

Corrigé - DS 7
Type Centrale

I - Le chlorure de sodium

I.A.1.a. L'eau de mer contient de nombreux sels différents (NaCl , MgCl_2 etc...) donc le chlorure de sodium n'est qu'un sel parmi les autres et sa concentration massique est inférieure à la salinité.

I.A.1.b. Le phénomène d'évaporation correspond à la réaction chimique :



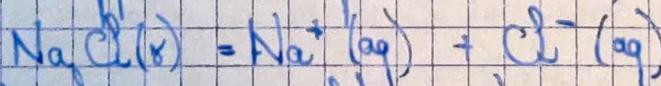
La réaction est endothermique (consomme de l'énergie) donc est favorisée par le soleil. De plus : $K^\circ(T) = \frac{P_{\text{H}_2\text{O}}^{\text{ég}}}{P^\circ}$ donc la

réaction est favorisée si la pression partielle en H_2O juste au-dessus du liquide est faible, ce qui est favorisé lorsque l'air est renouvelé régulièrement donc lorsqu'il y a du vent.

I.A.2. On note C_{NaCl} la concentration massique, alors :

$$[\text{NaCl}] = \frac{C_{\text{NaCl}}}{M_{\text{Na}} + M_{\text{Cl}}} = \frac{27,2}{23,0 + 35,5} = \boxed{0,465 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}$$

I.A.3.a. Lors de l'apparition du premier cristal, on a l'équilibre :



avec tout le sel encore en solution, et sa concentration molaire C_m^{sat} vaut : $C_m^{\text{sat}} \cdot [\text{Na}^+] = [\text{Cl}^-]$. D'où :

$$K_s(25^\circ\text{C}) = \left(\frac{C_m^{\text{sat}}}{C^\circ}\right)^2 \quad \text{soit} \quad C_m^{\text{sat}} = C^\circ \cdot \sqrt{K_s} = 6,00 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

À partir d'une solution à $27,2 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ (soit $0,465 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} = C_m^\circ$) on aura saturation pour $C_m = C_m^{\text{sat}}$ soit :

$$\frac{C_m^\circ \times V_{\text{initial}}}{V_{\text{limite}}} = C_m^{\text{sat}} \quad \text{d'où} : \frac{V_{\text{limite}}}{V_{\text{initial}}} = \frac{C_m^\circ}{C_m^{\text{sat}}} \quad \text{soit} :$$

$$\frac{V_{\text{initial}} - V_{\text{limite}}}{V_{\text{initial}}} = 1 - \frac{C_{\text{mg}}^{\circ}}{C_{\text{sat}}^{\circ}} = \boxed{92,3\%}$$

I.A.3.b. Pour que 80% du sel précipite, il faut que la solution soit tout juste saturée lorsque 20% du sel reste soit :

$$\frac{0,2 \times C_{\text{m}}^{\circ} \times V_{\text{initial}}}{V_{\text{final}}} = C_{\text{m}}^{\text{sat}} \quad \text{d'où} \quad \frac{V_{\text{final}}}{V_{\text{initial}}} = \frac{0,2 C_{\text{m}}^{\circ}}{C_{\text{m}}^{\text{sat}}} \quad \text{et} :$$

$$\frac{V_{\text{initial}} - V_{\text{final}}}{V_{\text{initial}}} = 1 - 0,2 \frac{C_{\text{m}}^{\circ}}{C_{\text{m}}^{\text{sat}}} = \boxed{98,5\%}$$

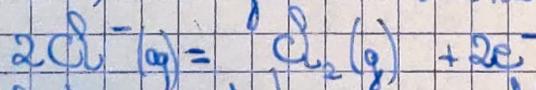
Si on évapore par toute l'eau, on peut garder en solution les espèces autres que $\text{NaCl}(s)$ qui sont moins concentrées.

