



16. Formalisme local de l'électromagnétisme

Nous avons défini la notion de champs électrique et magnétique pour décrire les phénomènes électromagnétiques. Bien que ces champs soient continus dans le temps et dans l'espace, les lois physiques que nous avons établies et utilisées jusqu'ici n'exploitent pas directement le continuité de ces champs : elles s'appliquent à des objets macroscopiques (intégrale le long d'un circuit pour la magnétostatique, ou sur une surface pour l'électrostatique).

En particulier, le théorème de Gauss et le théorème d'Ampère nous ont permis d'établir clairement le champ électrique ou magnétique uniquement dans le cas où la distribution de charges et de courants avait un haut degré de symétrie, ce qui n'est pas le cas dans un grand nombre de situations naturelles et industrielles. Enfin, nous ne disposons pas à ce stade d'équations nous renseignant sur l'évolution temporelle des champs électrique et magnétique.

L'objectif de ce chapitre est de compléter le formalisme de l'électromagnétisme, en établissant des équations locales décrivant l'évolution des champs électromagnétiques. Nous avons vu, à travers la thermodynamique, l'intérêt que peut avoir une formulation locale : l'équation de la chaleur permet la description d'un grand nombre de situations physiques, y compris hors équilibre, telles que la propagation d'une onde de chaleur, l'évolution de la température en fonction de la position dans un barreau, ou encore les lois d'associations de résistances thermiques, autant de phénomènes qui ne peuvent pas être décrits par la thermodynamique macroscopique.

En thermodynamique, nous sommes partis du premier principe macroscopique pour établir une loi locale de conservation de l'énergie. Nous allons faire de même ici : nous allons partir des lois macroscopiques de l'électromagnétisme et établir des lois locales pour les champs électrique et magnétique.

16.1 Lois locales de l'électrostatique

16.1.1 Equation de Maxwell-Gauss

Commençons par l'électrostatique : le théorème de Gauss, que nous connaissons, permet de décrire le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé par une distribution de charges $\rho(M)$ en régime permanent. Nous souhaitons établir une loi locale traduisant ce principe. Pour cela, nous considérons un volume

$\mathcal{V}$ quelconque délimité par une surface fermée Σ . Notons Q_{int} la charge contenue dans $\mathcal{V}$. Par le théorème de Gauss :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (16.1)$$

Or, nous pouvons utiliser d'une part la définition de la densité volumique de charges :

$$Q_{\text{int}} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\tau \quad (16.2)$$

et d'autre part le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\vec{E}) d\tau \quad (16.3)$$

Nous obtenons alors :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\vec{E}) d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau \quad (16.4)$$

ou encore :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left(\text{div}(\vec{E}) - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) d\tau = 0 \quad (16.5)$$

Cette intégrale est nulle quel que soit le volume $\mathcal{V}$ considéré, donc la fonction intégrée est identiquement nulle et on obtient l'équation locale de l'électrostatique :

Propriété — Equation de Maxwell-Gauss. Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est relié à la distribution de charges $\rho(M)$ par la relation :

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (16.6)$$

Nous pouvons interpréter cette équation comme suit : le champ électrique diverge autour des charges positives et converge vers les charges négatives.

 **Capacité exigible 1** A l'aide d'une analogie formelle, proposer un analogue de l'équation de Maxwell-Gauss pour la gravitation.

16.1.2 Equations de Laplace et de Poisson

Parfois, il est plus utile d'étudier le potentiel électrostatique, V , que le champ électrique.

 **Capacité exigible 2** Traduire l'équation de Maxwell-Gauss en termes de potentiel. Proposer une analogie formelle avec la gravitation. Interpréter l'équation obtenue en termes de géométrie des surfaces équipotentielles.

Nous obtenons les équations suivantes :

Théorème — Equation de Poisson. En régime stationnaire, le potentiel électrostatique V satisfait l'équation de Poisson :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (16.7)$$

où ρ est la densité volumique de charges.

Analogie avec la gravitation : le potentiel gravitationnel satisfait l'équation :

$$\Delta \Phi = 4\pi G\mu \quad (16.8)$$

où μ est la masse volumique.

