

Gravitation

Chapitre 1

I - Pendules (révisions MPSI)

1 Sismomètre à pendule

Cet exercice est un prolongement des révisions de mécanique faites en cours. Il permet aussi de réviser le filtrage linéaire.

Un sismomètre à pendule est constitué d'un pendule simple attaché à un support solidaire du sol. L'objectif est de mesurer le déplacement du sol, $X(t)$, en fonction du temps. Puisqu'on ne peut pas mesurer ce déplacement directement (on n'a pas de référence immobile à laquelle on pourrait comparer le mouvement du sol), on utilise à la place une mesure de l'angle $\theta(t)$ entre le pendule et la verticale. Lorsque le sol se déplace, le pendule commence en effet à osciller.

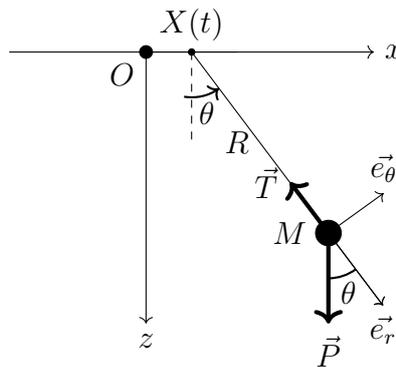


Figure 1: Schéma simplifié du sismomètre à pendule. Notons que l'origine du repère de coordonnées sphériques se déplace avec le temps en raison du séisme et se trouve sur l'axe (Ox) avec la coordonnée $X(t)$. Schéma adapté à partir d'un schéma de Gabriel Pereira Coelho.

Nous adoptons deux systèmes de coordonnées, polaire et cartésien. Au cours de l'exercice, on pourra utiliser les vecteurs \vec{e}_x , \vec{e}_z , \vec{e}_r et \vec{e}_θ au choix en prenant l'expression la plus simple possible (il n'est pas nécessaire de toujours se ramener au même système de coordonnées).

1. Nous souhaitons établir l'équation qui régit l'évolution de l'angle θ , en fonction du déplacement du sol $X(t)$.
 - (a) Peut-on utiliser le théorème du moment cinétique ? Pourquoi ?
 - (b) La force de tension du fil travaille-t-elle ? En déduire si une résolution par une méthode énergétique est possible.

2. (a) Le référentiel terrestre peut-il être considéré comme galiléen ?
- (b) Établir l'expression de la vitesse du point M dans un référentiel galiléen, en fonction de la vitesse de déplacement du sol \dot{X} , la longueur du pendule L , la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et les vecteurs unitaires appropriés.
- (c) Faire un bilan des forces. Sur quel axe a-t-on intérêt à projeter le principe fondamental de la dynamique ?
- (d) Montrer que, dans le cadre de l'approximation des petits angles, l'équation du mouvement peut s'écrire sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = -\frac{1}{L} \ddot{X} \quad (1)$$

3. Nous allons maintenant étudier la réponse du sismomètre à un séisme. Nous rappelons que la grandeur mesurée est θ .
- (a) Quel est la variable qui correspond au forçage du système ? Quelle variable correspond à la réponse / sortie ?
- (b) Calculer la fonction de transfert du système. De quel type de filtre s'agit-il ? Commenter son utilité pour distinguer les séismes d'autres signaux naturels comme les marées.

