

Equations de Maxwell

Chapitre 16

I - Révisions sur l'induction

1 Haut parleur

On s'intéresse dans cet exercice à un modèle très simplifié de haut-parleur, dans une configuration proche des rails de Laplace où la membrane du haut parleur est fixée solidairement à la tige mobile, qui est également reliée élastiquement à un bâti. La tige mobile a pour longueur $AA' = a$, et sa position est repérée par son abscisse x , dont l'origine correspond à la position de repos. On note m la masse de l'ensemble {tige+membrane}.

Les frottements de l'air sur la membrane se traduisent par une force de frottement linéaire $\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{x}\vec{e}_x$. Le système est forcé électriquement par la tension de commande u_0 . On note R la résistance électrique de l'ensemble, et on néglige l'auto-induction.

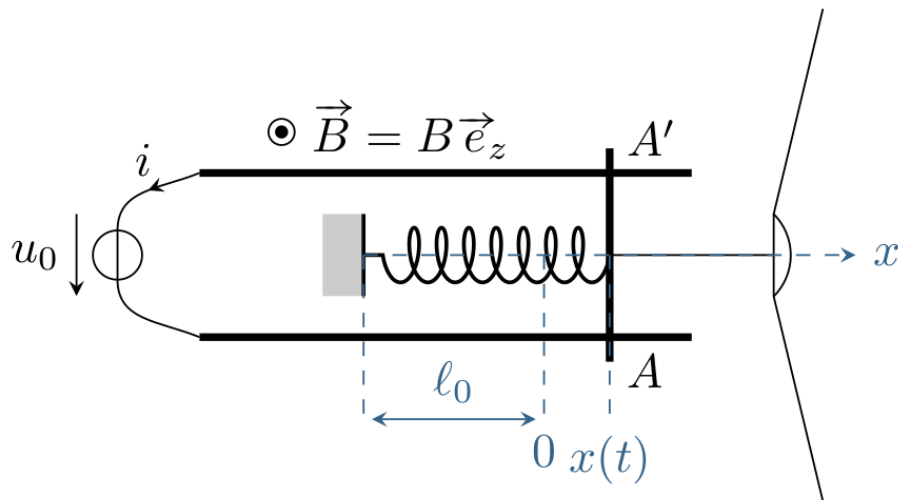


Figure 1: Modèle de haut-parleur.

1. Exprimer en fonction de $\dot{x}$ la force électromotrice induite.
2. Écrire les équations électrique et mécanique.
3. Découpler ces équations pour aboutir à une unique équation différentielle portant sur la position x de la tige mobile. Quel type d'équation obtient-on ? L'analyser physiquement : comment se traduisent les phénomènes d'induction ? Commenter leur signe.
4. Procéder à un bilan de puissance du système et interpréter physiquement chaque terme.

2 Freinage d'une roue par induction

On considère une roue formée de N rayons conducteurs supposés identiques. Les extrémités des rayons sont en contact électrique avec la circonférence d'un cercle de résistance nulle et avec le centre O de la roue (voir figure).

Ils sont régulièrement répartis sur la circonférence du cercle. Chaque rayon a une longueur L et une résistance R .

L'espace est rapporté au repère orthonormé (O, x, y, z) muni des vecteurs unitaires $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$.

Soit un point M d'un rayon de la roue. On repérera la position du point M par la distance r entre M et le centre O de la roue .

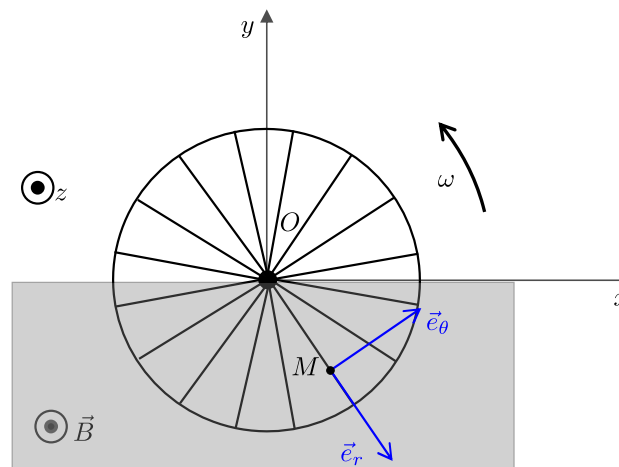


Figure 2: Freinage inductif d'une roue

Un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B \vec{e}_z$ est créé dans la portion d'espace telle que $y < 0$. On considère le champ magnétique comme nul dans la portion d'espace telle que $y > 0$.

