NOTE SUR LA CONNEXITÉ

PAUL MEUNIER

1. Introduction

Cette note s'adresse aux élèves de MP* préparant plus spécialement le concours d'entrée à l'école Polytechnique et aux ENS. Elle motive et introduit quelques résultats élémentaires sur la connexité dans les espaces vectoriels normés. Les preuves, relativement élémentaires, sont laissées en exercice. Par ailleurs, le texte est jalonné d'exercices classiques, dont la difficulté est représentée par des étoiles, issus ou à rapprocher d'exercices issus des oraux des concours susmentionnés.

Il est bon de rappeler que ces derniers proposent régulièrement des sujets n'ayant qu'un audacieux rapport avec le programme officiel, ou, du moins, où la textualité seule, au mépris des idées sous-jacentes et des raisonnements à élaborer pour aboutir à la solution de façon naturelle et intuitive, vérifie la canonicité. Enfin, si vraiment il fallait nous justifier, nous ne pourrions qu'invoquer la familiarité, l'assurance et l'aisance conceptuelle qu'engendre le vocabulaire adéquat, c'est-à-dire qu'une idée n'est jamais tant comprise que quand elle est nommée ; et que s'il est vrai qu'en poétique ce que l'on conçoit bien s'énonce clairement, que les mots pour le dire arrivent aisément, il s'avère qu'en mathématique, ce qui se nomme bien se conçoit clairement, les raisons monstratives arrivant aisément.

2. Motivation

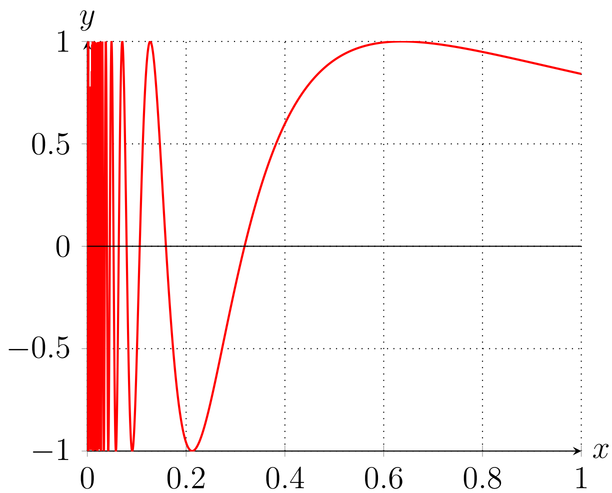
La topologie étudie la forme des espaces. Lorsqu'on regarde un objet, une question que l'on peut se poser est : est-il d'un seul tenant ? Autrement dit, si je le soulève par un côté, tout l'objet va-t-il s'élever, ou, composé de plusieurs pièces, n'en entraînerais-je qu'une seule ? Par exemple, si je prends une feuille de papier, elle n'est faite que d'un seul morceau, mais, si je la découpe, je peux obtenir deux pièces, chacune d'elle étant en un seul morceau. C'est ce que la notion de *connexité* essaye de traduire. Un objet en un seul morceau sera dit connexe, lorsqu'il y a plusieurs morceaux, chacun sera appelé une composante connexe.

Mathématiquement, un premier essai pourrait être de dire que deux points d'un espace (entendez : d'une partie d'un espace vectoriel normé) sont dans la même composante connexe si et seulement si on peut les relier par un chemin. Cette notion visuelle, appelée la *connexité par arcs*, ne passe malheureusement pas à l'adhérence : ce n'est pas une bonne notion de connexité, comme l'exercice ci-dessous l'illustre. En effet, on a envie de dire que l'espace proposé tient d'un seul tenant, mais il n'est pas connexe par arcs.

Exercice. (**) On considère l'espace $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ défini comme étant le graphe de la fonction $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, autrement dit, $\Gamma = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \colon x \in \mathbb{R}^{+*}\}$.
a) Montrer que Γ est connexe par arcs.

Date: 18 décembre 2019.

b) Déterminer l'adhérence de Γ dans $\mathbb{R}^2$.
c) Montrer qu'elle n'est pas connexe par arcs.



3. Définitions

On introduit maintenant la notion de connexité. Par de souci de rapidité, on utilisera "espace topologique" ou simplement "espace" pour "partie d'un espace vectoriel normé munie de la topologie induite". (Les résultats énoncés sont en fait vrais, sauf mention contraire, dans tous les espaces topologiques.)

