Chapitre 6
Constructions à la règle et au compas

Introduction

Ce chapitre, qui trouve ses racines dans la mathématique grecque, poursuit un double objectif. Il s'agit, d'une part, de revoir l'ensemble des constructions à la règle et au compas usuelles qui permettront notamment de construire le pentagone régulier (l'un des sommets des *Éléments* d'Euclide) et, d'autre part, d'aborder les problèmes de constructions laissés en suspens par les Grecs et de montrer, en particulier, l'impossibilité de la duplication du cube.

A. LES CONSTRUCTIONS À LA RÈGLE ET AU COMPAS CHEZ LES GRECS

Les constructions à la règle et au compas occupent une place considérable dans les *Éléments* d'Euclide. On peut sans doute relier cette importance à des raisons philosophiques : cercle et droite sont les figures « idéales » au sens de Platon (dont Euclide est un disciple) et seules les figures construites à partir de ces objets ont droit de cité chez les Grecs. Ils ont accumulé, sur ce sujet, une expérience considérable et savent résoudre nombre de problèmes difficiles (on a déjà évoqué la construction du pentagone régulier, on peut citer aussi la construction des cercles tangents à trois cercles donnée par Apollonius). En fait, presque tous les problèmes de construction que l'on sait résoudre aujourd'hui étaient déjà connus des Grecs et, en tous cas, toutes les constructions que nous réaliserons dans ce livre sont déjà, en substance, dans Euclide.

B. LES QUATRE PROBLÈMES NON RÉSOLUS

Les Grecs, malgré leur habileté, ont laissé quatre problèmes de construction non résolus [1]. Dans ce qui suit, le mot construire sous-entend toujours « à la règle et au compas ».

La quadrature du cercle.

1. Et pour cause, puisque pour l'essentiel on a montré depuis (mais relativement récemment) qu'ils sont impossibles, voir ci-dessous.

C'est le plus connu des quatre, il s'agit, un cercle[2] C étant donné, de construire un carré de même aire que C.

La duplication du cube.

Il s'agit de construire, à partir d'un cube, un cube de volume double. Le problème analogue consistant à construire un carré d'aire double d'un carré K donné est facile (on construit un carré dont le côté est la diagonale de K, on relira avec profit le *Menon* de Platon à ce sujet).

Le problème de la duplication du cube est aussi appelé problème de Délos car la légende rapporte qu'une fièvre pestilentielle s'étant déclarée dans cette ville, les oracles demandèrent que le volume de l'autel cubique dédié à Apollon soit doublé.

La trisection de l'angle.

On sait construire la bissectrice d'un angle. Elle partage cet angle en deux parties égales. Le problème de la trisection est de construire un angle égal au tiers d'un angle donné (il s'agit ainsi, par exemple, de partager en trois un angle de 60 degrés).

Les polygones réguliers.

Tous les écoliers savent construire un hexagone régulier (et donc un triangle équilatéral), un carré, un octogone régulier. Le problème est de construire le polygone régulier à n côtés. Les Grecs connaissent la construction du pentagone ou celle du polygone à 15 côtés, mais ils sont impuissants à réaliser celle de l'heptagone (7 côtés), ou de l'ennéagone (9 côtés), etc.

C. HISTORIQUE

Les mathématiciens grecs échouent donc sur les problèmes ci-dessus (même s'ils proposent parfois des solutions approchées, tel le 22/7 d'Archimède qui permet une quadrature approchée du cercle) ou s'ils savent résoudre des problèmes analogues, notamment de quadrature de parties courbes (les lunules d'Hippocrate, la quadrature du segment de parabole d'Archimède), voir exercices ou chapitre 7. L'expression « quadrature du cercle » est d'ailleurs passée dans le langage courant comme synonyme de problème très difficile, voire impossible. On peut mentionner aussi d'autres approches, qui utilisent des courbes auxiliaires (cissoïde de Dioclès pour la duplication du cube, quadratrice de Dinostrate pour la quadrature du cercle), mais sans résoudre véritablement les quatre problèmes.

Les mathématiciens arabes commencent à prendre conscience des liens qui unissent le problème de la trisection de l'angle et celui de la résolution

2. On dirait aujourd'hui plutôt un disque.

des équations de degré 3. Mais, jusqu'à une époque assez avancée, on cherche toujours une solution aux problèmes. Ainsi Charles-Quint offrait-il une récompense à toute personne qui parviendrait à effectuer la quadrature du cercle.

Peu à peu, cependant, les mathématiciens les plus éminents (Descartes, Gregory, etc.) commencent à penser que les quatre problèmes sont impossibles. Un indice de cette position des scientifiques est le fait que, dès 1775, l'Académie des Sciences refuse tout manuscrit prétendant réaliser la quadrature du cercle. Le pessimisme est tel qu'on pense même, concernant les polygones réguliers à p côtés (avec p premier) qu'au-delà de $p = 5$ ils ne sont plus constructibles. Voilà par exemple ce que dit Kepler :

> *L'heptagone, à la différence du pentagone ne peut pas se construire à la règle et au compas. Le compas et la règle sont les seuls outils permis en géométrie classique. Or la géométrie est le seul langage qui nous rende capable de comprendre les ressorts de l'esprit divin. Donc les figures que l'on ne peut construire à la règle et au compas – comme les polygones à 7,11,13 ou 17 côtés – sont en quelque sorte impures car elles sont un défi à l'intelligence. Elles sont non existantes.*

La situation va se débloquer au dix-neuvième siècle et d'abord dans un sens positif. En effet, Gauss, contredisant Kepler, réussit en 1796 à construire le polygone régulier à 17 côtés. Cependant il note que sa méthode ne peut s'appliquer ni à $n = 7$, ni à $n = 9$, etc.

À la suite des travaux d'Évariste Galois (1811-1832) sur les équations, Pierre-Laurent Wantzel montre en 1837 l'impossibilité de la duplication du cube, de la trisection de l'angle et précise exactement (enfin, presque, cf. 2.21) quels polygones réguliers sont constructibles. Il montre en particulier que les polygones à $7, 9, 11, 19, \ldots$ côtés ne sont pas constructibles. Enfin, Lindemann, en 1882, montre l'impossibilité de la quadrature du cercle.

D. QUELQUES REMARQUES

L'histoire des problèmes grecs s'arrête donc à la fin du dix-neuvième siècle, sauf pour un certain nombre de géomètres amateurs qui persistent, en dépit des preuves d'impossibilité qu'ils ont du mal à concevoir, à vouloir réaliser la quadrature du cercle et la trisection de l'angle (voir [Du]).

Le point crucial qu'il faut comprendre à ce sujet est qu'il s'agit de réaliser des constructions **exactes** et pas des constructions approchées, si précises soient-elles. En effet, ces constructions approchées sont, elles, toujours possibles et nous en verrons quelques-unes en exercices.