L'équation de Poisson est formellement équivalente à l'équation de Maxwell-Gauss, elle ne traduit aucun phénomène physique supplémentaire mais est parfois une formulation plus pratique lorsque l'on travaille à l'aide de potentiels. Dans une région vide de charges, on obtient le cas particulier de l'équation de Laplace :

Théorème — Equation de Laplace. En régime stationnaire, dans une région vide de charges, le potentiel électrostatique $V(M)$ vérifie :

$$\Delta V = 0 \quad (16.9)$$

Analogie avec la gravitation : dans une région vide de matière, le potentiel gravitationnel Φ satisfait l'équation :

$$\Delta \Phi = 0 \quad (16.10)$$

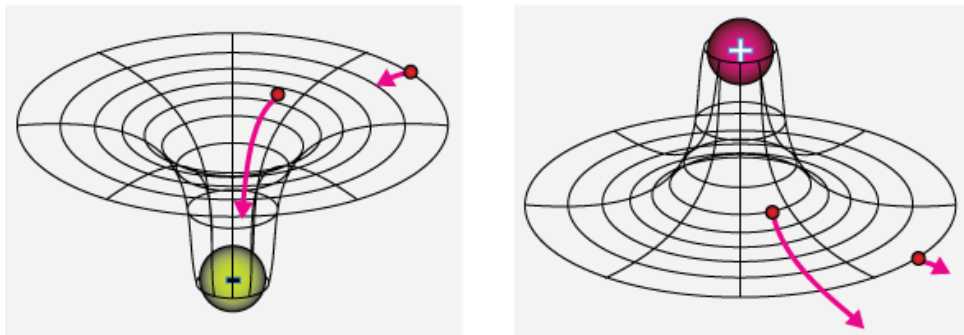


FIGURE 16.1 – Allure de potentiels électrostatiques autour de boules uniformément chargées positivement et négativement en volume. Les surfaces sont convexes dans les régions de charge négative et convexes dans les régions de charge positive. Dans les régions vides de charge, le laplacien du potentiel est nul et les courbures dans les différentes directions se compensent exactement. Source : xaktly.com.

Encart — Equation de Poisson et atome d'hydrogène. L'équation de Poisson n'est pas spécifique à l'électrostatique ou la gravitation. Elle se retrouve dans de nombreux domaines de la physique, en particulier en mécanique des fluides, mais aussi en thermodynamique : c'est l'équation de diffusion thermique en régime stationnaire et en présence d'un terme source d'énergie.

Sa résolution numérique est plus délicate que celle des équations différentielles temporelles, car c'est une équation implicite : connaître les conditions aux limites au bord du domaine suffit mathématiquement à déduire entièrement la solution. On ne peut donc pas utiliser la méthode d'Euler en intégrant l'équation de proche en proche à partir d'un unique point du bord du domaine : il faut résoudre l'équation en une seule étape (qui se fait souvent par une inversion de matrice).

Pour aller plus loin :

L'équation de Poisson joue un rôle important dans la résolution des états stationnaires de l'atome d'hydrogène. En effet, dans l'atome d'hydrogène, pour un état stationnaire, l'équation

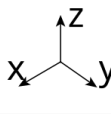
l:		$P_\ell^m(\cos \theta) \cos(m\varphi)$	$P_\ell^{ m }(\cos \theta) \sin(m \varphi)$	
0	s			
1	p			
2	d			
3	f			
4	g			
5	h			
6	i			
m:		6 5 4 3 2 1 0	-1 -2 -3 -4 -5 -6	

FIGURE 16.2 – Les harmoniques sphériques, solutions de l'équation de Poisson qui interviennent lors de la résolution de l'équation de Schrödinger pour l'atome d'hydrogène. Le symbole P_ℓ^m indique un polynôme de Legendre. Le nombre ℓ indique la sous-couche électronique. Chaque fonction d'onde peut contenir deux électrons (moment magnétique positif ou négatif). Source : Wikimedia Commons.

de Schrödinger pour un état stationnaire $\psi(M, t) = \varphi(M) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$ s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta \varphi(M) = (E - V(r)) \varphi(M) \quad (16.11)$$

On cherche des solutions sous forme de variables séparées en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) . On a alors $\varphi(M) = f(r)g(\theta, \phi)$. De plus le laplacien en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \quad (16.12)$$

et il vient par séparation des variables :

$$\frac{1}{r^2 f(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 f''(r) \right) + V(r) - E = \Delta g \quad (16.13)$$

où Δg est un laplacien 2D uniquement en fonction des coordonnées d'angle. Les deux membres sont égaux à une constante K car le premier membre ne dépend que de r alors que le second ne dépend que de θ et ϕ .

