Séries formelles

... de toute façon ça converge

Juliette PONSONNET

version du 12 Nivôse, an 188

Outline

I.i Les séries ça explose

Une *série* est la donnée d'une suite $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

I.i Les séries ça explose

Une *série* est la donnée d'une suite $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et d'une prière.

$$\sum_{k=0}^{n} |a_n| < +\infty$$

I.i Les séries ça explose

Une *série* est la donnée d'une suite $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et d'une prière.

$$\sum_{k=0}^{n} |a_n| < +\infty$$

- Convergence non-assurée
- Semi-convergence vs congergence absolue
- Composition pas toujours possible
- …

I.ii Nos amis de confiance

On fixe $\mathbb{A}$ un anneau pour la suite. $\mathbb{A}[X]$ est stable par :

- Somme
- Produit

I.ii Nos amis de confiance

On fixe $\mathbb{A}$ un anneau pour la suite. $\mathbb{A}[X]$ est stable par :

- Somme
- Produit
- Composition
- Dérivation
- Primitivation (parfois)
- Mélange
- …

Les polynômes offrent un cadre pour étudier les suites à support fini dans un anneau quelconque !

I.iii À la limite…

Une série entière c’est juste un polynôme infini !

I.iii À la limite...

Une série entière c'est juste un polynôme infini !

On peut prendre la *limite projective* des polynômes quand le degré tend vers $+\infty$.

$$\mathbb{A}[[X]] := \lim_{\leftarrow n} \mathbb{A}_n[X]$$

I.iii À la limite...

Une série entière c'est juste un polynôme infini !

On peut prendre la *limite projective* des polynômes quand le degré tend vers $+\infty$.

$$\mathbb{A}[[X]] := \lim_{\leftarrow n} \mathbb{A}_n[X]$$

Par conservation des lois par la limite projective*, $\mathbb{A}[[X]]$ admet une structure d'anneau compatible avec celles de $\mathbb{A}[X]$.

On conserve de surcroît toutes les propriétés sympa des polynômes*.

I.iii À la limite...

Une série entière c'est juste un polynôme infini !

On peut prendre la *limite projective* des polynômes quand le degré tend vers $+\infty$.

$$\mathbb{A}[[X]] := \lim_{\leftarrow n} \mathbb{A}_n[X]$$

Par conservation des lois par la limite projective*, $\mathbb{A}[[X]]$ admet une structure d'anneau compatible avec celles de $\mathbb{A}[X]$.

On conserve de surcroît toutes les propriétés sympa des polynômes*.

En bonus, on peut munir $\mathbb{A}[[X]]$ d'une structure d'espace *ultramétrique*.

Critère (*Cauchy formel*) : Si $(\alpha_n) \in \mathbb{A}[[X]]^{\mathbb{N}}$ est une suite de séries formelles,

$$\alpha_n \text{ converge} \iff \alpha_{n+1} - \alpha_n \longrightarrow 0$$

* Les $\mathbb{A}_n[X]$ forment un système projectif de la catégorie des anneaux (voire plus), leur limite est donc aussi un anneau (voire plus).

Outline

II.i Dénombrons !

Définition (*Espèce combinatoire*) :

- un ensemble $\mathcal{C}$
- une fonction de poids $\rho : \mathcal{C} \to \mathbb{N}$
- une suite donnée par $c_n := \#\rho^{-1}(n)$
- une série formelle $C := \sum_{n=1}^{\infty} c_n X^n$

Une espèce combinatoire compte combien il existe d'objets de chaque poids.

Exemples :

- $\mathcal{C}$ les arbres binaires, ρ le nombre de noeuds
- $\mathcal{C}$ une population de lapins, ρ l'année de naissance

II.i Dénombrons !

Définition (*Espèce combinatoire*) :
- un ensemble $\mathcal{C}$
- une fonction de poids $\rho : \mathcal{C} \to \mathbb{N}$
- une suite donnée par $c_n := \#\rho^{-1}(n)$
- une série formelle $C := \sum_{n=1}^{\infty} c_n X^n$

Une espèce combinatoire compte combien il existe d'objets de chaque poids.

Exemples :
- $\mathcal{C}$ les arbres binaires, ρ le nombre de noeuds
- $\mathcal{C}$ une population de lapins, ρ l'année de naissance

Correspondance : Une espèce combinatoire (modulo isomorphisme) est entièrement déterminée par $\#\rho^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

La construction plus naturelle (et équivalente) serait de considérer qu'une espèce combinatoire est un endofoncteur de la catégorie des ensembles finis restreinte aux bijections.