1. Rappel de quelques constructions fondamentales

Dans tout ce qui suit on travaille dans un plan euclidien E.

A. PRINCIPES

Que doit-on entendre par construction à la règle et au compas ? Le principe en est le suivant. On suppose donné un ensemble fini $\mathscr{P} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ de points de E (avec $n \geqslant 2$) et on considère deux types de figures (que l'on dira **admissibles** relativement à $\mathscr{P}$) :

1) les droites passant par deux points distincts de $\mathscr{P}$ (que l'on construit à la règle),

2) les cercles, centrés en un point de $\mathscr{P}$ et passant par un autre point de $\mathscr{P}$ (que l'on construit au compas).

Définition 1.1. *Avec les notations ci-dessus, on dit qu'un point* M *du plan est* **constructible en un pas** *(sous-entendu à la règle et au compas) à partir de $\mathscr{P}$ s'il existe deux figures admissibles relativement à $\mathscr{P}$ dont* M *est un point d'intersection. Le point* M *est dit* **constructible** *à partir de $\mathscr{P}$ si on peut le construire en un nombre fini de pas à partir de $\mathscr{P}$, c'est-à-dire, précisément, s'il existe des points $M_1, M_2, \ldots, M_r$ tels que $M_r = M$ et que, pour $i = 1, \ldots, r-1$, M_{i+1} est constructible en un pas à partir de $\mathscr{P} \cup \{M_1, \ldots, M_i\}$.*

Remarque 1.2. On peut aussi considérer les cercles centrés en un point de $\mathscr{P}$ et dont le rayon est la distance AB avec $A, B \in \mathscr{P}$. C'est la procédure couramment utilisée du report de l'écartement du compas. Nous verrons ci-dessous qu'un tel cercle est aussi un cercle de type 2) pour une partie $\mathscr{P}'$ obtenue en ajoutant à $\mathscr{P}$ des points constructibles. Utiliser cette opération ne change donc pas l'ensemble des points constructibles.

B. SYMÉTRIQUE D'UN POINT

Soient O et A deux points. On construit le symétrique A′ de A par rapport à O en traçant la droite (AO) et le cercle de centre O qui passe par A. En effet, ce cercle recoupe la droite en A′.

C. MÉDIATRICE

Soit [AB] un segment. La médiatrice de [AB] est l'ensemble des points équidistants de A et B. On la construit en traçant les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de centre A (resp. B) passant par B (resp. A) et en joignant leurs points d'intersection C et D, comme sur la figure 33. Bien entendu on peut aussi prendre deux cercles quelconques de centres A et B pourvu qu'ils aient même rayon.

Cette construction fournit évidemment celle du milieu M de [AB] et celle de la perpendiculaire à (AB) passant par A (construire d'abord le symétrique B′ de B par rapport à A).

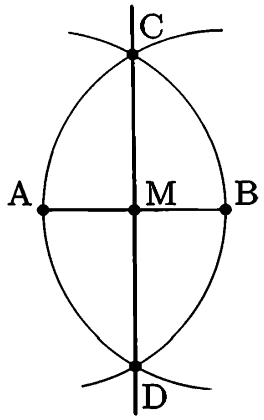

FIG. 33.

Explicitons sur l'exemple de la construction du milieu de [AB] les divers pas de construction au sens de 1.1. Au départ on dispose de l'ensemble $\mathscr{P} = \{A, B\}$. Les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont des figures admissibles pour l'ensemble $\mathscr{P}$, de sorte que C est constructible en un pas à partir de $\mathscr{P}$ et D constructible en un pas à partir de $\mathscr{P}$ (donc *a fortiori* à partir de $\{A, B, C\}$). Enfin, les droites (AB) et (CD) sont admissibles pour l'ensemble $\{A, B, C, D\}$, de sorte que M est construit en un pas à partir de $\{A, B, C, D\}$, donc constructible (en trois pas) à partir de $\mathscr{P}$.

D. PERPENDICULAIRE

Soit $\Delta = (AB)$ une droite et C un point n'appartenant pas à Δ. Il s'agit de construire la perpendiculaire à Δ passant par C. Pour cela on trace le cercle de centre C qui passe par A. Il recoupe Δ en A′ et il suffit de tracer la médiatrice de [AA′] (elle est perpendiculaire à Δ et passe par C) (fig. 34*a*).

Une autre méthode consiste à construire le cercle de diamètre [AC] (en construisant d'abord le milieu de [AC]). Ce cercle coupe Δ en H et le triangle ACH est rectangle en H, donc CH est la perpendiculaire cherchée (fig. 34*b*).

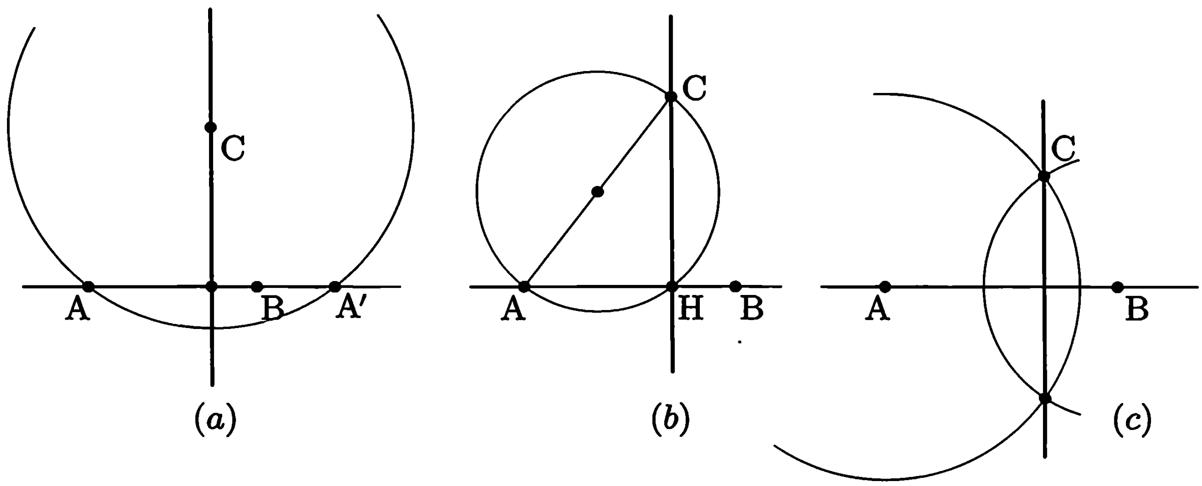

FIG. 34.

Mais, finalement, la méthode la plus simple consiste à tracer les cercles de centres A et B qui passent par C. Ces cercles se recoupent en un point C′ qui est le symétrique de C par rapport à (AB). La droite (CC′) est donc la perpendiculaire cherchée (fig. 34*c*).