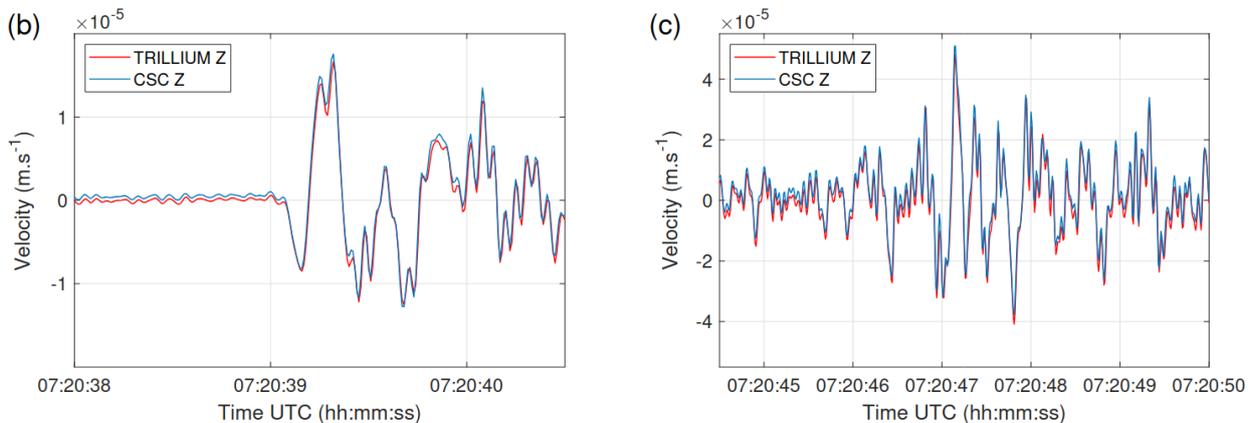


Figure 2: Enregistrements du séisme du Moule le 25 octobre 2019 (magnitude 4.1) par deux sismomètres sur la Soufrière. Source : Romain Feron et al., *First optical seismometer at the top of La Soufrière volcano, Guadeloupe*. Seismological Research Letters, 2020.

- (c) La figure 2 montre un enregistrement d'un séisme. Proposer une fréquence de coupure appropriée pour le filtre. En déduire la longueur L de la tige nécessaire pour pouvoir détecter le séisme.
- (d) A votre avis, pourquoi privilégie-t-on plutôt les sismomètres à ressort aujourd'hui ? (Question ouverte, plusieurs réponses possibles).

2 Pendule pesant

On considère un pendule pesant \mathcal{P} constitué d'une tige homogène de masse m de longueur L au bout de laquelle est attachée une masse M . La tige est liée à l'axe (Δ) par une liaison pivot parfaite.

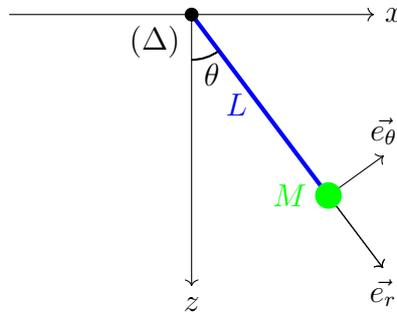


Figure 3: Schéma simplifié d'un pendule pesant, composé d'une tige rigide (en bleu) et d'une masse ponctuelle (en vert), en rotation autour d'un axe (Δ)

1. Quel est le moment d'inertie de ce pendule autour de son axe de rotation ? (On rappelle que le moment d'inertie d'une barre homogène de masse m et de longueur L autour d'un axe passant perpendiculairement par un de ses bords est $J = \frac{1}{3}mL^2$).
2. Déterminer le moment par rapport à l'axe de rotation des forces exercées sur le pendule \mathcal{P} .
3. En déduire l'équation horaire du mouvement et la période des oscillations.
4. A quelle condition peut-on assimiler ce pendule à un pendule simple ?

II - Force de gravitation (révisions MPSI)

3 Bond sur la Lune

Dans l'album de Tintin "On a marché sur la Lune", le Capitaine Haddock est étonné de pouvoir faire un bond plus grand que sur Terre.

On assimile le mouvement du capitaine Haddock à celui de son centre de gravité M de masse m . Il saute depuis le sol lunaire avec une vitesse initiale v_0 faisant un angle $\alpha = 30^\circ$ avec le sol. On note g_l l'accélération de la pesanteur à la surface de la Lune. En l'absence d'atmosphère, on peut considérer qu'il n'y a aucune force de frottement.