La roue ainsi constituée et disposée tourne autour de son axe (Oz) avec une vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$. On note J le moment d'inertie de la roue par rapport à l'axe Oz . Les frottements mécaniques sont négligés.

1. Justifier l'apparition du phénomène d'induction dans les rayons. Quel sera l'effet de ce phénomène sur le mouvement de la roue ?
2. On considère un rayon plongé dans le champ $\vec{B}$ parcouru par un courant d'intensité i_0 . Le rayon est alors soumis à une force de Laplace que l'on cherche à déterminer. On considère tout d'abord un tronçon élémentaire du rayon, de longueur élémentaire dr .
 - (a) Déterminer l'expression dM_L du moment élémentaire de la force de Laplace auquel est soumis cet élément de circuit autour de l'axe (Oz).

- (b) En déduire l'expression du moment M_L de la force de Laplace $\vec{F}_L$ à laquelle est soumis un rayon immergé en fonction de i_0 , B , et L .
3. On cherche désormais la force électromotrice induite dans un rayon plongé dans le champ magnétique $\vec{B}$ notée e .
- (a) Exprimer la puissance P_L de la force de Laplace s'exerçant sur un rayon conducteur en fonction de i_0 , B , L et de ω .
- (b) De quelle puissance est-elle l'opposée ? En déduire que la force électromotrice $e(t)$ induite dans un rayon s'écrit :

$$e(t) = \frac{BL^2\omega}{2} \quad (1)$$

4. Comme la circonférence de la roue a une résistance nulle, aucune force électromotrice induite ne peut y apparaître. Tous les rayons étant en contact électrique d'une part avec la circonférence de la roue et d'autre part avec le moyeu O de la roue et compte-tenu de la symétrie de rotation de la roue, on admet que :
- chaque rayon immergé dans le champ magnétique est parcouru par le même courant d'intensité i_0 ;
 - chaque rayon non soumis au champ magnétique est parcouru par un courant d'intensité i_1 .

Le schéma électrique équivalent à la roue est présenté sur la figure suivante. On note u la différence de potentiel appliquée à chaque rayon.

- (a) Déterminer l'expression de l'intensité i_0 en fonction de u , e et R . Déterminer l'expression de l'intensité i_1 en fonction de u et R .
- (b) Déterminer la relation entre i_0 et i_1 . En déduire les expressions de i_0 et i_1 en fonction de B , L , R et ω .
5. (a) Montrer que :

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{\tau}\omega = 0 \quad (2)$$

en donnant l'expression de τ en fonction de R , J , N , B et L .

- (b) Déterminer la solution $\omega(t)$ de l'équation différentielle (1) et la représenter graphiquement.
6. Ce dispositif de freinage par courant de Foucault est utilisé sur les poids lourds et les véhicules de transport en commun.
- (a) Pourquoi ce dispositif n'est-il qu'un dispositif de ralentissement secondaire et ne peut-il être utilisé comme dispositif unique de freinage ?