I.a.3.c. En réalité, à la limite de précipitation on a :

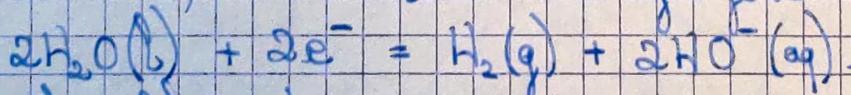
$$K_{\text{p}}(25^{\circ}\text{C}) = \frac{[\text{Na}^+][\text{Cl}^-]}{C^{\circ 2}} = \frac{C_{\text{m}}^{\text{sat}}}{C^{\circ}} \times \frac{C_{\text{m}}^{\text{sat}} + 2[\text{MgCl}_2]}{C^{\circ}}$$

car la solution contient aussi des ions chlorure issus du magnésium. On aura donc une valeur de $C_{\text{m}}^{\text{sat}}$ inférieure à l'équilibre, ce qui indique que la précipitation se fait pour une solution moins concentrée donc un pourcentage de diminution volumique plus faible : c'est l'effet d'ion commun.

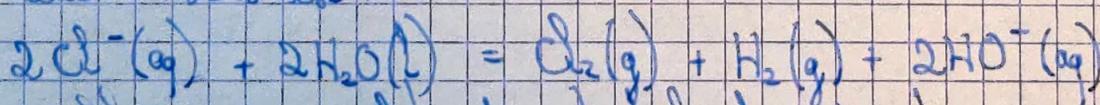
I.B.1. Sur l'anode, on oxyde les ions chlorure en dichlore :



À la cathode, on réduit l'eau en dihydrogène :



La réaction bilan est :



I.B.2. À l'équilibre on a égalité des potentiels de Nernst, ainsi :

$$E = E^{\circ}(\text{Cl}_2/\text{Cl}^-) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{a(\text{Cl}_2)}{a(\text{Cl}^-)^2} \right)$$

$$= E^{\circ}(\text{H}^+/\text{H}_2) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{a(\text{H}^+)^2}{a(\text{H}_2)} \right)$$

$$\text{Ainsi: } -E^\circ(\text{Cl}_2/\text{Cl}^-) + E^\circ(\text{H}^+/\text{H}_2) = 0,03 \log \left(\frac{a(\text{Cl}_2) a(\text{H}_2)}{a(\text{Cl}^-)^2 a(\text{H}^+)^2} \right)$$

$$\text{De plus par propriété de l'eau: } \frac{a(\text{H}^+) a(\text{HO}^-)}{a(\text{H}_2\text{O})} = K_e = 10^{-14}$$

Donc:

$$-E^\circ(\text{Cl}_2/\text{Cl}^-) + E^\circ(\text{H}^+/\text{H}_2) = 0,03 \log \left(K_e^{-2} \times \frac{a(\text{Cl}_2) a(\text{H}_2) a(\text{H}_2\text{O})^2}{a(\text{Cl}^-)^2 a(\text{H}_2\text{O})^2} \right)$$

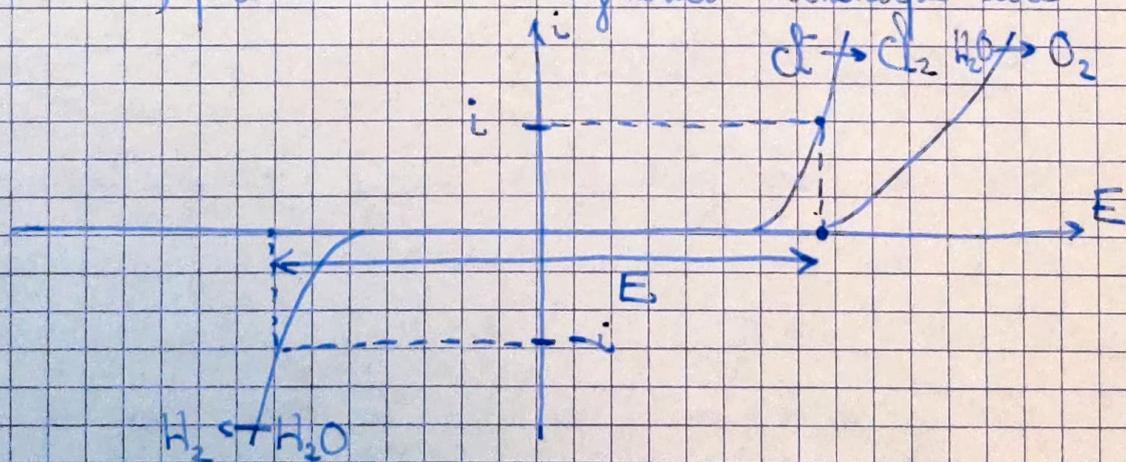
$= K^\circ(T)$ constante de réaction

$$\text{Soit } K^\circ(T) \equiv K_e^2 \times 10^{\frac{E(\text{H}^+/\text{H}_2) - E(\text{Cl}_2/\text{Cl}^-)}{0,03}} = 10^{-28} \times 10^{-45,3}$$