On obtient alors une équation de Poisson :

$$\Delta g = K \quad (16.14)$$

Les solutions de cette équation sont connues et appelées les harmoniques sphériques (ce sont des fonctions sinusoïdales de φ et des polynômes de Legendre en fonction de $\cos \theta$). Ces solutions correspondent à la structure des fonctions d'onde de l'électron dans l'atome d'hydrogène.

16.2 Lois locales de la magnétostatique

Dans le cadre de la magnétostatique, nous avons vu le théorème d'Ampère selon lequel les sources de champ magnétique sont les courants électriques. En particulier, la circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé est reliée au courant qui traverse ce contour. Pour pouvoir décrire ce phénomène à l'échelle locale, il est nécessaire d'avoir une description locale de la circulation.

16.2.1 Opérateur rotationnel. Théorème de Stokes.

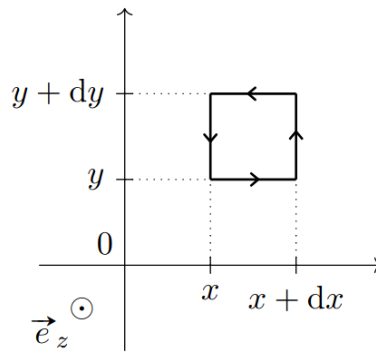


FIGURE 16.3 – Contour mésoscopique utilisé pour calculer la circulation du champ magnétique. Source : poly de cours de Maxime Champion.

Considérons, en coordonnées cartésiennes, un élément de surface cartésien situé dans un plan $z = c^{ste}$. Nous cherchons à calculer la circulation du champ magnétique $\vec{B}(M)$ le long du contour enlaçant cet élément de surface dans le sens trigonométrique. Cette circulation élémentaire, $d\mathcal{C}$, est donnée par :

$$d\mathcal{C} = B_x(x, y)dx + B_y(x + dx, y)dy + B_x(x, y + dy)(-dx) + B_y(x, y)(-dy) \quad (16.15)$$

$$= dxdy \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \quad (16.16)$$

$$= \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \cdot \vec{dS} \quad (16.17)$$

Ainsi, la circulation le long de ce contour élémentaire est directement liée aux dérivées spatiales croisées des composantes du champ magnétique. Il est possible de répéter le même calcul dans le cas d'éléments de surface situés dans des plans $x = c^{ste}$ et $y = c^{ste}$. Ceci nous amène à définir l'opérateur rotationnel :

Définition — Opérateur rotationnel. Le rotationnel est un opérateur vectoriel qui agit sur un

champ vectoriel. En coordonnées cartésiennes, le rotationnel d'un champ $\vec{A}$ s'écrit :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (16.18)$$

Par construction, nous avons fait en sorte que le rotationnel vérifie la propriété suivante :

Propriété La circulation élémentaire $d\mathcal{C}$ d'un champ vectoriel $\vec{A}$ le long d'un contour délimitant une surface élémentaire orientée $d\vec{S}$ est donné par :

$$d\mathcal{C} = \vec{\text{rot}}(\vec{A}) \cdot d\vec{S} \quad (16.19)$$

Nous avons, en pratique, vu uniquement cette propriété dans le cadre d'un contour rectangulaire en coordonnées cartésiennes, et nous admettons que le résultat est vrai quel que soit le contour.

Par intégration, on obtient alors le théorème de Stokes, qui relie la circulation le long d'un contour fermé macroscopique au rotationnel d'un vecteur :

Théorème — Théorème de Stokes. Soit $\vec{A}$ un champ vectoriel, alors la circulation de ce champ le long d'un contour Γ délimitant une surface $\mathcal{S}$ est donnée par :

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{\text{rot}}(\vec{A}) \cdot d\vec{S} \quad (16.20)$$

où le contour et la surface sont orientés conformément à la règle de la main droite.