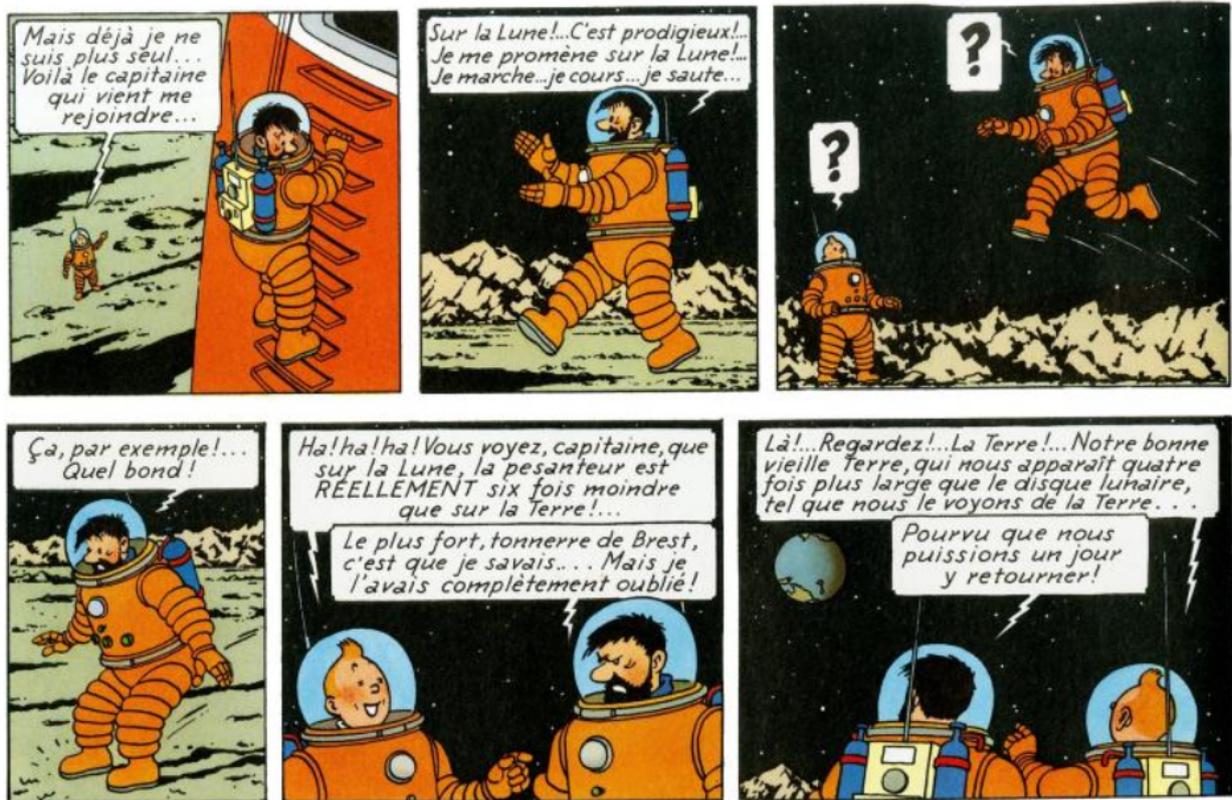


Figure 4: Extrait de *On a marché sur la Lune*.

- Définir le système et le référentiel dans lequel on étudie son mouvement.
 - Choisir un repère adapté à l'étude du mouvement.
 - Etablir un bilan des forces détaillé et en déduire les équations du mouvement.
- Déterminer l'expression de la distance horizontale parcourue au cours du saut en fonction de v_0 , α et g_l .

3. Sur la Lune, la pesanteur est environ six fois moins forte que sur la Terre. Quelle est la distance horizontale parcourue par le capitaine sur la Lune, si elle correspond à un saut de $d = 1.5$ m sur la Terre ?

4 Expérience de Cavendish

Cet exercice est une résolution de problème et nécessite une certaine prise d'initiative : il faut modéliser le système de manière simplifiée et choisir un référentiel et un système de coordonnées appropriés pour résoudre le problème. On rappelle que le couple Γ exercé par un fil de constante de torsion C et tordu avec un angle α est donné par $\Gamma = C\alpha$.