$$K^\circ(T) \approx 4,6 \cdot 10^{-74}$$

Cette réaction n'est pas spontanée. L'électrolyse permet de faire cette réaction, en apportant du travail électrique qui va être converti en enthalpie libre, permettant ainsi d'augmenter l'enthalpie libre.

II.B.3.



E est la tension à appliquer pour avoir une intensité i . Si on applique une tension trop forte, on va produire du dioxygène au lieu du dichlore à l'anode.

II.B.4. On a $E^\circ(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) < E^\circ(\text{Cl}_2/\text{Cl}^-)$ donc thermodynamiquement l'oxydation de l'eau devrait être favorisée. Mais la surtension à vide anodique de ces couples sur électrode de ruthénium permet de renverser l'ordre des potentiels à partir desquels la vitesse de réaction

est non nulle. Avec un autre métal, on n'aurait probablement pas cet effet.

I.B.5. La charge totale d'électrons à faire circuler est telle que :

$$\underbrace{2F}_{\substack{\text{charge ayant} \\ \text{servi à produire } Cl_2 \\ (2e^- \text{ par molécule})}} = q \times \eta_F \leftarrow \text{rendement faradique}$$

\swarrow charge ayant traversé le circuit

De plus par la loi des gaz parfaits, à $P^\circ = 1 \text{ bar}$ et à la température T :

$$P^\circ \cdot V = n \cdot RT$$

D'où : $q = \frac{2F}{\eta_F} \times \frac{P^\circ V}{RT}$. Enfin l'énergie consommée est :

$$W_e = q \cdot E = \frac{2FE}{\eta_F} \cdot \frac{P^\circ V}{RT} = \frac{2 \times 96500 \times 3,5 \times 10^5 \times 1}{0,75 \times 8,314 \times 298} = \boxed{36 \text{ MJ}}$$

I.B.6. Le potentiel de Nernst du couple Cl_2/Cl^- est donné par :

$$E_{\text{Nernst}} = E^\circ(Cl_2/Cl^-) + 0,03 \log \left(\frac{P_{Cl_2}}{P^\circ} \times \frac{C^{0,2}}{[Cl^-]^2} \right)$$

Si $[Cl^-]$ est trop faible alors E_{Nernst} va augmenter et l'oxydation de Cl^- se fera à des tensions voisines de l'oxydation de l'eau, ce qui va faire chuter le rendement faradique de l'électrolyse.

I.B.7. On calcule le nombre d'oxydation du chlore dans les 4 espèces en supposant celui de O égal à $-II$:

Espèce	$Cl_2(g)$	$Cl^-(aq)$	$HClO(aq)$	$ClO^-(aq)$
n.o. (Cl)	0	-I	+I	+I

D'où le diagramme de situation :

C: $HClO$	D: ClO^-
A: $Cl_2(g)$	
B: Cl^-	

On a utilisé le fait que $HClO/ClO^-$ est un couple acido-basique.

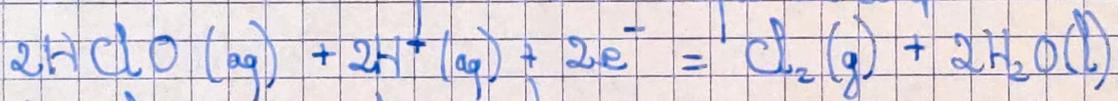
On peut remarquer que $\text{Cl}_2(\text{g})$ n'est pas stable pour $\text{pH} > 2,5$, il subit alors une disproportion. On veut donc éviter qu'il n'entre en contact avec des ions hydroxyde.