E. PARALLÈLES

Il s'agit de construire la parallèle à $\Delta = (AB)$ passant par C. Il y a plusieurs méthodes. On peut, par exemple, construire la perpendiculaire (CH) à Δ passant par C, puis la perpendiculaire à (CH) passant par C. Une méthode un peu plus simple consiste à construire le point C′ symétrique de C par rapport à A, puis le point D symétrique de C′ par rapport à B. La droite (CD) est la parallèle cherchée (c'est la réciproque de la propriété de la droite des milieux).

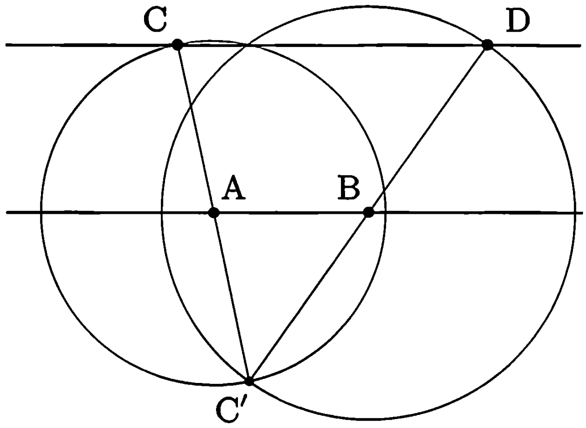

FIG. 35.

F. REPORT DE COMPAS

Lorsqu'on a trois points O, A, B on peut construire le cercle de centre O et de rayon AB. On construit en effet les parallèles à (AB) passant par O et à (OA) passant par B. Elles se coupent en D et, comme ABDO est un parallélogramme, on a AB = OD. Il suffit alors de construire le cercle de centre O qui passe par D.

G. BISSECTRICE

On considère un angle $\widehat{BAC}$. On trace le cercle de centre A passant par B qui recoupe (AC) en C′. Alors, les cercles de centres B et C′ passant par A se coupent en un autre point M et la droite (AM) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$ (en effet c'est la médiatrice de [CC′] et, comme le triangle ABC′ est isocèle en A, c'est aussi la bissectrice) (fig. 36).

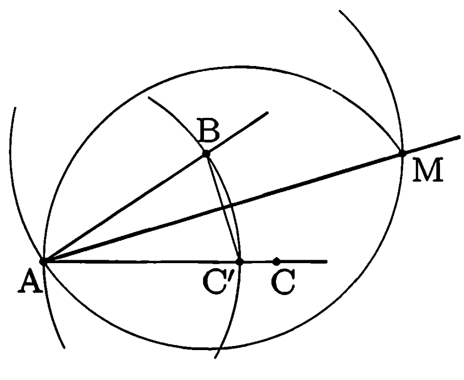

FIG. 36.

H. PARTAGE D'UN SEGMENT

Soient [AB] un segment et p un entier. Il s'agit de partager [AB] en p segments de longueurs égales. Pour cela on construit la perpendiculaire Δ à (AB) passant par A. On prend un point C_1 de Δ (par exemple l'un des points d'intersection de Δ et du cercle de centre A passant par B). On reporte ensuite (avec le compas) la longueur AC_1 sur Δ en construisant $C_2, \ldots, C_p$ avec $C_iC_{i+1} = AC_1$. On mène la droite (C_pB), puis les parallèles à cette droite passant par $C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$. Ces parallèles recoupent [AB] en $A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}$ qui partagent [AB] en p parties égales en vertu du théorème de Thalès, voir fig. 37 pour le cas $p = 3$.

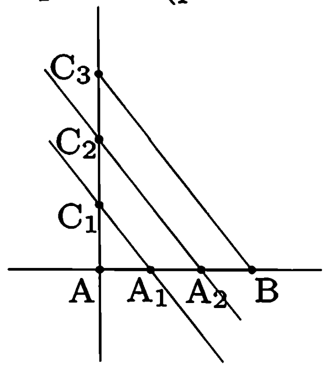

FIG. 37.

I. TANGENTE À UN CERCLE

Le principe de construction de la tangente à un cercle Γ de centre O en un point A repose sur le fait que la tangente est perpendiculaire au rayon. Si A est donné, il suffit de construire la perpendiculaire à (OA) en A.

Si on se donne un point M extérieur à Γ, on obtient les deux tangentes à Γ passant par M en construisant le cercle de diamètre OM qui coupe Γ en les points de contact A, A′ (car les triangles MOA et MOA′ sont rectangles en A et A′), (fig. 38).

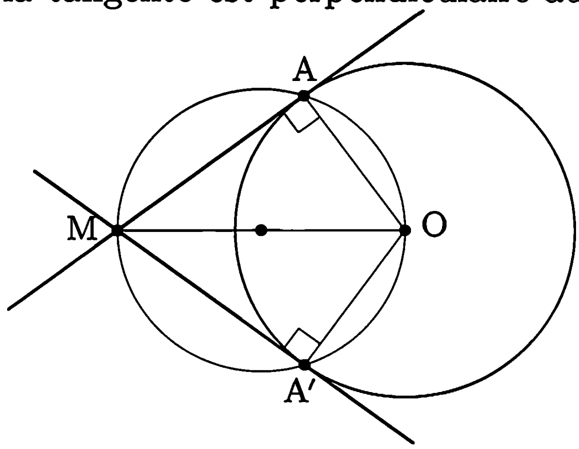

FIG. 38.

On se reportera aux exercices pour revoir de nombreuses autres constructions et en découvrir de nouvelles.

2. Nombres réels constructibles

Dans ce paragraphe nous allons analyser de plus près quels sont les points constructibles à partir de deux points donnés du plan. De fait, la plupart des problèmes de construction peuvent se ramener à cette donnée. C'est le cas de la duplication du cube et de la quadrature du cercle, par exemple. En effet, dans ces deux cas on dispose au départ d'un segment (l'arête du cube ou le rayon du cercle).

Dans un premier temps nous allons montrer qu'il y a beaucoup de points constructibles, mais, dans un second temps, nous verrons que tous les points ne le sont pas. Un aspect essentiel de ce paragraphe est qu'il nécessite un changement de point de vue : il faut traduire les propriétés géométriques en propriétés des nombres. Ce point de vue a été inauguré par Descartes, voir le merveilleux petit livre [De1]. Voici ce que Descartes dit à ce sujet :

> *Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connoître la longueur de quelques lignes droites pour les construire.*
>
> *Et comme toute l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce de division, ainsi n'a-t-on autre chose à faire en géométrie touchant les lignes qu'on cherche pour les préparer à être connues, que de leur en ajouter d'autres, ou en ôter ; ou bien en ayant une, que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la multiplication ; ou bien en trouver une quatrième qui soit à l'une des deux comme l'unité est à l'autre, ce qui est le même que la division ; ou enfin trouver une ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité et quelque autre ligne, ce qui est le même que tirer la racine carrée ou cubique, etc. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'arithmétique en la géométrie, afin de me rendre plus intelligible.*

On travaille toujours dans un plan euclidien E et on se donne deux points O et I. Le lecteur ne manquera pas de faire les figures pour illustrer ce qui suit.