Nous admettons également les deux propriétés suivantes qui sont propres au rotationnel :

Propriété Soit $\vec{A}$ un champ vectoriel. Alors :

$$\text{div}(\vec{\text{rot}}(\vec{A})) = 0 \quad (16.21)$$

■ **Démonstration** On se place en coordonnées cartésiennes. En combinant la définition de la divergence et du gradient on obtient :

$$\text{div}(\vec{\text{rot}}(\vec{A})) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (16.22)$$

Par théorème de Schwarz, les dérivées se simplifient deux à deux et on obtient le résultat. ■

Propriété Soit A un champ scalaire. Alors :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}(A)) = \vec{0} \quad (16.23)$$

■ **Démonstration** Considérons un contour Γ délimitant une surface $\mathcal{S}$, alors par le théorème de Stokes appliqué au vecteur $\vec{\text{grad}}(A)$:

$$\oint_{\Gamma} \vec{\text{grad}}(A) \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}(A)) \cdot d\vec{S} \quad (16.24)$$

Or le premier terme est nul car la circulation d'un gradient le long d'un contour fermé est nulle. La seconde intégrale est donc nulle quelle que soit la surface $\mathcal{S}$ considérée, ainsi le vecteur $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}(A))$ est identiquement nul. ■

16.2.2 Forme locale du théorème d'Ampère

 **Capacité exigible 3** A partir du théorème de Stokes, établir la forme locale du théorème d'Ampère.

Nous avons montré l'équation locale suivante, qui relie les sources de courant au champ magnétostatique :

Propriété En régime stationnaire, le champ magnétique $\vec{B}(M)$ est relié à la densité volumique de courant $\vec{j}(M)$ par la relation :

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} \quad (16.25)$$

Cette équation est une forme locale du théorème d'Ampère, elle montre que la densité volumique de courant est reliée aux dérivées spatiales du champ magnétique.

16.2.3 Forme locale de la conservation du flux

 **Capacité exigible 4** Rappeler la propriété de conservation du flux du champ magnétique et établir l'équation locale de conservation du flux.

On obtient l'équation dite de Maxwell-Thomson :

Propriété — Equation de Maxwell-Thomson. La conservation du flux du champ magnétique implique que :

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (16.26)$$

16.3 Lois locales de l'induction

L'électrostatique et la magnétostatique décrivent comment les champs (électrique ou magnétique) sont produits par des sources (charges ou courants) en régime stationnaire. Cependant, on sait que certains phénomènes électromagnétiques ne se manifestent qu'en régime instationnaire, c'est le cas notamment des phénomènes inductifs, que nous allons traduire localement dans cette partie.

16.3.1 Rappels sur l'induction

On rappelle ici quelques résultats vus sur l'induction en première année. Lorsqu'un circuit électrique est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$, si le champ magnétique est variable ou si le circuit électrique se déplace, une force électromotrice est générée dans le circuit. Cette force est donnée par la loi de Faraday :

Théorème — Loi de Faraday. Soit un circuit électrique matérialisé par un contour orienté Γ délimitant une surface $\mathcal{S}$. On définit la force électromotrice e_{ind} le long de ce circuit comme la circulation du champ électrique le long du contour :

$$e_{\text{ind}} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (16.27)$$

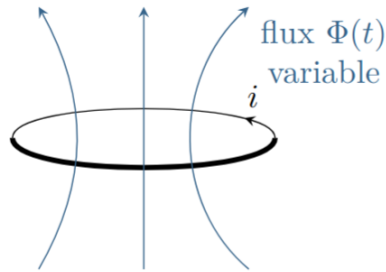
ainsi que le flux du champ magnétique à travers le contour par :

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (16.28)$$

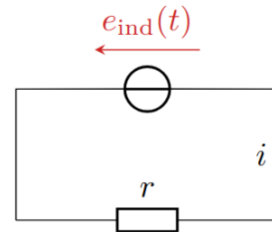
Alors, la variation de flux magnétique à travers le circuit génère par induction une force électro-

motrice induite non nulle :

$$e_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (16.29)$$



vision magnétique



vision électrique

FIGURE 16.4 – Représentation d'un circuit électrique siège d'un phénomène d'induction. À gauche : flux du champ magnétique à travers le circuit. À droite : schéma électrique équivalent. Source : poly de cours de Etienne Thibierge.