I.B.8. On peut écrire:

$$\text{pH} = \text{p}K_a(\text{HClO}/\text{ClO}^-) + \log \frac{[\text{ClO}^-]}{[\text{HClO}]}$$

À la frontière entre les deux domaines de prédominance on a $[\text{ClO}^-] = [\text{HClO}]$ donc $\text{pH} = \text{p}K_a(\text{HClO}/\text{ClO}^-) = \boxed{7,5}$

I.B.9. On écrit la demi-équation électronique du couple en milieu acide:



La formule de Nernst s'écrit:

$$E = E^\circ(\text{HClO}/\text{Cl}_2) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[\text{HClO}]^2 \cdot [\text{H}^+]^2}{c^{\circ 4}} \times \frac{P^\circ}{P_{\text{Cl}_2}} \right)$$

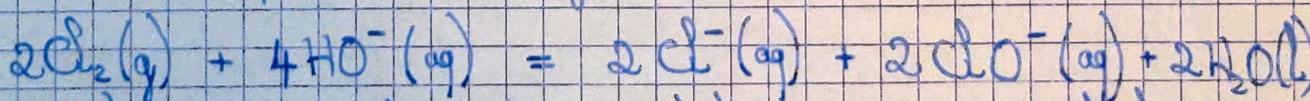
On suppose la pression de l'air égale à 1 bar donc $P_{\text{Cl}_2} = 1$ bar à la frontière, et $[\text{HClO}] = c_{\text{tra}}$ à la frontière, d'où:

$$E = E^\circ(\text{HClO}/\text{Cl}_2) + 0,06 \log \left(\frac{c_{\text{tra}}}{c^\circ} \right) - 0,06 \text{pH}$$

$$\text{À pH} = 0 \text{ on lit: } 1,57 \text{V} = E^\circ(\text{HClO}/\text{Cl}_2) + \underbrace{0,06 \log(10^{-1})}_{-0,06}$$

$$\text{D'où: } \boxed{E^\circ(\text{HClO}/\text{Cl}_2) = 1,63 \text{V}}$$

I.B.10. Le dichlore produit de l'hypochlorite et du chlorure:



Il s'agit d'une réaction de disproportion: Cl_2 oxydant d'un couple réagit avec Cl_2 réducteur d'un autre couple.

À l'équilibre:

$$\begin{aligned} E &= E^\circ(\text{Cl}_2/\text{Cl}^-) + 0,03 \log \left(\frac{a(\text{Cl}_2)}{a(\text{Cl}^-)^2} \right) \\ &= E^\circ(\text{HClO}/\text{Cl}_2) + 0,03 \times \log \left(\frac{a(\text{HClO})^2 a(\text{H}^+)^2}{a(\text{Cl}_2)} \right) \end{aligned}$$

De plus, toujours à l'équilibre, par la loi d'actions de masse :

$$K^{\circ}(T) = \frac{a(\text{Cl}^-)^2 a(\text{ClO}^-)^2}{a(\text{Cl}_2) a(\text{HO}^-)^4}$$

Où : $K_a = \frac{a(\text{ClO}^-) a(\text{H}^+)}{a(\text{HClO})}$ et $K_e = a(\text{H}^+) a(\text{HO}^-)$

Donc : $K^{\circ}(T) = \frac{a(\text{Cl}^-)^2 a(\text{HClO})^2}{a(\text{Cl}_2) a(\text{HO}^-)^4 a(\text{H}^+)^2} \times K_a^2 = \frac{a(\text{Cl}^-)^2 a(\text{HClO})^2 a(\text{H}^+)^2}{a(\text{Cl}_2)^2} \times \frac{K_a^2}{K_e^2}$

On conclut que :

$$-E^{\circ}(\text{HClO}/\text{Cl}_2) + E^{\circ}(\text{Cl}_2/\text{Cl}^-) = 0,03 \log \left(K^{\circ}(T) \times \frac{K_e^4}{K_a^2} \right)$$

D'où : $K^{\circ}(T) = \frac{K_a^2}{K_e^4} \times 10^{\frac{1}{0,03} (E^{\circ}(\text{Cl}_2/\text{Cl}^-) - E^{\circ}(\text{HClO}/\text{Cl}_2))}$

$$= \frac{10^{-2 \times 7,5}}{10^{-4 \times 14}} \times 10^{\frac{1,36 - 1,63}{0,03}} = \boxed{10^{32}}$$

I.B. 11. Soit un système stoechiométrique, avec n_0 mol de H_2 et de Cl_2 , la réaction se produisant est $\text{H}_2(\text{g}) + \text{Cl}_2(\text{g}) = 2\text{HCl}(\text{g})$.
L'enthalpie étant une fonction d'état on peut calculer la variation d'enthalpie sur le chemin suivant :

(1) Réaction à $T_0 = 298 \text{ K}$

(2) Chauffage de $\text{HCl}(\text{g})$ ($2n_0$ mol à chauffer).