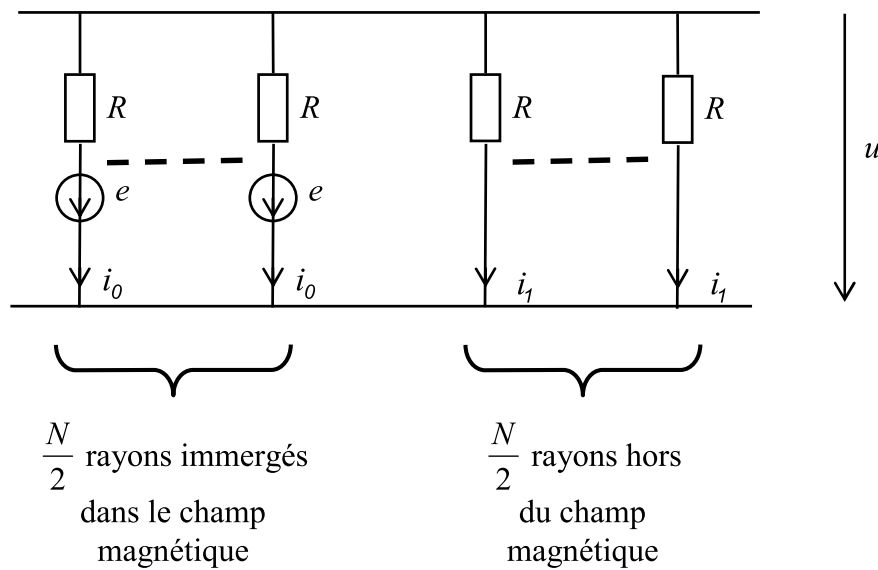


Figure 3: Schéma électrique équivalent de la roue.

- (b) Par quel effet physique est transformée l'énergie cinétique du véhicule lors du freinage par courant de Foucault ?
- (c) Quels sont les avantages, au niveau de l'entretien, d'un dispositif de freinage par courant de Foucault par rapport à un frein classique à disque ?

II - Potentiel électrostatique

3 Capteur de niveau d'eau capacitif

On étudie un capteur capacitif, appelé sonde à tube de masse, utilisable pour mesurer le niveau d'un liquide non conducteur (solvant organique, huile, etc.). Il se présente comme une longue tige cylindrique de même hauteur que la cuve et de rayon beaucoup plus faible. Le capteur est constitué de deux cylindres métalliques coaxiaux formant un condensateur dont la capacité dépend directement du niveau de liquide dans la cuve. Le cylindre intérieur est un cylindre plein, alors que le cylindre extérieur est creux et percé d'orifices permettant au fluide de pénétrer dans l'espace entre les deux cylindres. Le cylindre extérieur est électriquement relié à la terre.

Hypothèses pour l'ensemble de l'exercice :

- les orifices ne modifient pas les propriétés électromagnétiques du cylindre extérieur, qui sont identiques à celles d'un cylindre creux non percé ;
- les effets de bords aux limites de la cuve et à l'interface entre le liquide et l'air sont négligeables ;

