

Physique Chimie

DM 15

Production de champs magnétiques intenses
(Adapté de E3A PC 2001, CCINP MP 2017, X/ENS MP 2011)

Dans ce problème, on s'intéresse à la production de champs magnétiques intenses, qui a des applications directes en médecine ou en chimie pour l'imagerie par résonance magnétique nucléaire (IRM).

1 Création d'un champ permanent intense

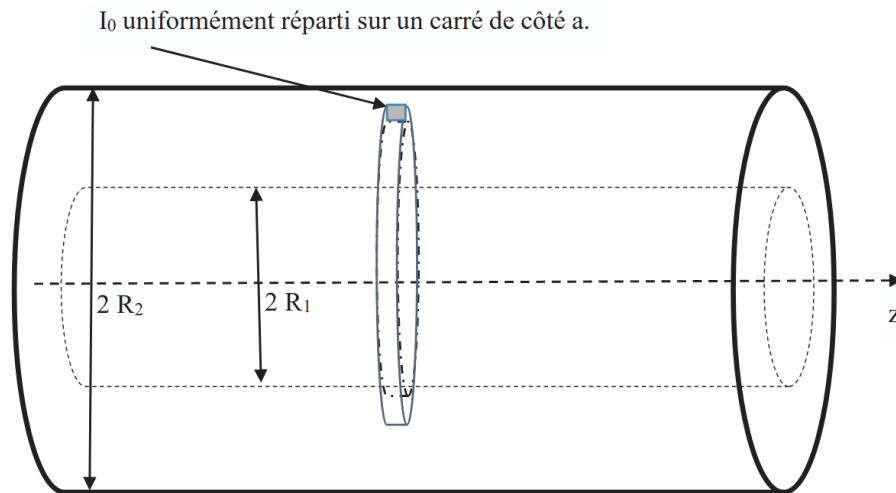


Figure 1: Solénoïde épais.

On utilise un solénoïde épais (épaisseur $e = R_2 - R_1$) considéré comme la superposition de solénoïdes infinis (en réalité de longueur $LL \gg R_2$) de même axe Oz . Il est réalisé par un empilement jointif de spires de section carrée, de côté $a = 1.0$ mm, enroulées sur un cylindre de longueur $L = 4.0$ m, depuis un rayon $R_1 = 20$ cm jusqu'à un rayon $R_2 = 25$ cm. Les spires sont des fils de cuivre parcourus par un courant continu I_0 uniformément réparti, orienté dans le sens direct autour de Oz . La situation est schématisée sur la figure suivante. Les sections carrées sont dans les plans $(\vec{e}_r, \vec{e}_z)$ c'est-à-dire en positionnement radial.

- 1 – Calculer le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ pour $r \in [R_1, R_2]$.
- 2 – Établir que l'expression du champ sur l'axe vaut $B = \mu_0 I_0 a^2 (R_2 - R_1)$.
- 3 – Quelle est l'intensité nécessaire pour engendrer un champ de 1 Tesla ? Commenter.

2 Utilisation d'un matériau supraconducteur

Pour obtenir un champ intense, sans problème d'échauffement, on utilise des matériaux supraconducteurs qui perdent totalement leur résistivité en dessous d'une température critique T_c , qui dépend du champ magnétique.

Dans la phase correspondant aux hautes températures ($T > T_c$), il se comporte comme un matériau normal (phase Normale). A toute température T inférieure à T_c (phase Supraconductrice), il est caractérisé par deux propriétés macroscopiques remarquables : sa résistance électrique est nulle (Effet supraconducteur) et aucun champ magnétique appliqué ne peut le pénétrer (Effet Meissner). De plus, pour $T < T_c$, cette phase supraconductrice disparaît lorsqu'un champ magnétique supérieur à un champ magnétique critique $B_c(T)$ est appliqué au matériau.

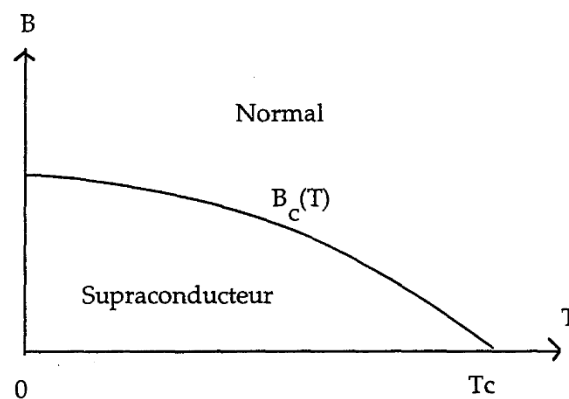


Figure 2: Diagramme de phase (B, T) pour un matériau supraconducteur.

En 1935, les frères F et H. London publient un article décrivant théoriquement l'effet Meissner : le champ magnétique à l'intérieur d'un matériau supraconducteur est nul.