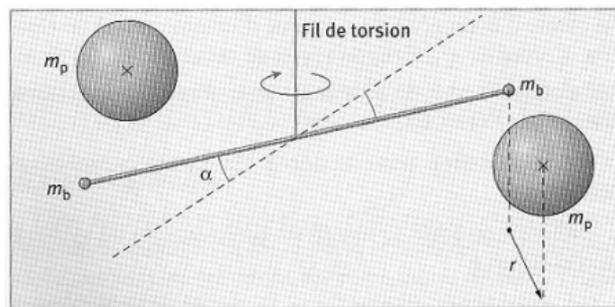


Figure 5: Schéma de l'expérience de Cavendish.

En 1798, Henry Cavendish utilise un pendule de torsion pour mesurer la masse de la Terre et déterminer sa densité. Ses mesures permettent de déterminer la valeur de la constante de gravitation universelle G (qui n'avait pas encore été définie à l'époque).

Il accroche tout d'abord une boule de plomb de masse $m_b = 730$ g à chacune des deux extrémités d'une tige en bois de longueur $L = 2.0$ m et de masse négligeable. Il suspend ce système à un fil de torsion de constante C . L'expérience se déroule en deux temps :

- dans un premier temps, il fait osciller librement le pendule de torsion et mesure la période des oscillations. Il trouve $T = 7.0$ min.
- Il approche ensuite deux boules de plomb de diamètre 30 cm et de masse $m_p = 158$ kg à une distance $r = 22.5$ cm. Il mesure un décalage de la position d'équilibre qui correspond à une torsion d'angle $\alpha_{eq} = 0.053^\circ$.

Expliquer pourquoi l'expérience de Cavendish fait intervenir des forces gravitationnelles, et déterminer la valeur de G .

5 Trou noir

En 1783, le physicien britannique John Michell eut pour la première fois l'idée de l'existence d'astres dont la gravitation serait si forte que même la lumière ne pourrait s'en échapper. L'idée fut reprise par Pierre-Simon Laplace en 1796, puis oubliée car elle semblait trop abstraite. Elle ressurgit en 1916 dans le cadre de la relativité générale lorsque Karl Schwarzschild vit apparaître un tel objet dans les solutions des équations d'Einstein, que l'on peut voir comme l'analogie relativiste du principe fondamental de la dynamique. Ce concept fut développé par la suite, et la dénomination de trou noir s'est imposée dans les années 1960. On pense aujourd'hui en avoir détecté plus d'une centaine, mais comme rien ne peut s'échapper d'un trou noir la détection ne peut être qu'indirecte.

Cet exercice propose de calculer l'ordre de grandeur de la taille et de la densité d'un trou noir dans un modèle de physique classique newtonienne (même si en pratique on devrait prendre en compte la théorie de la relativité pour étudier ce genre d'objet).

Considérons pour cela un point matériel M de masse m à proximité d'un astre sphérique de masse m_0 , de rayon R et de centre O . Cet astre est supposé suffisamment massif pour que l'on puisse considérer que M n'est soumis qu'à la force gravitationnelle due à l'astre. On étudie le mouvement de M dans le référentiel \mathcal{R} astrocentrique, que l'on suppose galiléen.

1. Exprimer la force gravitationnelle ressentie par M ainsi que l'énergie potentielle dont elle dérive en la supposant nulle à l'infini. Exprimer l'énergie mécanique de M . Celle-ci se conserve-t-elle ?
2. Montrer que le mouvement de M est nécessairement plan. M étant alors repéré par ses coordonnées polaires, montrer que $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement.
3. Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r) \quad (2)$$

en introduisant l'énergie potentielle effective $E_{p,eff}(r)$ dont on précisera l'expression en fonction de r .

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de $E_{p,eff}(r)$. À l'aide d'un raisonnement graphique, déterminer pour quelles valeurs de E_m le point M peut échapper à l'attraction d'un astre, c'est-à-dire se trouver dans un état de diffusion.
5. En déduire la vitesse de libération v_{lib} à la surface de cet astre.