La réaction étant la réaction standard de formation de HCl , multipliée par 2 : $\Delta H_1 = 2n_0 \Delta_f H^{\circ}(\text{HCl})$. ↙ capacité thermique molaire

De plus : $\Delta H_2 = 2n_0 \times C_{p,m}(\text{HCl}) \times (T_f - T_0)$

Enfin la réaction étant adiabatique, monochrone et monobare, le 1^{er} principe

donne $\Delta H = Q = 0$ et :

$$T_f = T_0 - \frac{\Delta_f H^{\circ}(\text{HCl})}{C_{p,m}(\text{HCl})} = \boxed{3170 \text{ K}}$$

À cette température la vitesse de réaction s'emballe (loi d'Arrhenius) et on peut avoir une explosion.

I.B.12. a. Le diaphragme joue le rôle de pont salin et empêche le contact non souhaité entre $\text{Cl}_2(\text{g})$ et $\text{H}_2(\text{g})$ et entre $\text{Cl}_2(\text{g})$ et $\text{HO}^\ominus(\text{aq})$.

I.B.12. b. Il y a une chute osmomique qui s'ajoute à la tension à imposer, ce qui diminue le rendement énergétique.

I.B.12. c. Les ions sodium et chlorure passent à travers le diaphragme donc on retrouve du sel $\text{NaCl}(\text{s})$ en solution dans la saumure ainsi produite.

II - De la cuisson des œufs

II.A.1. Au cours du chauffage, on porte le cuiseur et l'eau à la température T_{eb} , qui sont équivalents à une masse d'eau $m_c + m_o$. On suppose que les œufs restent à température ambiante pendant cette phase. Alors on applique le 1^{er} principe au système {cuiseur + œufs + eau + résistance}:

$$\Delta U = W + Q$$

$Q = 0$ car la transformation est adiabatique

$$W = W_{\text{elec}} = P \times \Delta t,$$

$$\Delta U = (m_c + m_o) c (T_{\text{eb}} - T_o).$$

D'où:

$$\Delta t_1 = \frac{c}{P} (m_c + m_o) (T_{\text{eb}} - T_o)$$

II.A.2. On a donc: $m_c = \frac{P \Delta t_o}{c (T_{\text{eb}} - T_o)} = m_o = -0,125 + \frac{350 \times 150}{4180 \times (100 - 20)}$

$$\text{D'où } m_c = 32 \text{ g}$$

II.B.1. Lors de la cuisson, l'eau du blanc et du jaune va se vaporiser et faire augmenter la pression dans la coquille au risque de la faire éclater. La pique permet d'éviter cette situation en faisant un trou.

I.B.2.a. On considère une couche sphérique de rayon r_0 et d'épaisseur dr , et on note $\Phi(r)$ le flux thermique sortant de la sphère de rayon r .

Le problème étant invariant par rotation autour de $O : T = T(r)$.

De flux en M est un point de l'espace, tous les plans contenant (OM) sont des plans de symétrie de la situation, donc \vec{j}_{th} est dans tous ces plans et $\vec{j}_{th} = j_{th}(r) \vec{e}_r$ où j_{th} est la densité de flux thermique.

On a alors $\Phi(r) = \oint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 j_{th}(r)$.

Or par la loi de Fourier $j_{th}(r) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$ donc $\Phi(r) = -4\pi r^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r}$

On applique le 1^{er} principe à la tranche pendant $dt : dU = \delta W + \delta Q$.

$\delta W = 0$ car la tranche est indéformable.

