36)*

Dans le cas de la chaîne de Markov décrivant l'évolution de la fortune du joueur, $\{T_0 < +\infty\}$ désigne l'événement "le joueur se ruine". Dans le cas où le jeu s'arrête à cause de la ruine du joueur, T_0 représente le nombre de parties qu'il a jouées. De façon générale, $\min(T_0, T_m)$ est le nombre de parties d'un jeu qui se termine si le joueur n'a plus d'argent ou si il a atteint la somme m .



Les deux figures à gauche montrent l'évolution de la fortune de deux joueurs qui jouent indépendamment l'un et l'autre à un même jeu équitable ; ils commencent tous les deux avec 6 euros et cherchent à atteindre la somme de 10 euros.

Le premier joueur atteint effectivement la somme de 10 euros après avoir joué 18 fois : la valeur de T_{10} est 18 et la valeur de T_0 est $+\infty$.

Le second joueur n'atteint pas la somme de 10 euros et perd son dernier euro à la 52-ème partie : la valeur de T_{10} est $+\infty$ et celle de T_0 est 52.

Pour étudier la loi du nombre de parties $T = \min(T_0, T_m)$, on a fait 1000 simulations de l'évolution de la fortune au cours d'un tel jeu. Sur les 1000 jeux simulés, 428 jeux ont abouti à la ruine du joueur, le nombre moyenne de parties pour un jeu a été de 24,8 parties. Le jeu qui a duré le plus longtemps a compté 152 parties. La figure de droite montre la fonction de répartition empirique des 1000 réalisations obtenues de T .

► Exemple 49. (suite de l'exemple 38)

Dans le cas de la chaîne de Markov décrivant l'évolution des génotypes de plantes obtenues par autofécondations successives à partir d'une plante hétérozygote, $\{T_{AA} < +\infty\}$ est l'événement "on a obtenu après un nombre fini d'autofécondations une plante de génotype AA". Si cet événement est réalisé, T_{AA} représente le numéro de la première génération où on obtient une plante de génotype AA.

10.1 Probabilité d'atteinte d'un état

Proposition 30 Soit $i, e \in \mathcal{X}_a$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité d'atteindre l'état e à l'instant $n + k$ pour la première fois après l'instant n sachant que $X_n = i$ ne dépend pas de n , on la notera $f_{i,e}(k) = P(T_e^{(n)} = k | X_n = i)$. Elle vérifie l'équation suivante :

$$f_{i,e}(1) = Q(i, e) \text{ et } f_{i,e}(k) = \sum_{j \in \mathcal{X} \setminus \{e\}} Q(i, j) f_{j,e}(k-1) \text{ pour tout } k \geq 2. \quad (4)$$

- La probabilité d'atteindre l'état e après l'instant n , sachant que $X_n = i$ ne dépend pas de n , on la notera $f_{i,e} : f_{i,e} = P(T_e^{(n)} < +\infty | X_n = i)$. Elle vérifie :

$$f_{i,e} = Q(i, e) + \sum_{j \in \mathcal{X} \setminus \{e\}} Q(i, j) f_{j,e}. \quad (5)$$

N.B.

- L'équation pour $f_{i,e}(k)$ traduit simplement le fait que pour arriver pour la première fois dans l'état e en k pas, en partant de l'état i , il faut aller de l'état i à un état $j \neq e$, puis partant de j , arriver pour la première fois en e en $k-1$ pas.
- De même, l'équation pour $f_{i,e}$ traduit le fait que la chaîne atteint e à partir d'un état i soit directement, soit passe de l'état i à un état $j \neq e$ puis atteint e à partir de l'état j .
- $f_{i,e} = 1$ si et seulement si $f_{j,e} = 1$ pour tout état $j \neq e$ tel que $Q(i, j) > 0$.