Dans la loi de Faraday, la variation de flux peut être causée par une variation temporelle du champ magnétique, ou encore par un déplacement ou une déformation du circuit électrique. En particulier, la loi de Faraday permet de décrire des situations aussi variées que le déplacement d'un circuit dans un champ variable (principe de fonctionnement de certains teslamètres) ; la production d'énergie par un champ variable (principe des plaques à induction) ou encore l'apparition d'une force électromotrice dans l'expérience des rails de Laplace (circuit déformable).

Les effets de l'induction se résument bien dans la loi de modération de Lenz :

Propriété — Loi de modération de Lenz. Les effets de l'induction tendent à s'opposer aux causes qui leur ont donné naissance.

Cette loi peut se vérifier qualitativement dans chacun des exemples mentionnés ci-dessus (cf TD).

16.3.2 Equation de Maxwell-Faraday

Dans le cadre de ce chapitre, nous ne sommes pas intéressés par le comportement de la force électromotrice dans un circuit électrique mais plutôt du champ électrique en général, en réponse à une variation temporelle du champ magnétique.

 **Capacité exigible 5** En exploitant la loi de Faraday, établir une loi locale de l'induction.

Nous obtenons l'équation de Maxwell-Faraday :

Propriété — Equation de Maxwell-Faraday. Le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ est affecté par les variations temporelles du champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ via le phénomène d'induction, qui se traduit localement par :

$$\text{rot}(\vec{E}) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (16.30)$$

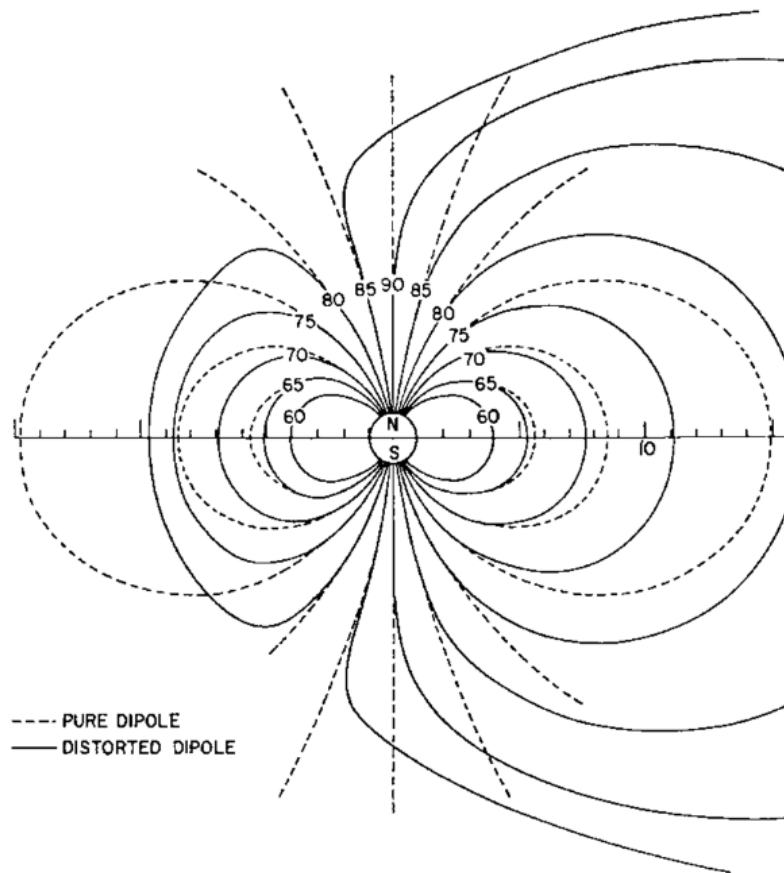


FIGURE 16.5 – Lignes de champ du champ magnétique terrestre en l'absence de vent solaire (en pointillés) et déformées par le vent solaire (en trait plein). Le soleil se trouve à gauche. Source : université de Stanford.