A. AXES ET REPÈRE

On prend O comme origine et OI comme unité de longueur. On construit la droite (OI) que l'on prend comme axe des x. On construit le point I′ symétrique de I par rapport à O. On construit ensuite la médiatrice de [II′] et un point J de cette médiatrice tel que OI = OJ. On prend alors $\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J}$ comme repère orthonormé et la droite (OJ) comme axe des y.

B. POINTS ET NOMBRES CONSTRUCTIBLES

Définition 2.1. *On appelle points constructibles les points constructibles à partir de* $\{\mathrm{O}, \mathrm{I}\}$ *au sens de 1.1. On dit qu'un nombre réel* x *est constructible si le point* M *de coordonnées* $(x, 0)$ *dans le repère* O, I, J *l'est. L'ensemble des nombres constructibles sera noté* $\mathscr{K}$.

On notera qu'il revient au même de demander que le point $(0, x)$ soit constructible.

Proposition 2.2. *Un point* $\mathrm{M} = (x, y)$ *est constructible si et seulement si ses deux coordonnées le sont.*

Démonstration. Si M est constructible, on construit $(x, 0)$ en menant la perpendiculaire à l'axe des x passant par M. On construit de même $(0, y)$. Réciproquement, si $(x, 0)$ et $(0, y)$ sont constructibles, le point (x, y) est l'intersection de la perpendiculaire à l'axe des x passant par $(x, 0)$ et de la perpendiculaire à l'axe des y passant par $(0, y)$.

Proposition 2.3. *Les points* $(n, 0)$ *et* $(0, n)$, *pour* $n \in \mathbf{Z}$, *sont constructibles. Les nombres entiers sont constructibles. Les points* (m, n) *pour* $m, n \in \mathbf{Z}$ *sont constructibles.*

Démonstration. Comme les axes de coordonnées sont construits on montre par récurrence que les points $(n, 0)$ avec $n \geqslant 0$ sont constructibles. C'est vrai pour $n = 0$ ou 1. Si on a construit $\mathrm{M} = (n-1, 0)$ et $\mathrm{N} = (n, 0)$ on obtient $(n+1, 0)$ comme symétrique de M par rapport à N. Pour les points $(n, 0)$ avec $n < 0$ on effectue une symétrie de centre O. On procède de la même façon pour les points de l'axe des y. Enfin, la dernière assertion vient de 2.2.

C. LES RATIONNELS SONT CONSTRUCTIBLES

Proposition 2.4. *Les nombres rationnels sont constructibles. Les points* (r, s) *avec* $r, s \in \mathbf{Q}$ *sont constructibles.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que le point $(\frac{p}{q}, 0)$ est constructible. Or, le point $\mathrm{P} = (p, 0)$ l'est et il suffit de partager $[\mathrm{OP}]$ en q parties égales, voir § 1.H.

Remarque 2.5. Le fait que tous les rationnels (et en particulier tous les décimaux) soient constructibles montre que tous les réels peuvent être construits de manière approchée avec une précision aussi grande que l'on veut, même s'ils ne peuvent pas tous l'être de manière exacte. Cette remarque fait le bonheur des mathématiciens amateurs qui continuent à chercher la quadrature du cercle ou la trisection de l'angle et qui trouvent, de fait, des moyens d'obtenir des constructions approchées très précises. De tels exemples, quelquefois très élégants comme les constructions de Dürer et Ramanujan [3], sont proposés en exercices.

D. STRUCTURE DE $\mathscr{K}$

Théorème 2.6. *L'ensemble des nombres constructibles est un sous-corps de* $\mathbf{R}$.

Démonstration. Rappelons qu'un sous-corps de $\mathbf{R}$ est un sous-ensemble qui est stable par les quatre opérations. Il s'agit donc de montrer que si x et y sont constructibles il en est de même de $x+y$, $x-y$, xy et $\frac{x}{y}\cdot$ Pour $x+y$ et $x-y$ on procède par report de compas. Passons à xy. On peut supposer $x, y > 0$, quitte à effectuer ensuite des symétries centrales. On considère alors les points constructibles $\mathrm{M} = (x, 0)$ et $\mathrm{N} = (0, y)$. On trace la parallèle à (JM) passant par N. En vertu de Thalès (ou de l'homothétie de centre O et de rapport y), elle recoupe l'axe des x au point $(xy, 0)$. Il reste le cas de $\frac{x}{y}\cdot$ Grâce à la multiplication, on peut se limiter à construire $\frac{1}{y}\cdot$ C'est encore Thalès. On considère $\mathrm{M} = (0, y)$ et on trace la parallèle à (MI) passant par J. Elle recoupe l'axe des x en $(\frac{1}{y}, 0)$.

E. RACINES CARRÉES

Au-delà des nombres rationnels, on sait construire beaucoup d'autres réels : les racines carrées.

Proposition 2.7. *Si x est un réel > 0 constructible, $\sqrt{x}$ l'est aussi.*

Démonstration. Rappelons que si ABC est un triangle rectangle en A et si H est le pied de la hauteur issue de A on a $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BC} \times \mathrm{BH}$. Cela résulte en effet de l'expression du cosinus de l'angle $\widehat{\mathrm{B}}$: $\cos \widehat{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AB}}\cdot$

On construit alors $\sqrt{x}$ comme suit. On se ramène au cas $x > 1$. (Si x est < 1 on construit d'abord la racine de $1/x$ puis on en prend l'inverse). On considère le point $\mathrm{M} = (x, 0)$. On trace le demi-cercle de diamètre [OM] situé dans le demi-plan $y \geqslant 0$, puis la perpendiculaire à [OM] en I (qui est sur [OM]). Elle recoupe le demi-cercle en A. Le triangle OAM est rectangle en A et on a donc $\mathrm{OA}^2 = \mathrm{OI} \times \mathrm{OM} = x$. On a ainsi $\mathrm{OA} = \sqrt{x}$ et

3. On ne considère pas comme élégante la construction du nombre $\frac{355}{113}$ (qui est une bonne approximation de π) obtenue en reportant 355 fois l'unité sur l'axe des x, 113 fois sur l'axe des y et en utilisant Thalès !

il n'y a plus qu'à prendre l'intersection du cercle de centre O passant par A avec l'axe des x pour obtenir le point cherché (fig. 39).