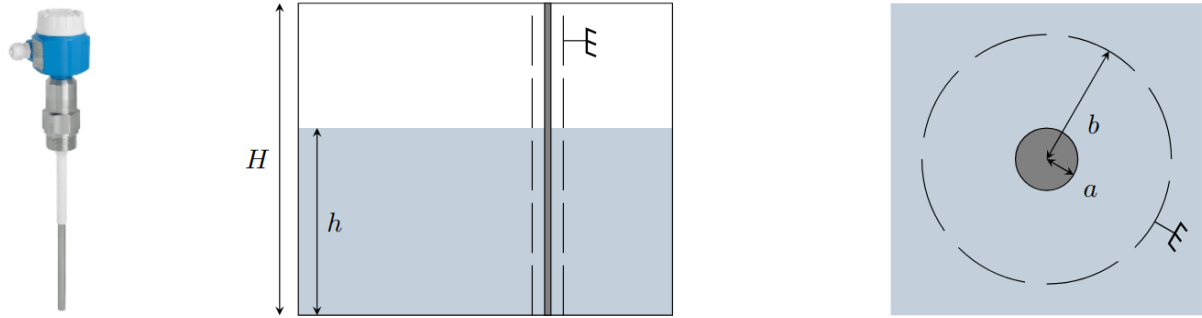


Figure 4: Sonde à tube de masse

- les propriétés électromagnétiques du fluide sont analogues à celles du vide à condition de remplacer la permittivité du vide ϵ_0 par celle du liquide $\epsilon_0\epsilon_r$, où ϵ_r (sans dimension) est la constante diélectrique du liquide.
1. Justifier que le potentiel V dans l'espace contenu entre les deux cylindres ne dépend que de la distance r à l'axe des cylindres.
 2. En déduire l'expression du potentiel dans l'espace entre les deux cylindres en fonction du potentiel V_0 auquel est porté le cylindre central.
 3. Déterminer le champ électrique régnant entre les deux cylindres.
 4. Exprimer l'énergie électrostatique stockée entre les deux cylindres en fonction notamment de h et H .
 5. Montrer que la mesure de la capacité C du condensateur formé par les deux cylindres permet de déterminer le niveau h de liquide contenu dans la cuve.
 6. La sonde peut-elle convenir à n'importe quel liquide isolant ? Qu'en est-il si le liquide est conducteur (solution aqueuse par exemple) ?

4 Étude d'une solution colloïdale (difficile)

Une solution colloïdale est une suspension dans l'eau de particules de dimension de l'ordre de 10^{-6} à 10^{-8} m, petite à l'échelle macroscopique et grande à l'échelle moléculaire. En dehors des particules colloïdales, la solution contient des ions Na^+ et Cl^- qui seront considérés comme ponctuels. On note N_0 le nombre moyen de cations et d'anions par unité de volume.

On considère une particule colloïdale sphérique, de centre O et de rayon R , portant une charge Q . On pourra faire une approximation dite de *champ moyen* : la particule n'est sensible qu'à la position statistique moyenne des ions autour d'elle, ainsi le potentiel électrostatique autour de la particule ne dépend que de r .

1. (a) Rappeler la loi de Boltzmann.
 (b) En déduire l'expression de la densité locale d'anions et de cations $N_+(r)$ et $N_-(r)$, en fonction notamment de $V(r)$, à un facteur près.
 (c) Identifier alors la constante multiplicative dans l'hypothèse où $|eV(r)| \ll k_B T$. En déduire la densité volumique de charge $\rho(r)$.
2. Quelle équation différentielle vérifie la fonction $U(r) = rV(r)$? En déduire que $V(r) = \frac{A}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right)$ où A est une constante encore indéterminée et λ une longueur caractéristique à exprimer en fonction des données.
3. Exprimer le champ électrique autour de la particule colloïdale et en déduire la constante A .
4. (a) Quelle est la charge $Q(r)$ contenue dans la sphère de rayon r et de centre O ? Déterminer $\lim_{r \rightarrow \infty} Q(r)$ et commenter le résultat.
 (b) Déterminer $\rho(r)$ en fonction des données et tracer son allure. Expliquer alors pourquoi on dit que l'interaction électrostatique entre les colloïdes est "écrantée" par les ions.
5. La stabilité de la solution colloïdale est assurée par la répulsion électrostatique entre les particules colloïdales sans laquelle les particules s'attireraient mutuellement et précipiteraient au fond du récipient (floculation). Expliquer qualitativement pourquoi l'ajout de sel dans la solution peut provoquer la floculation. Cette technique peut être utilisée, par exemple, pour la dépollution de l'eau.

III - Équations de Maxwell

5 Champ dans un solénoïde

Un solénoïde très long comporte n spires jointives bobinées par unité de longueur sur un cylindre de rayon a et d'axe (Oz). Elles sont parcourues par un courant i que l'on supposera lentement variable.

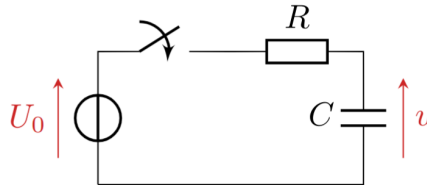
1. Calculer le champ magnétique créé par cette bobine.
2. Pourquoi un champ électrique va-t-il apparaître ? Montrer que le champ électrique s'écrit en coordonnées cylindriques sous la forme : $\vec{E} = E(r, t)\vec{e}_\theta$
3. Montrer que :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (3)$$

4. En déduire le champ électrique créé par la bobine.

6 Charge d'un condensateur

Le but de l'exercice est d'étudier le bilan énergétique du circuit ci-dessous par une approche électromagnétique. Le condensateur est initialement déchargé, et l'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$.