II.ii Jouer aux LEGO™

Blocs de base : $\mathcal{E} := \emptyset \quad \mathcal{Z} := \{\star\} \quad \mathcal{N} := \mathbb{N}^\star$

Somme : $A + B \leftrightarrow \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$

Produit : $A \times B \leftrightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{B}$

On a bien un anneau avec $\mathcal{E}, \mathcal{Z}$ les neutres.

Composition :

$$A \circ B \leftrightarrow \bigcup \{ \{a\} \times \mathcal{B}^{\rho(a)} : a \in \mathcal{A} \}$$

II.ii Jouer aux LEGO™

Blocs de base : $\mathcal{E} := \emptyset \quad \mathcal{Z} := \{\star\} \quad \mathcal{N} := \mathbb{N}^\star$

Somme : $A + B \leftrightarrow \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$

Produit : $A \times B \leftrightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{B}$

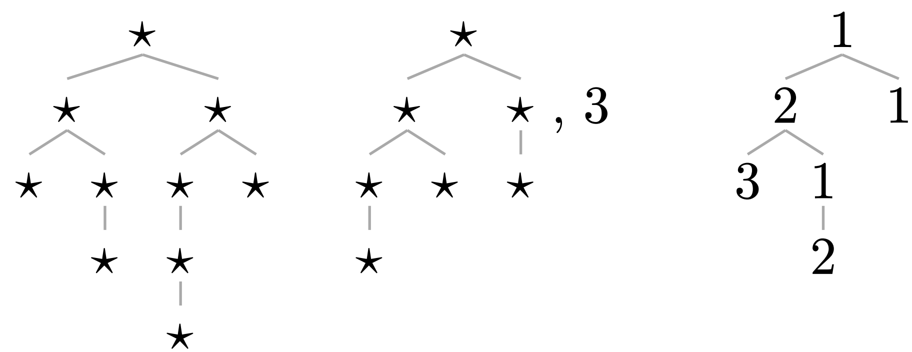
On a bien un anneau avec $\mathcal{E}, \mathcal{Z}$ les neutres.

Composition :

$$A \circ B \leftrightarrow \bigcup \{\{a\} \times \mathcal{B}^{\rho(a)} : a \in \mathcal{A}\}$$

En posant $\mathcal{A}$ les arbres binaires,

$\mathcal{A}$ $\qquad$ $\mathcal{A} \times \mathcal{N}$ $\qquad$ $\mathcal{A} \circ \mathcal{N}$



Quelques éléments de poids 10...

II.iii Nombres de Catalan

On note $\mathcal{A}$ la classe combinatoire des arbres binaires.

$$\mathcal{A} = \mathcal{E} + \mathcal{Z} + \mathcal{Z}\mathcal{A}^2$$

$$XA^2 - A + 1 = 0$$

$$A = \frac{1 \pm \sqrt{1-4X}}{2}$$

or $A(0) = 1$ donc

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 - \sqrt{1-4X}}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4X)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} X^n \end{aligned}$$

Outline

III.i Exponentielle

$\boxed{\textbf{Théorème} : \text{Si } 1 + \int \alpha = \alpha, \text{ alors } \alpha = \exp.}$

III.i Exponentielle

$\boxed{\textbf{Théorème} : \text{Si } 1 + \int \alpha = \alpha, \text{ alors } \alpha = \exp.}$

On travaille dans l'anneau $\mathcal{L}(\mathbb{C}[[X]])$.

Attention : X est l'identité "multiplicative" !

Observation : la norme opérateur de $\int$ est < 1.

III.i Exponentielle

$\boxed{\textbf{Théorème} : \text{Si } 1 + \int \alpha = \alpha, \text{ alors } \alpha = \exp.}$

On travaille dans l'anneau $\mathcal{L}(\mathbb{C}[[X]])$.

Attention : X est l'identité "multiplicative" !

Observation : la norme opérateur de $\int$ est < 1.