► Exemple 50. (suite de l'exemple 36)

Supposons que le joueur dispose de 1 euro et joue à un jeu de hasard où la mise est de 1 euro jusqu'à ce qu'il ait atteint la somme de 3 euros ou jusqu'à ce qu'il soit ruiné. Rappelons que p désigne la probabilité qu'il gagne une partie et donc gagne 1 euro et $1-p$ est la probabilité qu'il perde la partie et donc perde 1 euro. On cherche la probabilité qu'il réussisse ainsi à avoir 3 euros, c'est-à-dire $f_{1,3}$ avec les notations de la proposition 30. L'équation (4) avec $i = 1$ et $e = 3$ s'écrit $f_{1,3} = pf_{2,3} + (1-p)f_{0,3}$. Déjà $f_{0,3} = 0$ puisque le joueur ne peut pas jouer s'il n'a pas d'argent initialement. Il reste à écrire l'équation (4) pour $f_{2,3}$ qui est la probabilité qu'un joueur arrive à obtenir 3 euros s'il a au départ 2 euros. On obtient : $f_{2,3} = 1-p + (1-p)f_{1,3}$. On a donc à résoudre un système

$$\text{de 2 équations à 2 inconnues : } \begin{cases} f_{1,3} = pf_{2,3} \\ f_{2,3} = p + (1-p)f_{1,3} \end{cases}.$$

Ce système a une seule solution qui est $f_{2,3} = \frac{p}{1-p(1-p)}$ et $f_{1,3} = \frac{p^2}{1-p(1-p)}$.

En particulier, si le jeu est équitable c'est-à-dire si $p = 1/2$, on a $f_{1,3} = 1/3$ ce qui signifie que si le joueur a initialement 1 euro, il a une chance sur trois d'arriver à obtenir 3 euros. La probabilité que le jeu s'arrête car le joueur est ruiné se calcule de façon analogue en écrivant les équations satisfaites par $f_{1,0}$, $f_{2,0}$ et $f_{3,0}$ et en résolvant le système obtenu. Ce calcul permet de voir que $f_{1,0} + f_{1,3} = 1$, ce qui signifie que le joueur s'arrête forcément au bout d'un nombre fini de parties soit parce qu'il a réussi à obtenir 3 euros, soit parce qu'il est ruiné.

Preuve de la proposition 30.

- On a $\{T_e^{(n)} = 1\} = \{X_{n+1} = e\}$ et pour $k \geq 2$, $\{T_e^{(n)} = k\} = \{X_{n+k} = e, X_{n+k-1} \neq e, \dots, X_{n+1} \neq e\}$. En décomposant cet événement en fonction de la valeur de X_n , et en utilisant que $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov homogène, on obtient :

$$\begin{aligned} P(T_e^{(n)} = k | X_n = i) &= \sum_{j \in \mathcal{X} \setminus \{e\}} P(X_{n+k} = e, X_{n+k-1} \neq e, \dots, X_{n+2} \neq e, X_{n+1} = j | X_n = i) \\ &= \sum_{j \in \mathcal{X} \setminus \{e\}} P(X_{n+k} = e, X_{n+k-1} \neq e, \dots, X_{n+2} \neq e | X_{n+1} = j, X_n = i) P(X_{n+1} = j | X_n = i) \\ &= \sum_{j \in \mathcal{X} \setminus \{e\}} P(X_{n+k-1} = e, X_{n+k-2} \neq e, \dots, X_{n+1} \neq e | X_n = j) Q(i, j) \\ &= \sum_{j \in \mathcal{X} \setminus \{e\}} Q(i, j) P(T_e^{(n)} = k-1 | X_n = j) \end{aligned}$$

Cette égalité et le fait que $P(T_e^{(n)} = 1 | X_n = i) = Q(i, e)$ permet de montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(T_e^{(n)} = k | X_n = i)$ ne dépend pas de n .

- Comme $P(T_e^{(n)} < +\infty | X_n = i) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(T_e^{(n)} = k | X_n = i)$, la probabilité d'atteindre e après l'instant n sachant que $X_n = i$ ne dépend pas non plus de n . En utilisant l'expression récursive pour $f_{i,j}(k)$, on a :

$$f_{i,e} = Q(i, e) + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{j \in \mathcal{X} \setminus \{e\}} Q(i, j) f_{j,e}(k-1).$$

Comme tous les termes de la double somme sont positifs, on peut intervertir les deux sommes, ce qui donne l'équation (5). □