Encart — Tempêtes géomagnétiques. Les tempêtes géomagnétiques sont une excellente illustration de la forme locale du théorème d'Ampère, et des équations de Maxwell-Thomson et Maxwell-Faraday.

Le vent solaire est un flux de particules chargées dirigées vers la Terre. Ces particules subissent une force $\vec{F}_{\text{mag}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ et sont déviées par le champ magnétique terrestre (cf encart sur les aurores polaires dans le cours de magnétostatique). Cette déviation crée un courant électrique $\vec{j} = -\sum_i n_i q_i \vec{v}_i$. Par le théorème d'Ampère local, cette densité volumique de courant vient influencer le champ magnétique en retour. A l'équilibre, les lignes du champ magnétique terrestre sont ainsi déformées par le vent solaire.

Lorsqu'une éruption solaire se produit, le vent solaire augmente fortement et la déformation des lignes de champ est plus importante. On observe alors que les lignes de champ magnétique sont plus resserrées. Par conservation du flux (équation de Maxwell-Thomson), le champ magnétique $\vec{B}$ devient plus intense au voisinage de la Terre.

Cette variation brutale du champ magnétique, par induction, vient générer un champ électrique $\vec{E}$ (équation de Maxwell-Faraday). Ce champ est susceptible de perturber les réseaux de télécommunications ou même les grilles électriques de pays entiers. Les régions polaires sont les plus vulnérables, mais parfois ces effets peuvent également toucher des latitudes plus basses : en 2003, 11 transformateurs ont été mis hors d'usage par une tempête solaire en Afrique du Sud.

16.4 Conservation de la charge

Nous avons désormais établi quatre équations locales. Cependant, deux d'entre elles ont été établies à partir des lois de l'électrostatique et de la magnétostatique et ne sont donc valables qu'en régime stationnaire. En régime instationnaire, nous devons prendre en compte des phénomènes supplémentaires, et notamment la conservation de la charge électrique.

16.4.1 Conservation de la charge en géométrie cartésienne à une dimension

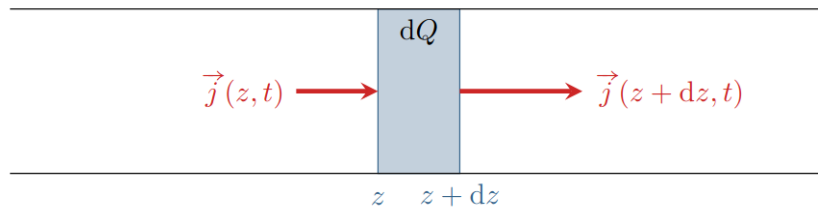


FIGURE 16.6 – Schéma pour le bilan de charge à une dimension. Source : poly de cours de Etienne Thibierge.

 **Capacité exigible 6** En s'inspirant de la démonstration du premier principe local et de l'analogie entre électromagnétisme et thermodynamique, établir la forme locale de la conservation de la charge en géométrie cartésienne 1D.

16.4.2 Bilan macroscopique

On souhaite désormais écrire la forme macroscopique de la conservation de la charge.

 **Capacité exigible 7** On s'intéresse à un volume $\mathcal{V}$ délimité par une surface fermée Σ . Écrire la forme macroscopique de la conservation de la charge.

16.4.3 Forme locale de la conservation de la charge

En trois dimension, la conservation de la charge peut s'écrire de la manière suivante :

Théorème — Loi locale de conservation de la charge. Soient $\rho(M, t)$ la densité volumique de charge et $\vec{j}(M, t)$ la densité volumique de courant, alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0 \quad (16.31)$$

Il est possible de faire une démonstration similaire à celle qui a été faite dans le cours de thermodynamique, en considérant un cube en coordonnées cartésiennes. Cette démonstration nous avait permis de définir la divergence. Cependant, maintenant que cet opérateur est connu, nous pouvons faire une démonstration plus rapide :

