

DM2 - Correction

I - Préliminaire

1. La vitesse de glissement est la vitesse du solide 1 au niveau du point de contact, dans le référentiel du solide 2. C'est aussi la différence des deux vitesses dans un référentiel quelconque :
- $$\vec{v}_g = \vec{v}(I \in S_1) - \vec{v}(I \in S_2)$$

Elle ne dépend pas du référentiel d'étude.

2. On passe de l'adhérence au glissement lorsque la condition d'adhérence n'est plus vérifiée, donc lorsque $\|\vec{T}\| > f_s \|\vec{N}\|$.

3. On passe du glissement à l'adhérence lorsque :

- * il n'y a plus de mouvement de glissement ($\vec{v}_g = \vec{0}$)
- * et la condition d'adhérence est satisfaite : $\|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\|$

II - Mesure de coefficient de frottement dynamique

4. Dans une première phase, le fil est tendu, le solide 2 descend et le solide 1 avance.

Dans une seconde phase, le solide 2 est au sol, le fil n'est plus tendu et le solide 1 continue à avancer puis s'arrête à cause des frottements.

- 5.6. On se place dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen.

Le solide 1 est soumis à :

- * son poids $\vec{P}_1 = M\vec{g} = +Mg\vec{e}_2$
- * la réaction de la table S : $\vec{R}_1 = \vec{N}_1 + \vec{T}_1$
- * la tension du fil $+F\vec{e}_x$

On projette le PFD sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$:

$$\begin{cases} M\ddot{X} = F - \|\vec{T}_1\| \\ 0 = Mg - \|\vec{N}_1\| \end{cases}$$

De plus $\|\vec{T}_1\| = f_g \|\vec{N}_1\|$ par la loi de Coulomb car on a glissement. On conclut: $M\ddot{X} = F - f_g Mg$

On applique de même le PFD selon $\vec{e}_y$ au solide 2 soumis à:

- * son poids $\vec{P}_2 = \alpha Mg \vec{e}_y$
- * la tension du fil $-F \vec{e}_y$

Ainsi: $\alpha M \ddot{Z} = -F + \alpha Mg$

7. Le fil reste tendu donc les deux solides se déplacent à la même vitesse: $\dot{X} = \dot{Z}$ donc $\ddot{X} = \ddot{Z}$.

Ainsi: $\alpha M \ddot{Z} = \alpha M \ddot{X}$ et donc:

$$\alpha F - \alpha f_g Mg = -F + \alpha Mg$$

D'où: $F = \frac{\alpha Mg}{1+\alpha} (1 + f_g)$

Ainsi: $M\ddot{X} = \left[\frac{\alpha}{1+\alpha} (1 + f_g) - f_g \right] Mg$

On envoie: $\ddot{X} = \frac{\alpha - f_g}{1+\alpha} g$

D'où: $\dot{X}(t) = \frac{\alpha - f_g}{1+\alpha} g t$

Et $X(t) = \frac{\alpha - f_g}{1+\alpha} \cdot \frac{gt^2}{2} + X_0$. La phase s'arrête lorsque $\dot{X} = 0$
 $X(t) = X_0 + H_0$

et on a alors: $\frac{\alpha - f_g}{1+\alpha} \cdot \frac{gt_1^2}{2} = H_0$

D'où: $t_1 = \sqrt{\frac{2H_0}{g} \cdot \frac{1+\alpha}{\alpha - f_g}}$

On a alors: $V_1 = \dot{X}(t_1) = \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{1 + \alpha} \cdot g \cdot \sqrt{\frac{2H_0}{g} \cdot \frac{1 + \alpha}{\alpha - \frac{1}{2}}}$

D'où:

$$V_1 = \sqrt{2gH_0 \cdot \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{1 + \alpha}}$$

8. Dans cette seconde phase, le solide 1 n'est plus soumis à la tension du fil, le PFD appliqué en Q.5 dev:

$$M\ddot{X} = -\frac{1}{2}Mg \quad \text{donc} \quad \ddot{X} = -\frac{1}{2}g$$

Ainsi en intégrant de t_1 à t :

$$\dot{X}(t) = \dot{X}(t_1) - \frac{1}{2}g(t - t_1) = V_1 - \frac{1}{2}g(t - t_1)$$

$$\text{(ou encore } \dot{X}(t) = \sqrt{2gH_0 \cdot \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{1 + \alpha}} - \frac{1}{2}g(t - \sqrt{\frac{2H_0}{g} \cdot \frac{1 + \alpha}{\alpha - \frac{1}{2}}}) \text{)}$$