$\delta Q = dt(\Phi(r) - \Phi(r+dr)) = -dt dr \times \frac{\partial \Phi}{\partial r} = +4\pi r \lambda \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial T}{\partial r}) dr dt$

$dU = \underbrace{4\pi r^2 dr}_{\text{volume de la tranche}} \times \mu \times c \times (T(r, t+dt) - T(r, t))$

$= 4\pi r^2 \mu c \frac{\partial T}{\partial t} dr dt$

Ainsi on conclut que :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

II.B.2.b. On a alors $r = r_2 \times \rho$ et $\partial r = r_2 \times \partial \rho$

D'où : $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c} \times \frac{1}{r_2^2 \rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial T}{\partial \rho} \right)$

En posant $\theta = \frac{\mu c r_2^2}{\lambda}$ et $\tau = \frac{t}{\theta}$ on a bien :

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial T}{\partial \rho} \right)$$

$\theta \propto r_2^2$ ce qui est caractéristique des phénomènes de diffusion :

on a $r_2 \propto \sqrt{\theta}$ où θ est le temps caractéristique de diffusion.

I.B.3.a. On a alors
$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial z} = f(\rho) g'(z) \\ \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) = \frac{g(z)}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} (\rho^2 f(\rho)) \end{cases}$$

D'où :
$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{1}{\rho^2 f(\rho)} \times \frac{d}{d\rho} (\rho^2 f(\rho))$$

Le premier membre est indépendant de ρ et le second de z donc les deux sont égaux à une constante K , alors $\frac{1}{g(z)} \frac{dg}{dz} = K$.

Mais la température ne peut pas diverger donc $K < 0$ et on peut poser $A = \sqrt{-K} \in \mathbb{R}^+$, alors :

$$\boxed{\frac{1}{g(z)} \frac{dg}{dz} = -A^2}$$

On a alors :
$$\boxed{g(z) = g(0) e^{-A^2 z}}$$

II.B.3.b. On remarque que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} (\rho^2 f'(\rho)) &= \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{d}{d\rho} \left(\frac{F(\rho)}{\rho} \right) \right) = \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho^2}{\rho^2} (\rho F'(\rho) - F(\rho)) \right) \\ &= F''(\rho) + F'(\rho) + \rho F''(\rho) = \rho F''(\rho) \end{aligned}$$

D'où :
$$\frac{g'(z)}{g(z)} = -A^2 = \frac{1}{\rho^2 f(\rho)} \times (\rho F''(\rho)) = \frac{F''(\rho)}{F(\rho)}$$

Et donc $F''(\rho) + A^2 F(\rho) = 0$.

Or : $F(\rho=0) = \left(\rho f(\rho) \right)_{\rho=0} = 0$ et donc :

$$F(\rho) = F(0) \times \sin(A\rho)$$

On en déduit :
$$f(\rho) = \frac{F(\rho)}{\rho} = F(0) \times \frac{\sin(A\rho)}{\rho} = \boxed{AF(0) \times \text{sinc}(A\rho)}$$

II.B.3.c. On a alors :

$$\begin{aligned} T(\rho, z) &= T_{\text{ext}} + AF(0)g(0) \text{sinc}(A\rho) e^{-A^2 z} \\ &= T_{\text{ext}} + \frac{B}{\rho} \text{sinc}(A\rho) e^{-A^2 z} \quad \text{où } B = F(0)g(0). \end{aligned}$$

Cependant nous avons fait l'hypothèse que $T(p,t) = T_{ext} + f(p)g(z)$
 En réalité nous pourrions faire une décomposition en série de Fourier de la température initiale:

$$\rho(T(p,t=0) - T_{ext}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \times \sin(A_n \times p)$$

Alors chaque terme va contribuer à la solution selon l'équation établie précédemment, avec un coefficient B_n qui sera fonction de C_n et des conditions aux limites. On aura alors, par principe de superposition (l'équation de diffusion étant linéaire):

$$\rho(T(p,z) - T_{ext}) = \sum B_i \sin(A_i p) e^{-A_i^2 z}$$

D'où: $T(p,t) = T_{ext} + \sum B_i \frac{\sin(A_i p)}{\rho} e^{-A_i^2 z}$

Pour calculer A_i et B_i on va utiliser la condition initiale $T(p,t=0)$ et les conditions aux limites (continuité du flux en $r_1 = r_2$ et loi de Newton pour la conduction - convection).