2.1 Modélisation du mouvement des électrons

- 4 – On adopte un modèle microscopique de supraconducteur dans lequel les électrons de conduction (de charge $-e$ et de masse m_e), initialement au repos, sont mis en mouvement sous l'action d'un champ électrique $\vec{E}$, supposé uniforme et constant. Écrire l'équation du mouvement d'un électron.

□ 5 – On note n la densité volumique d'électrons, supposée uniforme. Dédurre de la question précédente que :

$$\vec{E} = \mu_0 \lambda^2 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (1)$$

où λ est une constante à déterminer. Quelle est sa dimension ? Calculer λ pour une densité d'électrons de conduction $n = 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

□ 6 – On suppose que la relation obtenue à la question précédente reste valable même si le champ n'est ni uniforme ni constant, et on se place dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires. En utilisant les équations de Maxwell, montrer que le champ magnétique vérifie l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{B})) + \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} \right) = \vec{0} \quad (2)$$

2.2 Effet Meissner

Lorsqu'on plonge un supraconducteur dans un champ magnétique extérieur, il expulse ce champ. Cette propriété, qui porte le nom d'effet Meissner, est représentée sur la figure suivante.

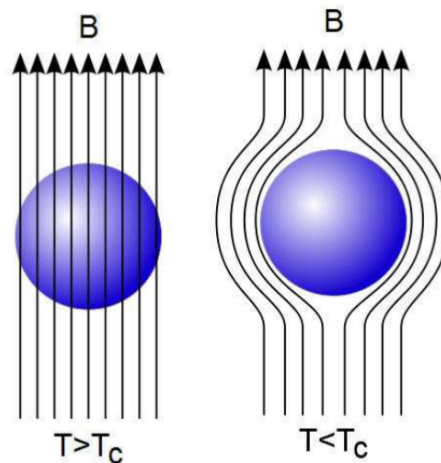
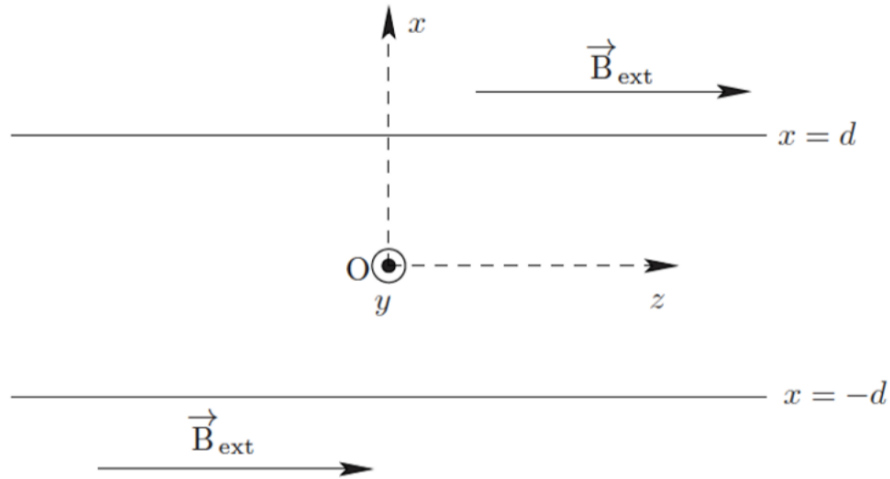


Figure 3: Effet Meissner

Pour l'expliquer, on s'intéresse à un supraconducteur d'épaisseur $2d$ selon la direction (Ox) et infini selon (Oy) et (Oz) . On choisit l'origine du repère orthonormé direct $(Oxyz)$ au milieu de plaque. La plaque supérieure (respectivement inférieure) se situe en $x = d$ (respectivement $x = -d$). Cette plaque est plongée dans un champ magnétique qui, en l'absence de plaque, est statique et uniforme tel que $\vec{B}_{\text{ext}} = B_{\text{ext}} \vec{e}_z$. On supposera que le champ magnétique est continu au niveau de chaque interface $x = \pm d$. Le système est

représenté ci-dessous. On postulera une relation plus forte que l'équation établie en partie précédente :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{B})) + \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} = \vec{0} \quad (3)$$



□ **7** – Montrer que le champ magnétique dans le supraconducteur est de la forme $\vec{B} = B(x)\vec{e}_z$.

□ **8** – résoudre l'équation différentielle et montrer que :

$$B(x) = B_{\text{ext}} \frac{\cosh \alpha}{\sinh \beta} \quad (4)$$

avec α et β des expressions à déterminer en fonction de x , λ et d . Quelle est la signification physique de λ ?

□ **9** – Tracer l'allure de $B(x)$ pour $d = \lambda$ et $d = 50\lambda$. En déduire à quelle condition sur d le champ magnétique moyen peut être considéré comme nul à l'intérieur du supraconducteur (effet Meissner).

□ **10** – Calculer l'expression littérale de la densité de courant volumique $\vec{j}$. Tracer $j(x)$ pour $d = \lambda$ et $d = 50\lambda$. Comment peut-on qualifier la densité de courant dans le supraconducteur ?