Proposition 1. *Soit X un espace topologique. Les propositions ci-dessous sont équivalentes :*

(1) les seules parties de X à la fois ouvertes et fermées de X sont X et $\varnothing$;

(2) X ne peut pas s'écrire comme la réunion disjointe de deux ouverts non vides ;

(3) X ne peut pas s'écrire comme la réunion disjointe de deux fermés non vides ;

(4) toute fonction continue de X dans $\{0, 1\}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$ est constante.

Exercice. Démontrer la proposition.

Si X vérifie une des conditions ci-dessus, on dit que X est *connexe*. On peut de même définir une partie connexe de X comme un espace connexe pour la topologie induite. De façon cohérente, la connexité par arcs implique la connexité.
Exercice. Le montrer.

On introduit maintenant la notion de composante connexe.
Exercice. Soient x et y deux points de X. Montrer que la relation "il existe une partie connexe de X qui contient x et y" est une relation d'équivalence.

Pour $x \in X$, on appelle *composante connexe* de x la classe d'équivalence de x modulo la relation précédente.
Exercice. (*) Montrer que les composantes connexes sont toujours fermées.

4. Propositions

Il est immédiat que la connexité par arcs est préservée par les fonctions continues. Fort heureusement, la connexité est aussi. De plus, la connexité passe à l'adhérence.

Exercice. Montrer que l'image par une fonction continue d'un espace connexe est connexe.

Proposition 2. *Soit A une partie d'un espace topologique X. Si A est connexe, alors $\overline{A}$ aussi.*

Exercice. Démontrer la proposition.

5. Quelques exercices

Exercice. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes de X indexée par un ensemble quelconque I. On suppose que $\bigcap_{i\in I} A_i$ est non vide. Montrer que $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.
Indication. Utiliser une bonne caractérisation de la connexité.

Exercice. Montrer que le produit de deux espaces connexes est connexe.

Exercice. Soit $A \subset B \subset \overline{A}$ des parties d'un espace X. On suppose que A est connexe. Montrer que B aussi.

Exercice. Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont connexes. Montrer qu'un espace vectoriel normé est toujours connexe.

Exercice. (*) Montrer que les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles.

L'exercice suivant est un parfait exemple d'utilisation de la connexité. De plus, les raisonnements par connexité sont presque toujours les mêmes que dans cet exercice.

Exercice. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement constante (i.e., pour tout x, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que f est constante sur $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$). Montrer que f est constante.

Exercice. Montrer qu'un ouvert de $\mathbb{C}$ est connexe par arcs si et seulement s'il est connexe.

Exercice (lemme du passage de la douane). Soit X un espace topologique.
a) Soient C et D des parties de X. On suppose que C est connexe, que $C \cap \mathring{D} \neq \varnothing$ et que $C \cap (X \backslash \overline{D}) \neq \varnothing$. Montrer que $C \cap \partial D \neq \varnothing$, où $\partial D = \overline{D} \backslash \mathring{D}$ est la frontière de D.
b) Expliquer le nom.
c) En déduire le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice (théorème de Darboux). Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On note $A = \{(x,y) \in I \times I : x < y\}$.
a) Montrer que A est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.
b) Pour $(x,y) \in A$, on pose $g(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Montrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.

FIGURE 1. Premières itérations de la construction de l'ensemble de Cantor

c) En déduire que $f'(I)$ est un intervalle.
Ainsi, toute dérivée vérifie le théorème des valeurs intermédiaires (c'est le théorème de Darboux, déjà tombé à l'écrit pour l'ENS).
d) En déduire une fonction non continue vérifiant le théorème des valeurs intermédiaires (et pour les curieux qui auraient quelques secondes de libres, allez voir la fonction de Conway en base 13).

Pour finir, il arrive que des examinateurs ambitieux posent des exercices sur l'espace de Cantor. Il vérifie une propriété particulière du point de vue de la connexité, qui permet par exemple d'y construire des fonctions localement constantes non constantes (l'ensemble des fonctions localement constantes de l'espace de Cantor dans $\mathbb{R}$ est même dense dans celui des fonctions continues).

Définissons l'espace triadique de Cantor $\mathscr{C}$ comme suit : pour $n \in \mathbb{N}$, soit $F_n = \bigcup_{i=1}^{2^n} [\frac{2i}{3^n}, \frac{2i+1}{3^n}] \subset [0,1]$. On pose alors $\mathscr{C} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ (voir figure 1). Cet espace a de nombreuse propriétés (il est non vide, compact et équipotent à $\mathbb{R}$, par exemple).

Un espace est dit *totalement discontinu* si ses composantes connexes sont les singletons.

Exercice. (**) Montrer que l'espace triadique de Cantor est totalement discontinu.