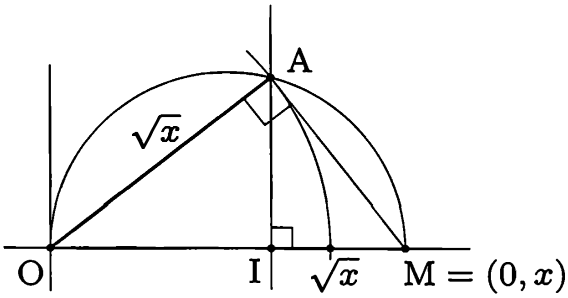

FIG. 39.

Remarque 2.8. On voit que de nombreux nombres réels sont constructibles, par exemple, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ etc. ou encore les nombres obtenus à partir de telles racines et de rationnels par les quatre opérations comme le nombre d'or $\tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou enfin les nombres obtenus par extractions successives de racines comme $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ ou encore $\sqrt{\dfrac{1+\tau}{3-\sqrt{2}}}$, etc. En définitive, tous les réels que l'on peut obtenir à partir de 0 et 1 par les cinq opérations dont parle Descartes sont constructibles.

En particulier, si a, b, c sont constructibles et si x est une racine réelle de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, la formule

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

montre que x est constructible. Ce que nous montrerons plus loin c'est que, réciproquement, les seules équations « constructibles » (au sens où leurs racines sont constructibles si leurs coefficients le sont) sont essentiellement les équations du second degré.

Si K est un sous-corps de $\mathbf{R}$, la proposition suivante décrit le sous-corps de $\mathbf{R}$ « engendré » par K et par une racine carrée d'un élément de K :

Proposition 2.9. *Soit* K *un sous-corps de* $\mathbf{R}$ *et soit* $d \in \mathrm{K}$ *un nombre* > 0. *Alors l'ensemble* $\mathrm{K}(\sqrt{d})$ *des réels de la forme* $a + b\sqrt{d}$ *avec* $a, b \in \mathrm{K}$ *est un sous-corps de* $\mathbf{R}$ *qui contient* K *et* $\sqrt{d}$ *(et c'est le plus petit pour cette propriété).*

Démonstration. Si $\sqrt{d}$ est dans K, le corps $\mathrm{K}(\sqrt{d})$ n'est autre que K. On suppose désormais que $\sqrt{d}$ n'est pas dans K. Il faut montrer que $\mathrm{K}(\sqrt{d})$ est stable par les quatre opérations. C'est évident pour la somme et la différence. Pour la multiplication on a la formule :

$$(a + b\sqrt{d})(a' + b'\sqrt{d}) = (aa' + dbb') + (ab' + ba')\sqrt{d}.$$

Il reste à montrer que l'inverse de $a + b\sqrt{d}$ (supposé non nul) est dans $\mathrm{K}(\sqrt{d})$. C'est l'astuce bien connue qui consiste à multiplier par la quantité conjuguée :

$$\frac{1}{a+b\sqrt{d}} = \frac{a-b\sqrt{d}}{(a+b\sqrt{d})(a-b\sqrt{d})} = \frac{a-b\sqrt{d}}{a^2-db^2} = \frac{a}{a^2-db^2} - \frac{b}{a^2-db^2}\sqrt{d}.$$

On notera que, comme $\sqrt{d}$ n'est pas dans K le nombre $a - b\sqrt{d}$ est non nul.

F. ANALYSE DE LA CONSTRUCTION EN UN PAS

Soit $\mathscr{P} = \{\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \dots, \mathrm{M}_r\}$ un ensemble fini de points de E avec $\mathrm{M}_0 = \mathrm{O}$ et $\mathrm{M}_1 = \mathrm{I}$. On suppose que toutes les coordonnées des points de $\mathscr{P}$ sont dans un certain sous-corps K de $\mathbf{R}$. Notons $\mathscr{D}$ l'ensemble des droites joignant deux points de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$ l'ensemble des cercles centrés en un point de $\mathscr{P}$ et passant par un point de $\mathscr{P}$.

Le lemme suivant décrit les équations [4] des éléments de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$:

Lemme 2.10. 1) *Toute droite de $\mathscr{D}$ a une équation de la forme*

$$ux + vy + w = 0$$

avec $u, v, w \in \mathrm{K}$.

2) *Tout cercle de $\mathscr{C}$ a une équation de la forme*

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{K}$.

Démonstration. 1) Une droite Δ de $\mathscr{D}$ joint deux points $\mathrm{M}_i = (a_i, b_i)$ et $\mathrm{M}_j = (a_j, b_j)$ de $\mathscr{P}$. Si $\mathrm{M} = (x, y)$ est un point de la droite, on écrit que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{M}_i\mathrm{M}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{M}_i\mathrm{M}_j}$ sont colinéaires : $\overrightarrow{\mathrm{M}_i\mathrm{M}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{M}_i\mathrm{M}_j}$, soit $x - a_i = \lambda(a_j - a_i)$ et $y - b_i = \lambda(b_j - b_i)$. En éliminant λ on obtient l'équation de $(\mathrm{M}_i\mathrm{M}_j)$:

$$(b_j - b_i)x - (a_j - a_i)y - a_i(b_j - b_i) + b_i(a_j - a_i) = 0.$$

Comme les coordonnées des points M_k sont dans K on voit que les coefficients de l'équation de Δ y sont aussi.

2) Si Γ est le cercle de centre M_i passant par M_j, son équation est donnée en écrivant que le point $\mathrm{M} = (x, y)$ est sur Γ si on a $\mathrm{M}_i\mathrm{M}^2 = \mathrm{M}_i\mathrm{M}_j^2$ ce qui donne $(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 = (a_j - a_i)^2 + (b_j - b_i)^2$ et on a la conclusion en développant.

Le résultat suivant analyse l'effet d'une construction en un pas. On y voit qu'une telle construction revient à l'extraction d'une racine carrée.

4. On passe ici dans le domaine de la géométrie analytique, inauguré par Descartes.

Proposition 2.11. *Soit* $\mathscr{P} = \{\mathrm{M}_0 = \mathrm{O}, \mathrm{M}_1 = \mathrm{I}, \mathrm{M}_2, \dots, \mathrm{M}_r\}$ *un ensemble fini de points de* E *dont toutes les coordonnées sont dans un sous-corps* K *de* **R**. *Soit* $\mathrm{M} = (x, y)$ *un point construit en un pas à partir de* $\mathscr{P}$. *Alors, il existe un élément* $d \in \mathrm{K}$ *tel que* $x, y \in \mathrm{K}(\sqrt{d})$.

Démonstration. On sait que M est intersection de deux éléments de $\mathscr{D}$ et/ou de $\mathscr{C}$. Il faut distinguer trois cas selon la nature de ces éléments.

1) Si $\mathrm{M} = (x, y)$ est intersection de deux droites Δ_1 et Δ_2 de $\mathscr{D}$ il vérifie deux équations à coefficients dans K :

$$u_1 x + v_1 y + w_1 = 0,$$
$$u_2 x + v_2 y + w_2 = 0,$$

et on en déduit facilement x et y :

$$x = \frac{v_1 w_2 - v_2 w_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \quad \text{et} \quad y = \frac{-u_1 w_2 + u_2 w_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1}.$$

On voit que x et y sont dans $\mathrm{K} = \mathrm{K}(\sqrt{1})$.