 **Capacité exigible 8** A partir du bilan macroscopique, établir l'équation locale de conservation de la charge.

16.5 Équations de Maxwell

16.5.1 Forme locale

Nous avons maintenant déterminé un ensemble d'équations locales :

- Deux équations toujours valables : équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Thomson
- Deux équations valables uniquement en régime stationnaire : l'équation de Maxwell-Gauss et la forme locale du théorème d'Ampère
- Et l'équation de conservation de la charge, toujours valable mais qui ne fait pas intervenir directement les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

Pour obtenir un système d'équations qui caractérise entièrement le champ électromagnétique, nous avons besoin d'équations qui sont toujours valables, même en régime instationnaire. C'est le cas de la conservation de la charge. Or, si nous prenons la divergence de la forme locale du théorème d'Ampère, nous obtenons en régime permanent :

$$\operatorname{div}(\vec{j}) = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{B})) = 0 \quad (16.32)$$

par propriété de la divergence. Comme nous sommes en régime stationnaire ceci est compatible avec le principe de conservation de la charge. Or en régime instationnaire, on s'attend toujours à ce que la conservation de la charge soit vérifiée, on doit donc avoir :

$$\operatorname{div}(\vec{j}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (16.33)$$

Pour que cette équation soit satisfaite, il n'est pas possible de garder les formes locales des théorèmes de Gauss et d'Ampère telles qu'elles sont. Il est nécessaire de les modifier. On ne sait pas *a priori* comment les équations doivent être modifiées, mais une modification qui convient est la suivante : on suppose que l'équation de Maxwell-Gauss reste valable en régime stationnaire, et on rajoute un terme instationnaire à la forme locale du théorème d'Ampère pour obtenir l'équation dite de Maxwell-Ampère :

Propriété — Equation de Maxwell-Ampère. On postule que le champ magnétique est relié au champ électrique et à la densité volumique de courants par la relation suivante :

$$\operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (16.34)$$

 **Capacité exigible 9** Vérifier que les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère sont bien compatibles avec la conservation de la charge.

Nous obtenons alors les quatre équations de Maxwell. Ces équations sont considérées comme un postulat, en effet :

- Nous avons établi les lois locales à partir de lois macroscopiques phénoménologiques (théorème d'Ampère, théorème de Gauss, loi de Faraday) qui reposent sur l'expérience et non pas sur des fondements théoriques ;
- Nous avons postulé, sans aucune démonstration, que l'équation de Maxwell-Gauss reste valable en régime instationnaire et nous avons postulé la forme de l'équation de Maxwell-Ampère pour qu'elle satisfasse le principe de conservation de la charge.

Les équations sont les suivantes :

Théorème — Équations de Maxwell. Les champs magnétique $\vec{B}(M, t)$ et électrique $\vec{E}(M, t)$ satisfont aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} & (\text{Maxwell - Gauss}) \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (\text{Maxwell - Faraday}) \\ \operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) & (\text{Maxwell - Ampere}) \\ \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 & (\text{Maxwell - Thomson}) \end{cases} \quad (16.35)$$

où $\rho(M, t)$ est la densité volumique de charges, et $\vec{j}(M, t)$ est la densité volumique de courant.

 **Capacité exigible 10** Proposer une interprétation physique du terme $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ dans l'équation de Maxwell-Faraday, souvent appelé "courant de déplacement".

16.5.2 Forme intégrale des équations de Maxwell

 **Capacité exigible 11** Donner la forme intégrale des équations de Maxwell, appliquées à des volumes, surfaces ou contours macroscopiques.

16.6 Energie électromagnétique

16.6.1 Force locale électromagnétique

On rappelle l'expression de la force de Lorentz appliquée à une particule chargée qui a été admise en première année (il s'agit d'une loi empirique qui se justifie par l'expérience) :

Théorème — Force de Lorentz. Une particule chargée, de charge q , et de vitesse $\vec{v}$, est soumise dans un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ à la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (16.36)$$

Considérons un élément de volume $d\tau$. Nous souhaitons établir l'équivalent volumique de cette force. Pour cela, nous pouvons remarquer que, si l'on note n_i le nombre de porteurs de charges de l'espèce i par unité de volume, q_i leur charge et $\vec{v}_i$ leur vitesse :

$$\rho = \sum_i n_i q_i \quad \text{et} \quad \vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i \quad (16.37)$$