I.B.4.a. On a continuité du flux thermique entrant dans l'œuf à l'interface. À l'extérieur de l'interface ce flux vaut:

$$\begin{aligned} \Phi_{ext} &= -h_0 (T(p=1,z) - T_{ext}) \times 4\pi r_2^2 \\ &= -h_0 \times B \sin(A) e^{-A^2 z} \times 4\pi r_2^2 \end{aligned}$$

À l'intérieur:

$$\begin{aligned} \Phi_{ext} &= +\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \times 4\pi r_2^2 = \frac{\lambda}{r_2} 4\pi r_2^2 \cdot \frac{\partial T}{\partial p} (p=1) \\ &= 4\pi r_2 \lambda \times \beta (A \cos(A) - \sin(A)) e^{-A^2 z} \end{aligned}$$

D'où: $-h_0 \sin(A) r_2 = \lambda (A \cos(A) - \sin(A))$

On en déduit: $-\frac{r_2 h_0}{\lambda} = \frac{A}{\tan A} \Leftrightarrow 1$ soit: $\boxed{\frac{A}{1 - \frac{r_2 h_0}{\lambda}} = \tan A}$

II.B.4.b. On a alors $\frac{r_2 h_0}{\lambda} = \frac{2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 1200}{0,6} = 50$ soit $\tan A = -\frac{A}{49}$

On peut alors supposer que $|\tan A| \ll |A|$ d'où $A \approx 0$ ou $A \approx \pi$.
 La première solution ne convient pas car au voisinage de 0 A et $\tan A$ ont même signe. En revanche si on note $A = \pi - \epsilon$ alors :

$$\tan(A) = \tan(\pi - \epsilon) = \tan(-\epsilon) \approx -\epsilon$$

$$\text{Et donc } \tan A = -\frac{A}{49} \Leftrightarrow -\epsilon \approx -\frac{A}{49} \Leftrightarrow \frac{\epsilon}{A} = \frac{1}{49} \approx 2\%$$

L'erreur relative commise est de l'ordre de $\boxed{2\%}$.

II.B.4.c. On a alors :

$$T(\rho, t) = T_{\text{ext}} + \pi B \sin(\pi \rho) e^{-\pi^2 z^2}$$

À la surface de l'œuf, $\rho = 1$ et donc $T(\rho, t) = T_{\text{ext}}$. Ceci revient à constater qu'il n'y a pas de discontinuité de température entre l'œuf et l'air, autrement dit la conduction-convection est très efficace. En reprenant II.B.4.a. on trouve :

$$h_c = \frac{\Phi_{\text{ext}}}{4\pi r_2^2 (T_{\text{ext}} - T(\rho=1, z))} = +\infty$$

II.B.4.d. Au centre de l'œuf à $t=0$: $T(\rho, z=0) = T_{\text{a}} + \pi B = T_0$.

On en déduit : $\pi B = T_0 - T_{\text{ext}}$ soit $\boxed{B = \frac{T_0 - T_{\text{ext}}}{\pi}}$

II.B.5.a. On a alors, à l'instant $\Delta t_2 = \tau_2 \times \theta$:

$$T_c = T_{\text{ext}} + (T_0 - T_{\text{ext}}) e^{-\pi^2 z_2^2}$$

D'où : $z_2 = \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{T_{\text{ext}} - T_0}{T_{\text{ext}} - T_c}\right)$ et $\boxed{\Delta t_2 = \frac{\theta}{\pi^2} \ln\left(\frac{T_{\text{ext}} - T_0}{T_{\text{ext}} - T_c}\right)}$

II.B.5.b. On a alors $\Delta t_2 = \frac{\mu c r_2^2}{\pi^2 \lambda} \ln\left(\frac{T_{\text{ext}} - T_0}{T_{\text{ext}} - T_c}\right)$

$$\Delta t_e = \frac{10^3 \times 4180 \times (2,5 \cdot 10^{-2})^2}{\pi^2 \times 0,6} \ln\left(\frac{100 - 20}{100 - 80}\right) = 611 \text{ s} = \boxed{10 \text{ min } \frac{11}{60} \text{ s}}$$

Ce résultat est proche du temps de cuisson d'un œuf dur à l'eau bouillante ce qui est logique puisqu'on a considéré la conduction-convexion infiniment efficace, ce qui est le cas dans l'eau.