2) Si $\mathrm{M} = (x, y)$ est intersection d'une droite et d'un cercle on a les équations à coefficients dans K :

$$ux + vy + w = 0,$$
$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Supposons par exemple $v \neq 0$. La première équation s'écrit alors sous la forme $y = px + q$ avec $p, q \in \mathrm{K}$. Un petit calcul montre alors que x est solution de l'équation du second degré suivante :

$$(1 + p^2)x^2 + (2pq + \alpha + \beta p)x + q^2 + \beta q + \gamma = 0.$$

Mais, si d est le discriminant de cette équation, il est dans K et il est clair que x est dans $\mathrm{K}(\sqrt{d})$, en vertu de la formule de résolution des équations du second degré. Il en résulte que y est aussi dans $\mathrm{K}(\sqrt{d})$ grâce à la formule $y = px + q$.

3) Si $\mathrm{M} = (x, y)$ est intersection de deux cercles de $\mathscr{C}$ on a les équations :

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$
$$x^2 + y^2 + \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0.$$

Par différence, on se ramène à résoudre le système formé de la première équation et de l'équation du premier degré : $(\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y + \gamma - \gamma' = 0$. On est donc ramené au cas précédent.

G. CARACTÉRISATION DES NOMBRES CONSTRUCTIBLES

Nous allons caractériser maintenant les nombres constructibles en termes de racines carrées itérées.

Théorème 2.12. *Soit x un nombre réel. Alors x est constructible si et seulement si il existe une suite $\mathrm{K}_0, \mathrm{K}_1, \dots, \mathrm{K}_r$ de sous-corps de $\mathbf{R}$ vérifiant les conditions suivantes :*

1) *on a $\mathrm{K}_0 = \mathbf{Q}$,*

2) *on a $\mathrm{K}_0 \subset \mathrm{K}_1 \subset \cdots \subset \mathrm{K}_r$ et, plus précisément, pour chaque $i = 1, 2, \dots, r$, il existe $d_i \in \mathrm{K}_{i-1}$ tel que $\mathrm{K}_i = \mathrm{K}_{i-1}(\sqrt{d_i})$,*

3) *on a $x \in \mathrm{K}_r$.*

Commentaire. On voit avec ce théorème que les nombres constructibles sont ceux qui sont obtenus, à partir des rationnels, en rajoutant des racines carrées, d'abord d'éléments de $\mathbf{Q}$, puis d'éléments construits avec ces premières racines carrées, etc.

Démonstration. Le fait que les éléments de K_r soient constructibles résulte par récurrence de 2.6, 2.7 et 2.9. Comme c'est l'autre sens qui nous intéresse surtout nous laissons les détails de cette preuve au lecteur.

Réciproquement, supposons que x est constructible, c'est-à-dire que le point $\mathrm{M} = (x, 0)$ est constructible à partir de O, I. Traduisons cette condition selon la définition 1.1. Cela signifie qu'il existe des points $\mathrm{M}_0 = \mathrm{O}, \mathrm{M}_1 = \mathrm{I}, \mathrm{M}_2, \dots, \mathrm{M}_r$ tels que $\mathrm{M}_r = \mathrm{M}$ et que, pour $i = 2, \dots, r-1$, M_{i+1} est constructible en un pas à partir de $\{\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{M}_2, \dots, \mathrm{M}_i\}$.

Nous allons montrer par récurrence sur r la propriété $\mathrm{P}(r)$ suivante qui impliquera le résultat :

Si $\mathrm{M}_0 = \mathrm{O}, \mathrm{M}_1 = \mathrm{I}, \mathrm{M}_2, \dots, \mathrm{M}_r$ sont des points du plan tels que, pour $i = 1, \dots, r-1$, M_{i+1} soit construit en un pas à partir de $\{\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{M}_2, \dots, \mathrm{M}_i\}$, alors il existe une suite de corps $\mathrm{K}_0, \dots, \mathrm{K}_r$ vérifiant les conditions de 2.12 et tels que les coordonnées de tous les M_i soient dans K_r.

La propriété est vraie pour $r = 0$ et $r = 1$ car les coordonnées de O et I sont rationnelles et on peut donc prendre $\mathrm{K}_0 = \mathbf{Q}$ et $\mathrm{K}_1 = \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\sqrt{1})$.

Supposons la propriété vraie pour l'entier r et passons à $r + 1$. Les coefficients des points $\mathrm{M}_0, \dots, \mathrm{M}_r$ sont donc dans le corps K_r. On rajoute un point $\mathrm{M} = \mathrm{M}_{r+1}$ construit en un pas à partir des M_i. D'après 2.11, les coordonnées de M sont dans un corps $\mathrm{K}_{r+1} = \mathrm{K}_r(\sqrt{d})$ avec $d \in \mathrm{K}_r$, et on a gagné en ajoutant K_{r+1} à la suite des K_i.

H. L'IMPOSSIBILITÉ DE LA DUPLICATION DU CUBE

Nous résolvons maintenant par la négative le premier des quatre problèmes des Grecs. Il peut se formuler ainsi. On considère le cube unité, de côté OI. Il s'agit de construire un cube de volume double, c'est-à-dire de construire le nombre $\sqrt[3]{2}$.

Théorème 2.13. *Le nombre $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible (et donc la duplication du cube est impossible).*

Démonstration. On commence par montrer le lemme suivant :

Lemme 2.14. *Soit* K *un sous-corps de* **R** *et soit* $d \in \mathrm{K}$ *un nombre* > 0. *On suppose que* $\sqrt[3]{2}$ *est dans* $\mathrm{K}(\sqrt{d})$. *Alors* $\sqrt[3]{2}$ *est dans* K.

Démonstration. Le résultat est évident si $\sqrt{d} \in \mathrm{K}$. Nous supposerons désormais que cette condition n'est pas vérifiée. Posons $\alpha = \sqrt[3]{2}$ et supposons $\alpha \in \mathrm{K}(\sqrt{d})$. On a donc $\alpha = a + b\sqrt{d}$. On élève cette relation au cube et on obtient

$$2 = a^3 + 3a^2b\sqrt{d} + 3adb^2 + b^3d\sqrt{d}.$$

Cette relation est de la forme $\mathrm{A} + \mathrm{B}\sqrt{d} = 0$ avec $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{K}$. Comme $\sqrt{d}$ n'est pas dans K, le coefficient B est nécessairement nul (sinon on aurait $\sqrt{d} = -\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \in \mathrm{K}$). Or on a $\mathrm{B} = b(3a^2 + db^2)$. Si $b = 0$ on a $\alpha = a \in \mathrm{K}$ et on a fini, si $b \neq 0$ on a $3a^2 + db^2 = 0$ ce qui est absurde car ce nombre est > 0.