6. Un trou noir est un astre dont le champ gravitationnel empêche tout objet de s'échapper. Sachant qu'aucun objet ne peut se déplacer plus vite que la lumière c , quelle condition simple sur la vitesse de libération peut-on utiliser pour déterminer si un astre est un trou noir ?
7. Déterminer le rayon de Schwarzschild R_S de l'astre, c'est-à-dire le rayon maximal qu'il doit avoir pour être un trou noir.
8. Application numérique : le trou noir situé au centre de notre galaxie, la voie lactée, est Sagittarius A. Sa masse est $M_{TN} = 4.3 \times 10^6 M_S$ où M_S est la masse du soleil ($M_S = 2.0 \times 10^{30}$ kg). Calculer son rayon maximal.
9. Quel rayon devrait avoir le Soleil pour qu'il devienne un trou noir ?

III - Champ gravitationnel

6 Lignes de champ et équipotentielles

On considère différents systèmes. Pour chacun d'entre eux, tracer les lignes de champ gravitationnel et les équipotentielles. (Remarque : en général, il est plus facile de commencer par les équipotentielles).

1. Une masse ponctuelle M , par exemple la Terre ;
2. Deux masses ponctuelles, dont une plus importante que l'autre (exemple : la Terre et la Lune) ;
3. Trois masses ponctuelles, dont l'une est beaucoup plus importante que les deux autres (exemple : Mars et ses deux lunes Phobos et Deimos). Les deux masses plus petites sont placées à égale distance de la masse ponctuelle initiale.

Remarque : la solution aux deux premières questions est déjà dans le cours. Essayez de la retrouver par vous-même.

7 Les marées

Dans cet exercice, nous nous intéressons au phénomène des marées : on constate que le niveau des océans varie au cours de la journée. Nous allons supposer que la planète est entièrement recouverte de l'océan.

On considère la lune située au point L et assimilée à une masse ponctuelle M_L . On note $R_T = 6380 \text{ km}$ le rayon terrestre.

On souhaite calculer le champ gravitationnel créé par la lune en un point de la surface de la Terre, P , en fonction de sa position repérée par un angle θ comme indiqué sur le schéma (figure 7).

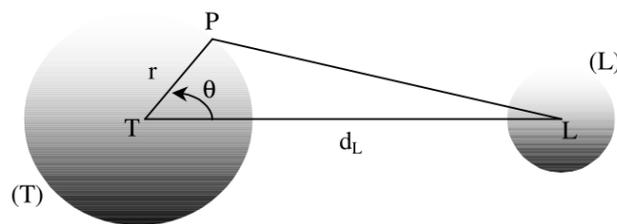


Figure 6: Schéma définissant les points et variables du problème. Source : Poly d'exercices de Olivier Granier.

On donne :

- $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$
- $M_L = 7,3 \times 10^{22} \text{ kg}$
- $R_T = 6380 \text{ km}$
- $d_L = 3,8 \times 10^5 \text{ km}$

1. Donner une explication qualitative du phénomène des marées.
2. Nous allons maintenant essayer de faire une prédiction quantitative des marées (période et amplitude). Proposer un argument simple pour choisir de raisonner en termes de potentiel gravitationnel que de champ gravitationnel.

3. (a) Calculer le potentiel gravitationnel au point P en fonction de la distance $d = PL$.
 (b) En construisant deux triangles rectangles, montrer que :

$$d^2 = d_L^2 - 2rd_L \cos \theta + r^2 \quad (3)$$

- (c) En déduire le développement limité suivant, au second ordre en r/d_L :

$$\frac{1}{d} \approx \frac{1}{d_L} \left(1 + \frac{r}{d_L} \cos \theta + \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) \left(\frac{r}{d_L} \right)^2 \right) \quad (4)$$