- Déterminer l'évolution de $u(t)$ par une approche électrocinétique.
- Le condensateur est modélisé par deux disques parallèles de rayons a , d'axe (Oz) , séparés une épaisseur $e \ll a$, de sorte que l'on puisse considérer que le condensateur est un plan chargé infiniment grand. Le milieu entre les armatures est assimilé au vide. On suppose que les résultats établis en régime permanent en électrostatique restent valables (régime lentement variable) : $C = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{e}$ et dans l'espace inter-armatures :

$$\vec{E}(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} \vec{e}_z \quad (4)$$

- Exprimer $\vec{E}$ en fonction de u dans l'espace inter-armatures.
- Quelles sont les sources de champ magnétique entre les armatures ? Justifier à partir d'une équation de Maxwell que les propriétés de symétrie de $\vec{j}$ et de $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ont les mêmes conséquences sur le champ magnétique. En déduire que :

$$\vec{B} = B(r, z) \vec{e}_\theta \quad (5)$$

- Déterminer $\vec{B}$ en fonction de u dans l'espace inter-armatures.
- Exprimer le vecteur de Poynting à l'intérieur du condensateur. En déduire l'expression de la puissance rentrant dans le volume entre les armatures. D'où vient cette puissance ?
 - Réécrire la puissance entrante comme la dérivée temporelle d'une fonction de C et u . Commenter le résultat obtenu.
 - En déduire l'expression de l'énergie électromagnétique qui est entrée dans le condensateur pendant la charge en fonction de C et U_0 .

7 Expérience de Rowland

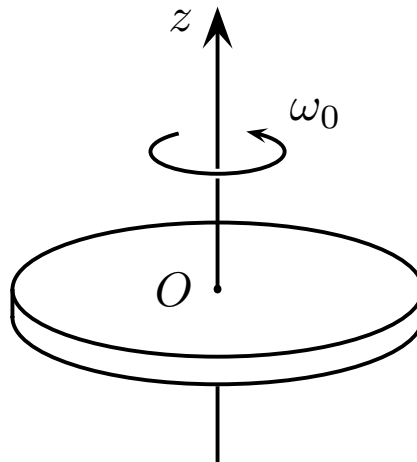


Figure 5: Expérience de Rowland

À la fin du XIX^e siècle, Rowland, physicien américain, réalisa une expérience en vue de démontrer qu'un champ magnétique est engendré par un déplacement de charges électriques. Il fit tourner à grande vitesse, autour de son axe de révolution, un disque possédant une charge électrique uniformément répartie sur sa surface. On note ω la vitesse de rotation du disque, a son rayon et Q sa charge.

1. Justifiez qu'un champ magnétique apparaît alors dans l'espace environnant.
2. Quelle est sa direction aux points situés sur l'axe de rotation, au-dessus ou au-dessous du disque ?
3. Déterminez finalement le champ magnétique au point O sachant qu'une spire de rayon R parcourue par un courant i crée en son centre un champ :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2R} \vec{e}_z \quad (6)$$