⟦

$$
\begin{aligned}
\left(X - \int\right)\alpha &= \bar{1} \\
\alpha &= \frac{X}{X - \int}\bar{1} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int^{k} X\right)\bar{1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int^{k} \bar{1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} \\
\alpha &= \exp
\end{aligned}
$$

⟧

III.ii Théorème de Faulhaber

Théorème (*Faulhaber*) :

$$\forall d \in \mathbb{N}, \exists \alpha \in \mathbb{Q}_{d+1}[X], \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} k^d = \alpha(n)$$

⟦ □ Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $A := \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} k^d X^n$. Il suffit d'exprimer a_d comme $\alpha_d(n)$.

$$\begin{aligned} A &= \sum_{d=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k^d \right) X^d \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} d! \sum_{d=0}^{\infty} \frac{(kX)^d}{d!} \\ &= d! \sum_{k=1} e^{kX} = d! \frac{\left(e^X\right)^n - 1}{e^X - 1} \\ &= d! \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{k+1}}{k+1!} X^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{b_\ell}{\ell!} X^\ell \right) \\ &= \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{d} \left(\frac{1}{k+1} \binom{d}{k} b_{d-k} n^{k+1} \right) X^d \end{aligned}$$

□

On pose donc $\alpha_d := \sum_{k=0}^{d} \frac{1}{k+1} \binom{d}{k} b_{d-k} (X+1)^{k+1}$. ⟧

III.iii Lemme d'Arden

Lemme (*Arden*) : Soient $A, B \subseteq \Sigma^\star$, $\varepsilon \notin A$.

$$X = AX + B$$

admet une unique solution $X = A^\star B$.

III.iii Lemme d'Arden

Lemme (*Arden*) : Soient $A, B \subseteq \Sigma^\star$, $\varepsilon \notin A$.

$$X = AX + B$$

admet une unique solution $X = A^\star B$.

⟦ Analyse : On travaille dans $\mathbb{F}_2[[\Sigma]]$.

$$X = AX + B \text{ donc } (\varepsilon - A)X = B$$

et enfin

$$X = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - A}B = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right)B = A^\star B$$

L'inversion un peu cavalière est justifiée en considérant $\Sigma^\star \subseteq \mathbb{F}_2[[\Sigma]]$.

Synthèse :

$$A^\star B = AA^\star B + B = (AA^\star + \varepsilon)B = A^\star B$$

⟧

Outline

IV.i Analyse à la rescousse ?

Théorème (*Espèce implicite*): Si H est une espèce à deux paramètres telle que $H(0,0) = 0$ et $\partial_2 H(0,0) = 0$, alors l'équation d'inconnue A

$$\forall X, A(X) = H(X, A(X))$$

admet une unique solution telle que $A(0) = 0$.

IV.i Analyse à la rescousse ?

Théorème (*Espèce implicite*): Si H est une espèce à deux paramètres telle que $H(0,0) = 0$ et $\partial_2 H(0,0) = 0$, alors l'équation d'inconnue A

$$\forall X, A(X) = H(X, A(X))$$

admet une unique solution telle que $A(0) = 0$.

Exemples:

- Listes non-vides

  $$H(X,Y) := X + X \cdot Y$$

```
type 'x y = One of 'x | Cons of 'x * y
```

$$L_+(X) = X(1 + L_+(X)) = XL(X) = L(X) - 1$$

- Arbres binaires non-vides

  $$H(X,Y) := X(1+Y)^2$$

```
type 'x y = I of 'x
          | II of 'x * y option * y option
```

IV.i Analyse à la rescousse ?

Les espèces définies par point fixe ont des propriétés calculatoires intéressantes.

$$A'(X) = \partial_1 H(X, A(X)) + A'(X)\partial_2 H(X, A(X))$$

$$A' = \partial_1 H(X, A) + A'\partial_2 H(X, A)$$

$$A' = \frac{\partial_1 H(X, A)}{1 - \partial_2 H(X, A)}$$

$$A' = \partial_1 H(X, A) \cdot L \circ \partial_2 H(X, A)$$

IV.i Analyse à la rescousse ?

Les espèces définies par point fixe ont des propriétés calculatoires intéressantes.

$$\begin{aligned}
A'(X) &= \partial_1 H(X, A(X)) + A'(X)\partial_2 H(X, A(X)) \\
A' &= \partial_1 H(X, A) + A'\partial_2 H(X, A) \\
A' &= \frac{\partial_1 H(X, A)}{1 - \partial_2 H(X, A)} \\
A' &= \partial_1 H(X, A) \cdot L \circ \partial_2 H(X, A)
\end{aligned}$$

Exemple :

$$L'_+ = 1 + L_+ X \cdot L'_+ = L + X \cdot L'_+$$

On obtient une nouvelle équation implicite avec $H(X, Y) := L + XY$ de solution $L \cdot L_+$.