- (d) En déduire l'expression du potentiel gravitationnel créé par la lune en fonction de r , θ et d_L .
4. On cherche maintenant à calculer le champ des marées défini comme la différence entre le champ gravitationnel créé par la lune à la surface de la Terre (au point P) et au centre de la Terre (au point T).
- (a) Exprimer le champ gravitationnel créé par la lune au point T d'abord en fonction de \vec{e}_x , puis en fonction de \vec{e}_r et \vec{e}_θ
- (b) Calculer la composante selon \vec{e}_r du champ gravitationnel créé par la lune au point P . On rappelle l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \quad (5)$$

- (c) En déduire l'anomalie de champ gravitationnel selon \vec{e}_r définie par :

$$C(\theta) = (\vec{\mathcal{G}}(P) - \vec{\mathcal{G}}(T)) \cdot \vec{e}_r \quad (6)$$

- (d) Tracer la fonction $C(\theta)$. Sachant que le mouvement de rotation entre la Terre et la Lune est d'environ 25 h, en déduire le temps qui sépare une marée haute d'une marée basse. Ceci correspond-il aux observations ?

5. Nous voulons maintenant savoir si notre modèle permet d'expliquer la hauteur des marées.

- (a) Identifier le terme qui représente les marées dans l'expression du potentiel gravitationnel établie en 2d. Quelle est l'amplitude de la variation de ce potentiel entre la marée haute et la marée basse ?
- (b) En égalant cette variation avec la variation du potentiel de pesanteur de la surface des océans, en déduire la variation de hauteur d'eau correspondante.
- (c) Cela correspond-il aux observations du marégraphe de Pointe-à-Pitre ?

Remarque : En réalité, la hauteur des marées dépend fortement de l'endroit où on se trouve. Le calcul que l'on a fait marche relativement bien pour la Guadeloupe car il s'agit d'une île qui perturbe peu l'écoulement à l'échelle planétaire. Mais les continents empêchent l'eau de s'écouler de l'Est vers l'Ouest et amplifient les marées près des côtes. Ainsi, à certains endroits du globe comme au Canada ou en Bretagne, les marées peuvent atteindre jusqu'à 15 m.

Pour en savoir un peu plus sur les marées sans équations : lien vers un podcast de l'astrophysicienne Fatoumata Kebe sur Cahier de Prépa.

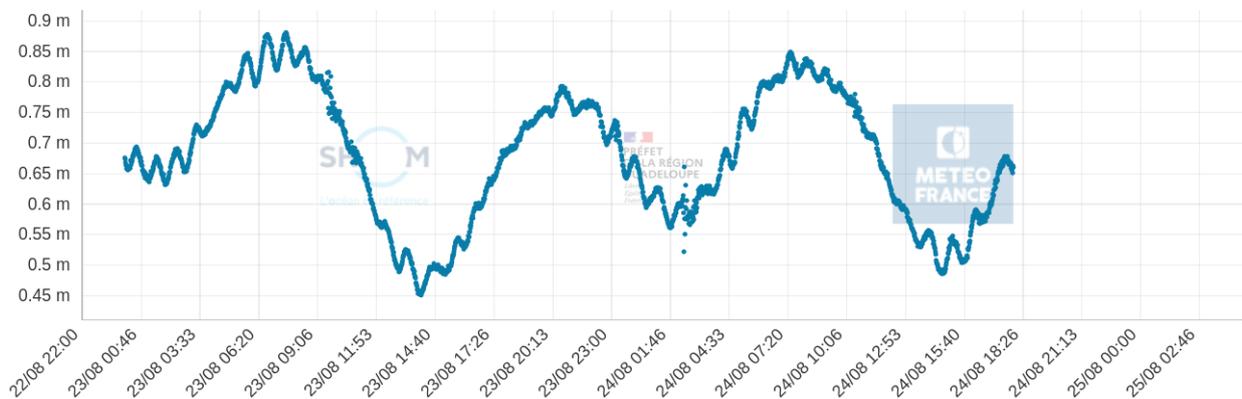


Figure 7: Données du marégraphe de Pointe-à-Pitre en août 2025. Source : SHOM (Service Hydrographique et Océanographique de la Marine française).