

DM1 - Correction

1. On travaille dans le référentiel terrestre galiléen.

Système : solide M.

Bilan des forces :

- * poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- * force de rappel $\vec{F} = -k(l-l_0)\vec{e}_x$
- * réaction $\vec{R}$ du support

Comme il n'y a pas de frottements $\vec{R}$ est normale à la surface de contact. Ainsi le PFD projeté selon $\vec{e}_x$ donne :

$$m\ddot{x} = -k(l-l_0) = -kx$$

Sait $\boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$

2. On a $E_{p,el} = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 = \boxed{\frac{1}{2}kx^2}$ (cour).

3. $E_m = E_c + E_{p,el} = \boxed{\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2}$

Toujours dans RT galiléen, on applique le théorème de l'énergie mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = \sum P(\vec{F}_{nc}) = P(\vec{R}) = 0$$

la réaction du support est non conservative

car $\vec{R} \cdot \vec{v} = 0$
car $\vec{R}$ est selon la verticale

Donc l'énergie mécanique est conservée.

4. On a donc $\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) = 0$

$$\Leftrightarrow m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

On retrouve bien la même équation.

5. On note $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

Alors la solution générale est :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

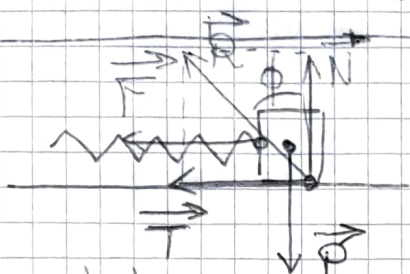
et on a donc $\dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$

Or $x(0) = A = x_0$ et $\dot{x}(0) = B\omega_0 = \dot{x}_0$

Donc $A = x_0$, $B = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}$ et :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

6.



(On a supposé ici $\dot{x} > 0$)

Le solide est toujours soumis aux mêmes forces mais la réaction du support n'est plus normale.

On a une composante tangentielle $\vec{T}$.

Comme M est en mouvement on a glissement et :

$$\|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\|$$

D'où : $\tan \phi = f$ soit

$$\phi = \arctan(f)$$

7. On est d'abord en condition d'adhérence. Dans ce cas, $\vec{T}$ s'oppose au mouvement (elle est opposée à $\vec{F}$) et peut empêcher le mouvement tant que $\|\vec{T}\| = \|\vec{F}\| = k|x_0|$.

Or la condition d'adhérence est $\|\vec{T}\| < f \|\vec{N}\|$

Et en appliquant le PFD à M dans le référentiel terrestre galiléen projeté selon $\vec{e}_y$ il vient $\|\vec{N}\| = mg$.

La condition d'adhérence devient $k|x_0| < fmg$

La masse démarre si cette condition n'est pas satisfaite, c'est-à-dire si :

$$|x_0| \geq \frac{fmg}{k}$$

La position finale doit satisfaire la condition d'adhérence

$$\text{et } |x_f| < \frac{fmg}{k}$$

8. On a vu qu'en cas de glissement $\|\vec{T}\| = \|\vec{F}\| = fmg$
Or la force de frottement s'oppose au glissement des objets donc

on a forcément $\boxed{\vec{F}_f = -E \int m g \vec{e}_x}$ avec E défini dans l'énoncé.

On applique le PFD comme en Q.1 mais avec cette force supplémentaire pour trouver:

$$\boxed{m\ddot{x} + kx + E \int m g = 0}$$

9. On a, lors de cette phase $x < 0$ car la masse va partir vers sa position initiale, ainsi:

$$m\ddot{x} + kx = \int m g$$

Solution générale de l'équation homogène: $x = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

Solution particulière: $x = \frac{\int m g}{k}$

Donc la solution de l'équation est de la forme:

$$x = \frac{\int m g}{k} + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

$$\text{Or } x(t=0) = \frac{\int m g}{k} + A = x_0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(t=0) = \omega_0 B = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{\int m g}{k} + \left(x_0 - \frac{\int m g}{k}\right) \cos(\omega_0 t)}$$

Cette solution est valable tant que $x < 0$. x devient nul pour la première fois lorsque $\omega_0 t_1 = \pi$ soit $\boxed{t_1 = \frac{\pi}{\omega_0}}$

$$\text{On a alors } \boxed{x_1 = x(t_1) = -x_0 + \frac{2 \int m g}{k}}$$

10. La seconde étape est similaire mais de sens opposé ($x > 0$).

On remarque que t_1 est indépendant de x_0 , ainsi t_2 l'est également et $t_2 - t_1 = \frac{\pi}{\omega_0}$.