Qu'est-ce que ça peut représenter ?

IV.i Analyse à la rescousse ?

Les espèces définies par point fixe ont des propriétés calculatoires intéressantes.

$$
\begin{aligned}
A'(X) &= \partial_1 H(X, A(X)) + A'(X)\partial_2 H(X, A(X)) \\
A' &= \partial_1 H(X, A) + A' \partial_2 H(X, A) \\
A' &= \frac{\partial_1 H(X, A)}{1 - \partial_2 H(X, A)} \\
A' &= \partial_1 H(X, A) \cdot L \circ \partial_2 H(X, A)
\end{aligned}
$$

Exemple :

$$L'_+ = 1 + L_+ X \cdot L'_+ = L + X \cdot L'_+$$

On obtient une nouvelle équation implicite avec $H(X, Y) := L + XY$ de solution $L \cdot L_+$.

Qu'est-ce que ça peut représenter ?

C'est l'état d'une traversée d'un élément de L_+ !

L_+ éléments vus	L reste à voir

IV.ii Espèces négatives

À force de passer des choses sous le tapis on voit la bosse…

Construction de Grothendieck : Si $\mathbb{E}$ admet une somme non-inversible, on pose sur $\mathbb{E}^2$ la relation d'équivalence $\sim$:

$$(a, b) \sim (c, d) \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \exists k, a + d + k = c + b + k$$

Alors la somme est inversible sur $\mathbb{E}^2 / \sim$

Lemme fondamental : $\overline{(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \longleftrightarrow A - B.$

Exemple :

- $\Phi := \mathcal{C} - \mathcal{A}$ les cycles “moins” les arbres
  - $\Phi^+ = \mathcal{C} - X$ les cycles non-singletons
  - $\Phi^- = \mathcal{A} - X$ les arbres non-singletons

On passe d'un ensemble sans sens à une décomposition en deux ensembles interprétables.

Quitte à choisir les bons irréductibles, la décomposition dite *moléculaire* en partie positive et négative est unique !

IV.iii Voyage dans le temps

Il convient* souvent d'interpréter les objets avec leurs constructeurs / destructeurs.

Produits : `p := a * b`

- Constructeur `(,) : a -> b -> p`
- Destructeur(s) `fst : p -> a`, `snd : p -> b`

Sommes : `s := A of a | B of b`

- Constructeur(s) `A : a -> s`, `B : b -> s`
- Destructeur `match ... with ...`

Opposés : `d := -a` ?

IV.iii Voyage dans le temps

Il convient* souvent d'interpréter les objets avec leurs constructeurs / destructeurs.

Produits : `p := a * b`

- Constructeur `(,) : a -> b -> p`
- Destructeur(s) `fst : p -> a`, `snd : p -> b`

Sommes : `s := A of a | B of b`

- Constructeur(s) `A : a -> s`, `B : b -> s`
- Destructeur `match ... with ...`

Opposés : `d := -a` ?

- Constructeur : Arriver à une absurdité (0)
- Destructeur : Revenir avant la création de `a`

On peut interpréter les types négatifs comme ddu *backtracking* (retour sur trace).

IV.iii Voyage dans le temps

Il convient* souvent d'interpréter les objets avec leurs constructeurs / destructeurs.

Produits : `p := a * b`

- Constructeur `(,) : a -> b -> p`
- Destructeur(s) `fst : p -> a`, `snd : p -> b`

Sommes : `s := A of a | B of b`

- Constructeur(s) `A : a -> s`, `B : b -> s`
- Destructeur `match ... with ...`

Opposés : `d := -a` ?

- Constructeur : Arriver à une absurdité (0)
- Destructeur : Revenir avant la création de `a`

On peut interpréter les types négatifs comme ddu *backtracking* (retour sur trace).

$$\begin{array}{lcr}
\downarrow a & & \uparrow 0 \downarrow \\
\downarrow a + (-a) \uparrow & + & a \downarrow \\
\downarrow 0 \uparrow & & a \downarrow
\end{array}$$

* Merci Curry, Howard et Lambek.