On peut maintenant finir de prouver le théorème 2.13. Supposons $\alpha = \sqrt[3]{2}$ constructible. En vertu de 2.12 il existe une suite $\mathrm{K}_0, \mathrm{K}_1, \ldots, \mathrm{K}_r$ de sous-corps de **R** avec $\mathrm{K}_0 = \mathbf{Q}$, $\mathrm{K}_i = \mathrm{K}_{i-1}(\sqrt{d_i})$ et $\alpha \in \mathrm{K}_r$. Mais alors, il résulte de 2.14 que α est dans K_{r-1} puis dans K_{r-2} et, par récurrence, dans **Q**. Mais c'est impossible en vertu du lemme suivant (voir aussi exercice **128**) :

Lemme 2.15. *Le nombre $\alpha = \sqrt[3]{2}$ est irrationnel.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Si α est rationnel on l'écrit $\alpha = \dfrac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux. En élevant au cube on obtient $2q^3 = p^3$. On en déduit que p est pair, $p = 2p'$ et on obtient en simplifiant par 2, $q^3 = 4p'^3$. Mais alors q est pair aussi, ce qui contredit le fait que p et q sont premiers entre eux.

I. LES AUTRES PROBLÈMES DES GRECS

Nous donnons ici sans démonstration les autres résultats concernant les problèmes grecs. Le résultat concernant la trisection de l'angle est du même ordre de difficulté que ce que nous venons de faire. En revanche l'impossibilité de la quadrature du cercle est nettement plus difficile et fait appel à des techniques d'analyse. De même le résultat sur les polygones réguliers utilise d'autres méthodes, d'algèbre cette fois (la théorie de Galois). Une idée éclaire tous ces résultats, c'est le fait suivant :

Proposition 2.16. *Si x est un nombre constructible il est algébrique sur* **Q**, *c'est-à-dire qu'il vérifie une équation :*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

à coefficients rationnels. De plus, si cette équation est choisie du degré n le plus petit possible, ce degré est une puissance de 2.

Idée de la démonstration. Cela résulte essentiellement du théorème 2.12 qui affirme que x s'obtient par des extractions successives de racines carrées. Par exemple, si on pose $x = \sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, on vérifie facilement que x est racine de l'équation $x^8 - 10x^4 + 1 = 0$.

Remarques 2.17. 1) Attention, le fait que x soit racine d'une équation algébrique de degré une puissance de 2 à coefficients rationnels est une condition nécessaire de constructibilité, mais pas une condition suffisante, voir [Ca].

2) On comprend alors que $x = \sqrt[3]{2}$ ne soit pas constructible car il vérifie bien une équation algébrique, $x^3 - 2 = 0$, mais elle est de degré 3 (et il ne satisfait pas d'équation de degré 2).

Par le même type d'argument que celui utilisé en 2.13 on montre :

Proposition 2.18. *Le nombre $x = \cos \pi/9$ n'est pas constructible (et donc on ne peut pas « trisecter » l'angle $\pi/3$).*

Voir l'exercice **186**.

Pour la quadrature du cercle, le résultat crucial est le suivant :

Théorème 2.19 (Lindemann). *Les nombres π et $\sqrt{\pi}$ ne sont pas algébriques sur $\mathbf{Q}$, donc ne sont pas constructibles, de sorte que la quadrature du cercle est impossible.*

Enfin, donnons le beau résultat de constructibilité des polygones réguliers :

Théorème 2.20. *Soit n un entier $\geqslant 3$. Le polygone régulier à n côtés est constructible si et seulement si n est de la forme :*

$$n = 2^\alpha p_1 \cdots p_r$$

où α est un entier $\geqslant 0$ et où les p_i sont des nombres de Fermat (donc de la forme $2^{2^r}+1$ avec $r \geqslant 0$), **premiers** *et distincts.*

Remarques 2.21. 1) On comprend cette condition sur les nombres premiers p en remarquant que la construction du polygone régulier à p côtés revient à celle des racines p-ièmes de l'unité dans le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Or ces nombres vérifient une équation de degré $p-1$ en vertu de la relation

$$\mathrm{X}^p - 1 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^{p-1} + \mathrm{X}^{p-2} + \cdots + \mathrm{X} + 1),$$

de sorte que, vu 2.15, le degré de cette équation doit être une puissance de 2.

2) Nous avons vu dans le chapitre sur l'arithmétique qu'on connaît seulement 5 nombres de Fermat premiers : 3, 5, 17, 257 et 65537.

3) Pour $n \leqslant 20$ les polygones réguliers non constructibles sont ceux qui correspondent à $n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19$. Voir l'exercice **187** pour le cas de l'heptagone.

4) Nous proposons ci-dessous une construction du pentagone régulier (mais nous ne chercherons pas à donner de construction explicite du polygone régulier à 65537 côtés !).

J. UNE CONSTRUCTION DU PENTAGONE RÉGULIER

Dans tout problème de construction, il faut commencer par une phase d'analyse de la figure. Supposons donc que le pentagone $P = ABCDE$ soit construit, soit Γ le cercle circonscrit à P et O son centre (fig. 40). Toute la philosophie des considérations précédentes est de passer par l'intermédiaire des nombres pour résoudre le problème. Pour cela, on choisit un repère orthonormé adapté à la figure, donc d'origine O et tel que l'axe des x soit porté par (OA) avec, précisément, $A = (1, 0)$. Pour construire P il suffit de savoir construire le point I projeté orthogonal de B (et de E) sur l'axe des x. Comme les angles au centre de P valent $2k\pi/5$, on a $I = (\cos 2\pi/5, 0)$. Nous allons donc calculer ce cosinus, si possible en n'utilisant que des rationnels et des racines carrées.

La remarque de base est une conséquence de la symétrie de P :

Lemme 2.22. *On a la relation :*

$$\vec{V} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}.$$

Démonstration. On sait que la symétrie par rapport à (OA) transforme A en A, B en E et C en D. Elle laisse donc invariant le vecteur $\vec{V}$, de sorte que $\vec{V}$ est de direction (OA). Mais, la même remarque vaut aussi avec (OB), (OC), etc. et $\vec{V}$ est donc un vecteur qui admet plusieurs directions et le seul vecteur qui a cette propriété est le vecteur nul !