La période du mouvement est donc: $\boxed{T = t_2 = \frac{2\pi}{\omega_0}}$

Elle est identique à la période des oscillations propres.

11. On a:
$$W_{1 \rightarrow 2}(\vec{F}_f) = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_f \cdot d\vec{l} = \vec{F}_f \cdot (x_2 - x_1) \vec{e}_x$$

constante

Or $x > 0$ donc $\vec{F}_f = -f mg \vec{e}_x$ et :

$$W = -f mg (x_2 - x_1)$$

On applique le théorème de l'énergie mécanique à la masse entre x_1 et x_2 :

$$\Delta E_m = \sum W(\vec{F}_{nc}) = W(\vec{F}_f) + \underbrace{W(\vec{N})}_{=0}$$

$$= W(\vec{F}_f)$$

Or : $E_c = 0$ en x_1 et x_2 (ce sont des positions où $\dot{x} = 0$)

$$E_p(x_1) = \frac{1}{2} k x_1^2 ; E_p(x_2) = \frac{1}{2} k x_2^2$$

D'où :

$$\Delta E_m = \Delta E_p = \frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2)$$

$$= \frac{1}{2} k (x_2 + x_1) (x_2 - x_1)$$

Ainsi $\frac{1}{2} k (x_2 - x_1) (x_2 + x_1) = -f mg (x_2 - x_1)$

On en déduit :

$$x_2 = -x_1 - \frac{2f mg}{k}$$

$$x_2 = x_0 - \frac{4f mg}{k}$$

2. On constate :

$$|x_0| = x_0$$

$$|x_1| = x_0 - \frac{2f mg}{k}$$

$$|x_2| = x_0 - \frac{4f mg}{k}$$

etc...

On perd une amplitude $\frac{2f mg}{k}$ à chaque oscillation, on a donc une décroissance linéaire.

On a $x_{\max} = x_0 - \alpha \cdot t$

À $t = t_1 = \frac{\pi}{\omega_0}$ on a $\alpha t_1 = \frac{2f mg}{k}$

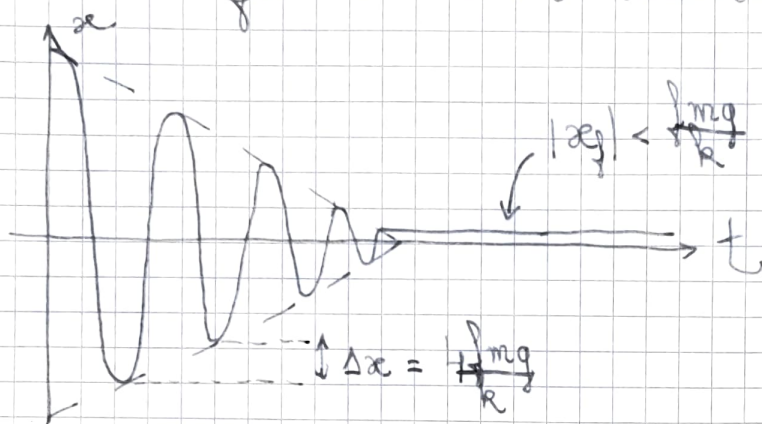
D'où :

$$\alpha = \frac{2f mg}{k t_1} = \frac{2f mg \omega_0}{k} = \frac{2f \cdot g}{\pi \omega_0}$$

Soit :

$$x_{\max} = x_0 - \frac{2f g}{\pi \omega_0} \cdot t$$

13. En cas de frottements solides : décroissance linéaire



La position finale d'équilibre n'est pas forcément $x=0$.

En cas de frottements fluides : décroissance exponentielle