8 Principe d'une plaque à induction

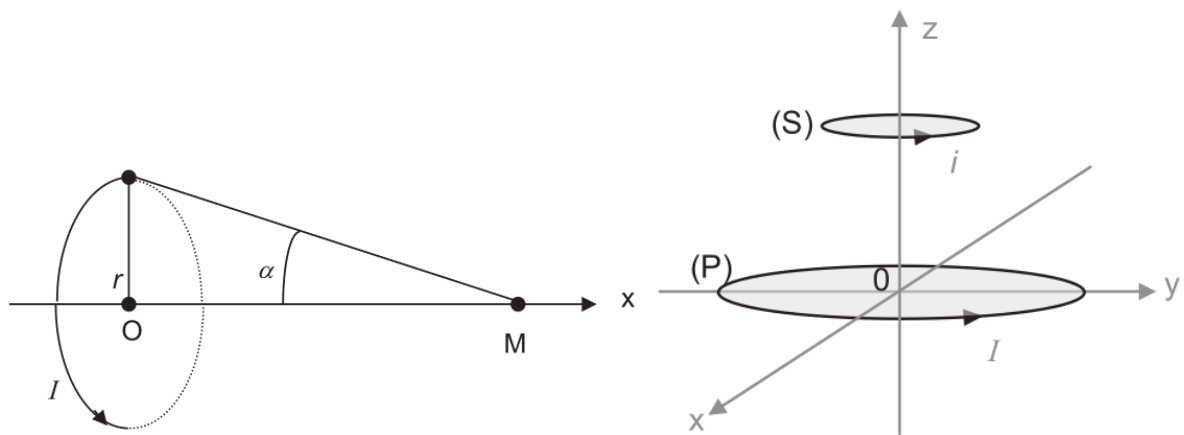
Dans une plaque à induction, une bobine est placée sous une plaque en vitrocéramique. Lorsque cette bobine est parcourue par un courant électrique alternatif, un champ magnétique variable induit un champ électrique qui entraîne la circulation de courants électriques dans le métal du récipient posé sur la plaque. Ces courants électriques, appelés " courants de Foucault ", génèrent de l'énergie thermique par effet Joule.

Nous nous intéresserons tour à tour au champ magnétique créé par un fil rectiligne de longueur infinie, puis par une spire circulaire.

Ensuite, nous nous intéresserons au phénomène d'induction dans le fond de la casserole et à l'effet Joule associé.

Dans cet exercice, on considère que l'on se trouve dans le cas de régimes lentement variables (ARQS). Le champ magnétique s'identifie alors au champ magnétique déterminé selon une approche de magnétostatique.

1. (a) Écrire l'équation de Maxwell-Ampère reliant le champ magnétique, le vecteur densité de courant et le champ électrique. Que devient-elle dans le cadre de l'ARQS ?
- (b) Démontrer le théorème d'Ampère dans le cadre de la magnétostatique et dans le cas des courants circulant dans des circuits filiformes. Vous préciserez sur un schéma les conventions d'orientation des surfaces et contours utilisés.
2. Soit un fil rectiligne de longueur infinie parcouru par un courant électrique d'intensité I et placé dans le vide. L'espace est rapporté à la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.
 - (a) Analyser les symétries et les invariances de la distribution de courant pour déterminer la direction du champ magnétique et les paramètres d'espace dont dépendent sa ou ses coordonnée(s) en coordonnées cylindriques.
 - (b) En appliquant le théorème d'Ampère, établir l'expression du champ magnétique créé par ce fil à une distance R du fil. Préciser le contour d'Ampère choisi.



3. Soit une spire circulaire de rayon r , de centre O , parcourue par un courant d'intensité I . Soit un point M situé sur l'axe de la spire, de coordonnée x et tel que du point M la spire soit vue sous l'angle α .
 - (a) En utilisant les propriétés de symétrie de la distribution de courant, déterminer la direction et le sens du champ magnétique créé par cette spire au point M .

- (b) Le champ magnétique créé en un point M de l'axe de la spire est donné par l'expression:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2r} \sin^3(\alpha) \vec{e}_z = B_0 \sin^3(\alpha) \vec{e}_z \quad (7)$$

où α représente l'angle sous lequel la spire est vue depuis le point M et $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2r}$. Établir l'expression de $\vec{B}$ au point M en fonction de B_0, r et x où x représente la distance entre le point O et le point M .

- (c) Pour des distances x petites par rapport au rayon de la spire, montrer que l'expression du champ $\vec{B}$ au point M est donnée par:

$$\vec{B} = B_0 \left(1 - \frac{3x^2}{2r^2} \right) \vec{e}_z \quad (8)$$

Quelle valeur maximale de x permet de considérer que le champ B est égal à B_0 (à 10 % près) ? On exprimera x en fonction de r .

4. Une plaque à induction comporte une bobine (P) de rayon r_1 permettant de créer un champ magnétique. La bobine (P) est parcourue par un courant sinusoïdal d'intensité $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ et de fréquence $f = 60 \text{ kHz}$. On modélise la casserole métallique posée sur la plaque par une spire (S) circulaire de rayon $r_2 < r_1$. Elle est parcourue par un courant d'intensité $i(t)$.