On a alors:

$$X(t) = \underbrace{X_0 + H_0}_{X(t=t_1)} + V_1(t - t_1) - \frac{1}{2}g \frac{(t - t_1)^2}{2}$$

9. On a arrêt du solide lorsque $\dot{X}(t) = 0$ donc lorsque $(t - t_1)\frac{1}{2}g = V_1$, alors:

$$X(t) = X_0 + H_0 + \left(t - \frac{V_1^2}{\frac{1}{2}g}\right) - \frac{1}{2}g \left(\frac{V_1^2}{\frac{1}{2}g}\right)^2$$

$$= X_0 + H_0 + \frac{V_1^2}{\frac{1}{2}g} = X_0 + H_0 + \frac{2gH_0(\alpha - \frac{1}{2})}{2\frac{1}{2}g(1 + \alpha)}$$

On $X(t) = X_0 + D$ lors de l'arrêt donc:

$$D = H_0 + \frac{H_0}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{1 + \alpha}$$

$$\frac{1}{2} (1+\alpha) (D-H_0) = H_0 (\alpha - \frac{1}{2})$$

$$\frac{1}{2} [H_0 + (1+\alpha)(D-H_0)] = \alpha H_0$$

Et donc :

$$\boxed{\frac{1}{2} = \frac{\alpha H_0}{H_0 + (1+\alpha)(D-H_0)}}$$

10. On applique le théorème de l'énergie cinétique aux solides B2 entre le début et la fin de la phase 1. Le système {solide 1 + fil + solide 2} est soumis à :

- * le poids du solide 1 et la réaction normale $\vec{N}_1$ qui ne travaillent pas car le solide a un mouvement horizontal

- * le poids du solide 2 (force conservative)

- * la force de frottement non conservative (travail W_f).

⚠ Attention ! Les forces de tension sont des forces internes au système choisi donc ne sont pas à prendre en compte.

On a alors : $\Delta(E_c + E_p) = W_f$

Or : $\Delta E_c = \frac{1}{2} (M + \alpha M) V_1^2 = \frac{1+\alpha}{2} M V_1^2$

$\Delta E_p = -\alpha M g H_0$

et $W_f = - \int \vec{T}_1 \cdot d\vec{r}$ où l'intégrale est calculée sur la trajectoire du solide 1

$= - \vec{T}_1 \cdot (X(t_1) - X_0) \vec{e}_x$ car $\vec{T}_1$ est constante

$= - (\frac{1}{2} M g \vec{e}_x) \cdot H_0 \vec{e}_x$

$= - \frac{1}{2} M g H_0$

D'où :

$\frac{1+\alpha}{2} M V_1^2 - \alpha M g H_0 = - \frac{1}{2} M g H_0$

On applique à nouveau le théorème au solide 1 lors de la seconde phase, la seule force qui travaille est la force de frottement, on note son travail W_2 : $\Delta E_c = W_2$

Or $\Delta E_c = -\frac{1}{2} M V_1^2$

et $W_2 = -\int_{H_0}^{D-H_0} M g \cdot \underbrace{(D-H_0)}_{\substack{\text{distance parcourue} \\ \text{lors de la 2}^{\text{e}} \text{ phase}}}$ de manière analogue au cas précédent

Ainsi:
$$\begin{cases} -\frac{1}{2} M V_1^2 = \int_{H_0}^{D-H_0} M g (D-H_0) \\ \frac{1+\alpha}{2} M V_1^2 = (\alpha - \int_{H_0}^{D-H_0}) M g H_0 \end{cases}$$

Donc: $(\alpha - \int_{H_0}^{D-H_0}) H_0 = (1+\alpha) \int_{H_0}^{D-H_0} (D-H_0)$

On retrouve l'équation trouvée en Q.9, la suite du calcul est la même et:
$$\int_{H_0}^{D-H_0} = \frac{\alpha H_0}{H_0 + (1+\alpha)(D-H_0)}$$

II. On a $\alpha = \frac{60}{50} = 1,2$ et $H_0 = 0,4 \text{ m}$; $D = 1,5 \text{ m}$.
L'application numérique donne: $\boxed{\int_{H_0}^{D-H_0} = 0,17}$