II.C.1.a. Lorsque l'œuf est cuit, à l'état final:

$$T_c \leq T(p, \Delta t_2) \leq T_{eb}$$

au centre \rightarrow au bord

On peut trouver une borne inférieure en considérant que tout l'œuf est passé de T_0 à T_c , alors:

$$E_{dmin} = \frac{4}{3} \pi r_2^3 \times \mu c \times (T_c - T_0) = \boxed{16,4 \text{ kJ}}$$

II.C.1.b. De même en utilisant la seconde inégalité:

$$E_{dmax} = \frac{4}{3} \pi r_2^3 \times \mu c \times (T_{eb} - T_0) = \boxed{21,9 \text{ kJ}}$$

$$II.C.1.c. E_d = \frac{4}{3} \pi r_2^3 \mu c \left(\frac{T_{eb} + T_c}{2} - T_0 \right) = \boxed{19,2 \text{ kJ}}$$

II.C.2. D'après le premier principe pour un système ouvert en régime permanent, la variation d'enthalpie massique Δh de l'eau est reliée à la puissance thermique et mécanique reçue par le système:

$$D_m \times \Delta h = P_{th} + P_{méc}$$

Ici $P_{méc} = 0$ (pas de partie mobile) et $P_{th} = P - P_f - m \frac{dE}{dt}$

l'énergie thermique reçue par l'ensemble.

Or: $\Delta h = \Delta_{vap} h = l_v$ l'enthalpie de vaporisation de l'eau

donc:

$$\boxed{D_m \times l_v + P_f + m \frac{dE}{dt} = P}$$

II.C.3. On intègre cette équation pendant la cuisson:

$$\int_0^{\Delta t_2} \frac{l_v}{D_m} dt + P_f \Delta t_2 + m E_x = P \Delta t_2$$

$\underbrace{\int_0^{\Delta t_2} \frac{l_v}{D_m} dt}_{= m_0}$ par définition du débit massique.

Ainsi $l_v m_0 = (P - P_f) \Delta t_2 - n E_x$

ou encore :

$$m_0 = \frac{(P - P_f) \Delta t_2 - n E_x}{l_v}$$

Le temps de cuisson étant indépendant du nombre d'œufs, on constate effectivement que la quantité d'eau à introduire est plus faible si le nombre d'œufs est important. Ceci est logique car l'énergie apportée est toujours la même (la résistance n'est pas réglable) donc il faut répartir cette énergie entre l'évaporation de l'eau et la cuisson des œufs, plus il y a d'œufs et moins on a besoin d'évaporer d'eau.

I.C.4. Il faut $m_0 \geq 0$ donc $P \geq P_f + \frac{n E_x}{\Delta t_2}$

Ici avec $P_f \approx 0$ on a $P \geq \frac{7 E_d}{\Delta t_2} = \frac{7 \times 19 \cdot 10^3}{10 \times 60} = \boxed{220 \text{ W}}$

La puissance du cuisinier est plus élevée car il y a des pertes, les œufs peuvent parfois être plus gros, et on veut aussi une masse minimale d'eau à introduire pour éviter de chauffer à vide (dangereux).

II.C.5. On s'attend à avoir m_0 bilinéaire en fonction de n et de E_x . L'ordonnée à l'origine ($n=0$) donne Δt_2 , en effet :

$$\Delta t_2 = \frac{l_v m_0(n=0)}{P} \text{ en prenant } P_f = 0.$$

On trouve $\Delta t_2 = \begin{cases} 13,6 \text{ min} & \text{dur} \\ 7,4 \text{ min} & \text{mollet} \\ 4,3 \text{ min} & \text{coque} \end{cases}$ ce qui est du même

ordre de grandeur que dixente précédemment. La pente de la courbe favorise $\frac{E_x}{l_v}$ et on voit que la pente est plus forte pour les

cuissons plus longues ce qui est cohérent avec le modèle ($E_d > E_m > E_c$)

Enfin on sait que $E_d \propto r_2^3$ (Q.I.C.1a) et

$E_d = 19 \text{ kJ}$ pour $r_2 = 2,5 \text{ cm}$. Ici $E_d = \frac{l_v \times 5,94}{1000} = 13,4 \text{ kJ}$ la masse est en g

$$\text{Ainsi } r_2 = 2,5 \times \sqrt[3]{\frac{3,4}{19}} \text{ soit } \boxed{r_2 = 2,2 \text{ cm}}$$

ce qui reste proche de la valeur précédente.