Les sens des courants sont arbitrairement ceux mentionnés sur la figure ci-dessus.

On considère les hypothèses simplificatrices suivantes :

- la casserole posée sur la plaque à induction est à une distance z_0 de la bobine ;
- le champ magnétique auquel est soumis la casserole est uniforme et son expression est donnée par $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$ où B_0 est une constante;
- la spire (S) a une résistance électrique R et son inductance propre est négligée.

- (a) Déterminer l'expression de la force électromotrice induite e apparaissant dans la spire (S).
- (b) Déterminer l'expression de la puissance moyenne $\langle P \rangle$ dissipée par effet Joule dans la spire (S).
5. (a) Par quel phénomène physique l'énergie thermique transmise au fond de la casserole par effet Joule est-elle transmise au contenu de la casserole ?
- (b) Citer un intérêt d'une plaque à induction par rapport à une plaque de cuisson électrique fonctionnant à l'aide d'une résistance électrique.

9 Phénomène de striction

Deux fils parallèles parcourus par des courants de même sens s'attirent sous l'action des forces magnétiques. Le même effet d'attraction se manifeste entre les filets infinitésimaux de courant à l'intérieur d'un conducteur, modifiant ainsi la répartition de courant, usuellement supposée uniforme sur toute la section du fil.

On considère un conducteur cylindrique d'axe (Oz) , de longueur infinie et de rayon a . Il contient n_0 cations de charge $+e$ par unité de volume et n électrons mobiles animés d'une vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_z$ uniforme et stationnaire par rapport au conducteur, orientée selon l'axe du conducteur. On propose de déterminer la densité volumique non uniforme de porteurs de charges $n(r)$ en régime stationnaire.

1. Donner les expressions de la densité volumique de courant $\vec{j}$ et de la densité volumique totale de charge ρ qui décrivent cette distribution. Vérifier l'équation locale de conservation de la charge électrique.
2. Écrire les équations fondamentales vérifiées par les champs électrique et magnétique en un point du faisceau de charges mobiles. On précisera l'orientation des champs électrique et magnétique en un point M à l'intérieur du conducteur.
3. En étudiant le mouvement d'un électron, de vitesse $\vec{v}$ uniforme et stationnaire, exprimer la densité volumique de porteurs de charges mobiles $n(r)$ dans le faisceau en fonction de n_0 et $\beta = \frac{v}{c}$. On pourra s'aider du formulaire d'analyse vectorielle.
4. En écrivant la neutralité électrique d'une tranche dz de conducteur, montrer que l'expression de la densité $n(r)$ est non nulle seulement pour $r \leq b$. On exprimera b en fonction de a et β .
5. Application numérique: pour un fil de cuivre métallique, de section $S = 1.0 \text{ mm}^2$, parcouru par un courant d'intensité $I = 10 \text{ A}$, évaluer $a - b$. Commenter le résultat obtenu.
Données: masse volumique du cuivre $\mu = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; masse molaire $M = 64 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.
 On considérera que chaque atome de cuivre apporte un électron de conduction.

10 Teslamètre à effet Hall

Soit une portion de conducteur ayant la forme d'un ruban de largeur ℓ et d'épaisseur h selon Oz . Le milieu comprend une densité volumique d'électrons n . Une intensité I circule le long du ruban, avec une densité de courant uniformément répartie $\vec{j} = j\vec{u}_x$. On note $\vec{v}$ la vitesse d'ensemble des électrons.