10.2 Temps moyen d'atteinte d'un état

Il est intéressant d'avoir des renseignements sur le temps moyen que met la chaîne de Markov pour atteindre un état accessible e à partir d'un état i , c'est-à-dire sur $E(T_e^{(n)} | X_n = i)$. Remarquons déjà que si il y a une probabilité strictement positive à partir de i de ne jamais atteindre l'état e alors $E(T_e^{(n)} | X_n = i) = +\infty$. Dans le cas contraire, on pourra déterminer le temps moyen que met la chaîne de Markov pour atteindre un état accessible e à partir d'un état i en résolvant un système d'équation linéaires comme l'indique le résultat suivant :

Corollaire 31 Soit $i, e \in \mathcal{X}_a$. $E(T_e^{(n)} | X_n = i)$ ne dépend pas de n , on le notera $m_{i,e}$. On a

$$m_{i,e} = 1 + \sum_{j \in \mathcal{X} \setminus \{e\}} Q(i, j) m_{j,e} \quad (6)$$

(les deux termes de l'égalité pouvant être infinis)

Preuve. Supposons d'abord que $f_{i,e} = 1$. Comme la loi conditionnelle de $T_e^{(n)}$ sachant que $X_n = i$ ne dépend pas de n , il en est de même de $E(T_e^{(n)} | X_n = i)$ que l'on notera $m_{i,e}$. Comme $m_{i,e} = \sum_{k=1}^{+\infty} k f_{i,e}^{(k)}$, on obtient grâce à l'expression récursive de $f_{i,e}(k)$:

$$\begin{aligned} m_{i,e} &= Q(i, e) + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{j \in \mathcal{X} \setminus \{e\}} Q(i, j) k f_{j,e}(k-1) \\ &= Q(i, e) + \sum_{j \in \mathcal{X} \setminus \{e\}} Q(i, j) \sum_{k=2}^{+\infty} f_{j,e}(k-1) + \sum_{j \in \mathcal{X} \setminus \{e\}} Q(i, j) \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1) f_{j,e}(k-1) \\ &= Q(i, e) + \sum_{j \in \mathcal{X} \setminus \{e\}} Q(i, j) \sum_{\ell=1}^{+\infty} f_{j,e}(\ell) + \sum_{j \in \mathcal{X} \setminus \{e\}} Q(i, j) \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell f_{j,e}(\ell) \\ &= Q(i, e) + \sum_{j \in \mathcal{X} \setminus \{e\}} Q(i, j) f_{j,e} + \sum_{j \in \mathcal{X} \setminus \{e\}} Q(i, j) m_{j,e} \end{aligned}$$

Il suffit alors d'utiliser l'équation (5) pour établir l'égalité annoncée : $m_{i,e} = 1 + \sum_{j \in \mathcal{X} \setminus \{e\}} Q(i, j) m_{j,e}$.

Il reste à traiter le cas où $f_{i,e} < 1$. Dans ce cas $m_{i,e} = +\infty$ et il existe un état $j \neq e$ tel que $Q(i, j) > 0$ et $f_{j,e} < 1$. Pour cet état j , on a $Q(i, j) m_{j,e} = +\infty$. Donc, l'égalité est encore vraie si $f_{i,e} < 1$. □

► **Exemple 51.** Considérons une chaîne de Markov homogène $(X_n)_n$ à deux états $\mathcal{X} = \{1, 2\}$ dont la matrice de transition est $Q = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ avec $0 < p, q < 1$.

On a $f_{1,1} = f_{1,2} = f_{2,1} = f_{2,2} = 1$, $m_{2,1} = \frac{1}{q}$, $m_{1,1} = 1 + \frac{p}{q}$, $m_{1,2} = \frac{1}{p}$ et $m_{2,2} = 1 + \frac{q}{p}$.

10.3 Temps d'atteinte d'un sous-ensemble d'états

L'étude faite pour $T_e^{(n)}$ peut s'étendre au temps $T_A^{(n)}$ que met la chaîne de Markov à atteindre un sous-ensemble A d'états strictement après l'instant n :

$$T_A^{(n)} = \inf(\{k > 0, X_{k+n} \in A\}) = \min(T_e^{(n)}, e \in A).$$

Proposition 32 Soit i un état accessible.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité d'atteindre le sous-ensemble A à l'instant $n + k$ pour la première fois après l'instant n sachant que $X_n = i$ ne dépend pas de n , on la notera $f_{i,A}(k) = P(T_A^{(n)} = k | X_n = i)$. Elle vérifie l'équation suivante :

$$f_{i,A}(1) = \sum_{a \in A} Q(i, a) \text{ et } f_{i,A}(k) = \sum_{j \in \mathcal{X} \setminus A} Q(i, j) f_{j,A}(k-1) \text{ pour tout } k \geq 2. \quad (7)$$