Une autre preuve, qui utilise les nombres complexes est la suivante. Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, etc. correspondent aux racines cinquièmes de l'unité : 1, $\zeta = e^{2i\pi/5}$, ζ^2, etc. et l'assertion du lemme revient à montrer la formule $1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = 0$. Mais cela résulte du fait que ζ est une racine cinquième de l'unité différente de 1 car on a :

$$\zeta^5 - 1 = (\zeta - 1)(1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4).$$

En écrivant que l'abscisse de $\vec{V}$ est nulle on obtient la relation :

$$(*) \qquad 1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0.$$

Mais, on a aussi la formule de trigonométrie bien connue $\cos\frac{4\pi}{5} = 2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1$ et, si l'on pose $a = \cos\frac{2\pi}{5}$, on en déduit que a est la racine positive de l'équation $4a^2 + 2a - 1 = 0$, obtenant ainsi :

$$a = \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

La formule $(*)$ donne $\cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2} - a$, d'où $\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ ($\cos\frac{4\pi}{5}$ est la racine négative de l'équation $4a^2 + 2a - 1 = 0$).

On voit que le nombre a est constructible (puisqu'il s'écrit uniquement, à partir des rationnels, avec une racine carrée). Il reste à réaliser explicitement la construction. Il y a de nombreuses méthodes, en voici une.

On cherche essentiellement à construire $\sqrt{5}$. Mais, c'est très facile par Pythagore : $\sqrt{5}$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés 1 et 2. Comme c'est, en fait, $\sqrt{5}/4$ que l'on vise, il faut prendre un triangle de côtés $1/4$ et $1/2$. Comme, en plus, on veut ajouter $\sqrt{5}/4$ à $-1/4$, la solution est toute trouvée : on construit le point M de l'axe des x d'abscisse $-1/4$ et le point N de l'axe des y d'ordonnée $1/2$. On trace le cercle de centre M passant par N, il est de rayon $\sqrt{5}/4$. Il coupe alors l'axe des x en les points I et J d'abscisses $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$ et on obtient la construction ci-dessous :

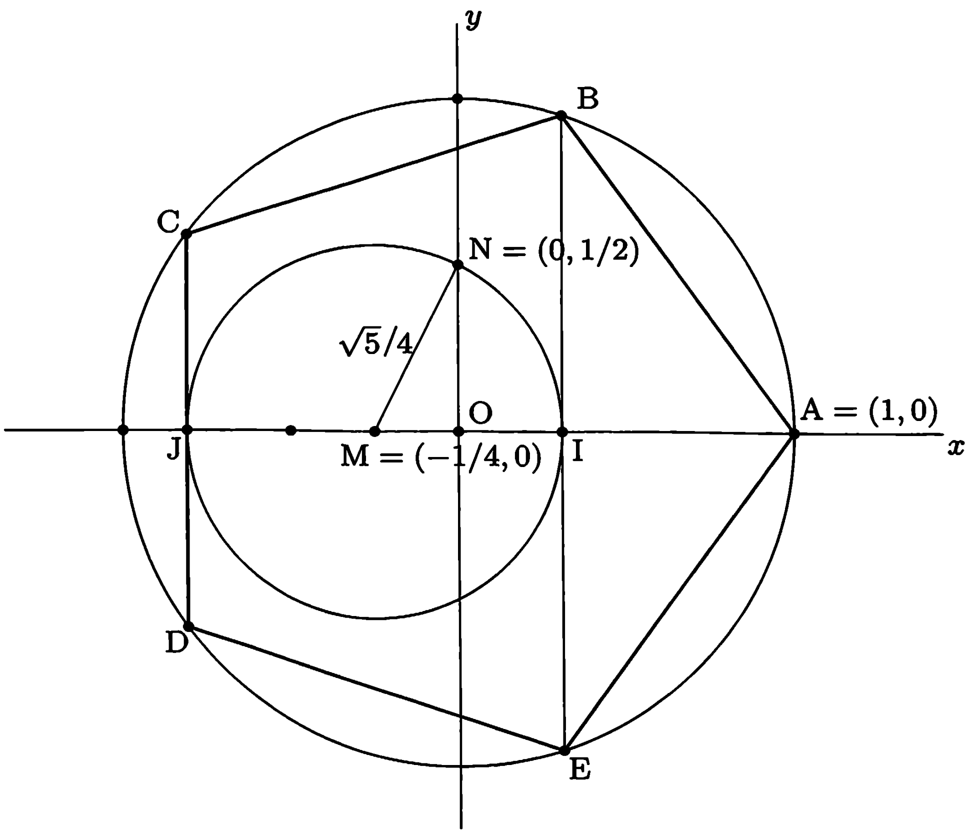

FIG. 40.

Remarque 2.23. Les nombres obtenus sont très liés au fameux nombre d'or $\tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (qui vérifie l'équation $\tau^2 - \tau - 1 = 0$ que l'on peut encore écrire $\tau^{-1} = \tau - 1$, formule facile à retenir phonétiquement : *tau moins un égale tau moins un*). En effet, on a $\cos\dfrac{4\pi}{5} = -\dfrac{\tau}{2}$ et $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\tau^{-1}}{2}\cdot$

K. CONCLUSION

À l'issue de cette promenade au pays des nombres constructibles il est utile de mesurer le chemin parcouru. Si les quatre problèmes « impossibles » posés par les Grecs ont mis deux mille ans pour être résolus c'est qu'ils présentaient sans doute des difficultés redoutables.

La première, évidente, c'est qu'il fallait être capable de concevoir qu'on puisse **prouver** l'impossibilité des constructions. C'est sans doute le plus difficile comme en témoigne l'obstination d'un certain nombre de géomètres amateurs à continuer, y compris de nos jours, à vouloir réaliser ces constructions.

Une autre difficulté, qui empêchait, en tous cas, les Grecs de résoudre ces problèmes, c'est qu'il est nécessaire pour cela de sortir du cadre géométrique et de travailler dans le **cadre numérique** (celui des nombres constructibles). On sait en effet, que les Grecs ne considéraient comme nombres que les entiers, les rationnels n'apparaissant que comme des rapports de grandeurs, ce qui alourdit considérablement leur utilisation. Pour les irrationnels les choses étaient pires encore, souvenons-nous de la crise ouverte par la découverte de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ que nous avons évoquée dans le chapitre sur les réels.

Une troisième difficulté était de prendre conscience de ce que représentaient, sur les nombres, les constructions. C'est le point de vue de Descartes (celui des **équations des courbes**) qui permet de comprendre que les seuls nombres rajoutés sont essentiellement des racines carrées.

Enfin, une dernière difficulté était d'avoir le cadre théorique adéquat pour formaliser les problèmes (cela suppose de disposer de **la notion de corps**, voire de celle d'espace vectoriel).

En tous les cas on détient là l'un des plus beaux exemples de l'obstination de la communauté des mathématiciens, par delà les siècles, face à des problèmes difficiles.

Bibliographie

[Ca] Carréga J.-C., *Théorie des corps, La règle et le compas*, Hermann, 1981.

[De1] Descartes R. *La géométrie*, Hermann, Nouvelle édition, 1886.

[Du] Dudley Underwood, *A budget of trisections*, Springer Verlag, 1987.