1. A $t = 0$ on allume un champ magnétique permanent et uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$.

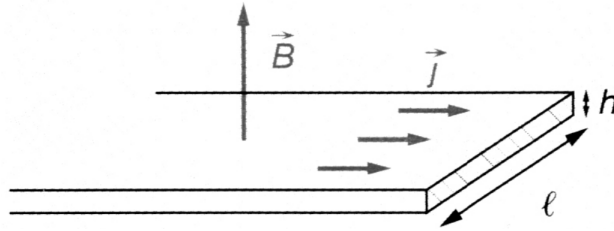
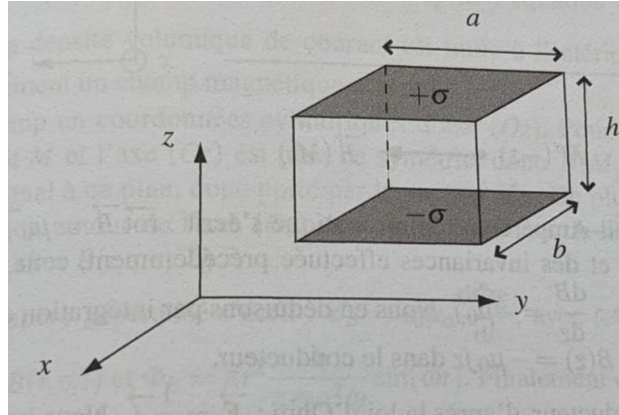


Figure 6: Sonde à effet Hall

- (a) En étudiant le mouvement des électrons, montrer qu'une composante transversale suivant (Oz) vient se superposer à la densité volumique de courant longitudinale. Tracer l'allure des lignes de courant.
 - (b) En déduire que deux des faces du barreau vont se charger, respectivement, positivement et négativement.
 - (c) Montrer alors que le barreau est le siège d'un champ électrostatique entre ces deux faces. Préciser la direction et le sens du champ $\vec{E}$.
2. On s'intéresse désormais au régime permanent.
- (a) Que peut-on dire du mouvement des électrons en régime permanent ? En déduire l'expression du champ électrique transversal $\vec{E}_H$, appelé champ de Hall, en fonction de n, I, B , des dimensions du ruban et de la charge élémentaire e .
 - (b) Exprimer de même la différence de potentiel U_H entre les deux faces du conducteur identifiées à la question précédente.
3. Un capteur à effet Hall est constitué d'une pastille semi-conductrice de surface $a^2 = 1 \text{ mm}^2$ et d'épaisseur $b = 0.1 \text{ mm}$, composée d'antimoniure d'indium InSb, dans laquelle circule un courant permanent de l'ordre de 1 A . Un voltmètre permet de mesurer la tension de Hall U_H apparaissant en présence d'un champ magnétique. Sachant que dans un tel semi-conducteur la densité d'électrons est de $n \approx 10^{22} \text{ m}^{-3}$, alors que dans un métal conducteur classique elle est de $n \approx 10^{28} \text{ m}^{-3}$, discuter l'intérêt d'utiliser l'antimoniure d'indium pour la fabrication d'un teslamètre à effet Hall. On pourra s'appuyer sur des applications numériques, en prenant $h \approx 0.1 \text{ mm}$ et des valeurs usuelles pour les autres variables.
4. Quelle est la force subie par les ions fixes du fait de la présence de $\vec{E}_H$? Donner l'expression de la densité volumique de cette force en fonction de $\vec{j}$ et $\vec{B}$, puis de la densité linéique de force en fonction de I et B . Commenter le résultat.

11 Quantité de mouvement du champ électromagnétique (difficile)

On considère le dispositif suivant :



On suppose que $h \ll a$ et $h \ll b$. Les deux parois horizontales sont chargées $+\sigma$ et $-\sigma$, les autres parois sont isolantes. Dans la boîte règne un champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_y$. A l'instant $t = 0$, on éteint le champ magnétique.

1. Calculer la variation de quantité de mouvement de la boîte.
2. (a) Relier l'impulsion et l'énergie d'un photon.
 (b) En déduire que la densité volumique de quantité de mouvement du champ électromagnétique s'écrit :

$$\frac{d\vec{p}_{\text{em}}}{d\tau} = \frac{\vec{\Pi}}{c^2} \quad (9)$$

où $\vec{\Pi}$ est le vecteur de Poynting.

- (c) Calculer la variation de quantité de mouvement du champ électromagnétique, puis conclure quant à la conservation de la quantité de mouvement.