2. La probabilité d'atteindre le sous-ensemble A après l'instant n , sachant que $X_n = i$ ne dépend pas de n , on la notera $f_{i,A} : f_{i,A} = P(T_A^{(n)} < +\infty | X_n = i)$. Elle vérifie :

$$f_{i,A} = \sum_{a \in A} Q(i, a) + \sum_{j \in \mathcal{X} \setminus A} Q(i, j) f_{j,A}. \quad (8)$$

3. $E(T_A^{(n)} | X_n = i)$ ne dépend pas de n , on le notera $m_{i,A}$. On a

$$m_{i,A} = 1 + \sum_{j \in \mathcal{X} \setminus A} Q(i, j) m_{j,A} \quad (9)$$

(les deux termes de l'égalité pouvant être infinis)

- **Exemple 52.** (suite de l'exemple 50) Déterminons la durée moyenne du jeu (exprimée en parties) pour un joueur possédant 1 euro initialement et voulant obtenir 3 euros. Cela revient à chercher $m_{1,A} = E(T_A | X_0 = 1)$ avec $A = \{0, 3\}$. On écrit les équations (9) pour $m_{1,A}$ et $m_{2,A}$:
$$\begin{cases} m_{1,A} = 1 + pm_{2,A} \\ m_{2,A} = 1 + (1-p)m_{1,A} \end{cases} \quad \text{En résolvant ce système,}$$
 on obtient que $m_{1,A} = \frac{1+p}{1-p(1-p)}$ et $m_{2,A} = \frac{2-p}{1-p(1-p)}$. En particulier, lorsque le jeu est équitable, l'espérance du nombre de parties est égale à 2, que le joueur ait initialement 1 ou 2 euros.

10.4 Les chaînes absorbantes

Définition. On dit qu'un état e est *absorbant* si $Q(e, e) = 1$ (si la chaîne entre dans cet état, elle y reste avec probabilité 1).

- **Exemple 53.** (suite de l'exemple 38). Pour la chaîne de Markov décrivant les génotypes des plantes obtenues par autofécondations successives, les états correspondants aux génotypes AA et aa sont des états absorbants.

Nous allons décrire quelques propriétés simples des chaînes de Markov ayant des états absorbants. Mais avant cela, introduisons une définition :

Définition. On dit qu'un état i conduit à un état j (ou encore que j est accessible à partir de i) s'il existe un chemin dans le graphe associé à la matrice de transition qui permet de passer de i à j . Autrement dit, i conduit à j s'il existe un entier n tel que $(Q^n)(i, j) > 0$.

Proposition 33 Considérons une chaîne de Markov homogène $(X_n)_n$ d'espace d'états $\mathcal{X}$ qui a au moins un état absorbant. Notons A l'ensemble des états absorbants de la chaîne.

- (i) Si e est un état qui conduit à un état absorbant, alors la chaîne de Markov ne passera qu'un nombre fini de fois dans l'état e et donc $Q^n(i, e)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ quel que soit l'état i ,
- (ii) Si le nombre d'états est fini et si tous les états conduisent à un état absorbant, alors
 - $P(X_n \in A) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$;
 - avec probabilité 1, la chaîne atteint un état absorbant en temps fini (i.e. $P(T_A < +\infty) = 1$) ;
 - il existe des constantes $b > 0$ et $0 < c < 1$ tel que pour tout n et pour tout états $i, j \notin A$, $(Q^n)(i, j) \leq bc^n$.

N.B. $P(T_A < +\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(T_A \leq n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n \in A)$.

- **Exemple 54.** (suite de l'exemple 36) Quelle que soit la fortune m que le joueur cherche à atteindre, la proposition 33 dit que le jeu s'arrêtera après un nombre fini de parties (en effet, (ii) s'applique puisque tous les états $0 < i < m$ conduisent aux deux absorbants 0 et m).
- **Exemple 55.** (suite de l'exemple 38). La proposition 33 dit seulement que la probabilité d'avoir une plante hétérozygote à la n -ième génération tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.