La force qui s'applique au volume correspond, par ailleurs, à la somme des forces qui s'appliquent sur chacun des porteurs, sachant que le nombre total de porteurs de l'espèce i dans le volume $d\tau$ est donné par $n_i d\tau$. Ainsi :

$$d\vec{F} = \sum_i n_i d\tau q_i (\vec{E} + \vec{v}_i \wedge \vec{B}) \quad (16.38)$$

$$= \left(\sum_i q_i n_i \right) \vec{E} d\tau + \left(\sum_i q_i n_i \vec{v}_i \right) \wedge \vec{B} d\tau \quad (16.39)$$

$$= (\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}) d\tau \quad (16.40)$$

On en déduit la force électromagnétique par unité de volume :

Théorème L'équivalent volumique des forces de Lorentz est donné par :

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (16.41)$$

où ρ est la densité volumique de charges et $\vec{j}$ est la densité volumique de courant.

 **Capacité exigible 12** Par un raisonnement analogue, établir l'expression de la puissance cédée aux porteurs de charge par la force volumique de Lorentz.

Théorème — Puissance volumique de la force de Lorentz. La puissance fournie par la force de Lorentz aux porteurs de charge par unité de volume, notée $\mathcal{P}_v$, est donnée par :

$$\mathcal{P}_v = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (16.42)$$

16.6.2 Equation locale de conservation de l'énergie

Nous souhaitons désormais faire un bilan énergétique local. Pour cela, nous allons calculer la puissance $\mathcal{P}_v$.

Nous pouvons calculer cette puissance en réinjectant l'équation de Maxwell-Ampère dans l'expression de $\mathcal{P}_v$:

$$\mathcal{P}_v = \vec{E} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{\text{rot}}(\vec{B}) - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (16.43)$$

Par ailleurs nous allons utiliser la propriété suivante (qui n'est pas à connaître) : pour deux champs de vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ on a :

$$\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\text{rot}}(\vec{A}) - \vec{A} \cdot \vec{\text{rot}}(\vec{B}) \quad (16.44)$$

Ainsi :

$$\vec{E} \cdot \vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \text{div}(\vec{B} \wedge \vec{E}) + \vec{B} \cdot \vec{\text{rot}}(\vec{E}) \quad (16.45)$$

$$= \text{div}(\vec{B} \wedge \vec{E}) - \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (16.46)$$

où on a utilisé l'équation de Maxwell-Faraday. Nous obtenons alors :

$$\mathcal{P}_v = \text{div} \left(\frac{\vec{B} \wedge \vec{E}}{\mu_0} \right) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (16.47)$$

En remarquant que les deux derniers termes peuvent s'écrire comme une dérivé temporelle, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right) + \text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0 \quad (16.48)$$

Nous voyons apparaître la divergence d'un vecteur, ce qui est classique dans les équations de conservation. Nous définissons ainsi le vecteur de Poynting :

Définition — Vecteur de Poynting. Nous définissons le vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad (16.49)$$

Ce vecteur correspond à la densité volumique de flux d'énergie électromagnétique. Il s'exprime en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$. $\vec{\Pi}$ est analogue au vecteur densité de flux thermique (il correspond à un transfert d'énergie par rayonnement électromagnétique).

et nous identifions alors l'énergie électromagnétique volumique :

Propriété L'énergie électromagnétique par unité de volume est donnée par :

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \quad (16.50)$$

On obtient alors l'équation locale de conservation de l'énergie :

Théorème — Equation locale de conservation de l'énergie. La conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} + \text{div}(\vec{\Pi}) + \mathcal{P}_v = 0 \quad (16.51)$$

où u_{em} est la densité volumique d'énergie électromagnétique, $\vec{\Pi}$ le vecteur de Poynting, et $\mathcal{P}_v$ la puissance volumique cédée aux porteurs de charge.

 **Capacité exigible 13** Interpréter les différents termes de cette équation, et les deux termes de la densité volumique d'énergie électromagnétique.

16.6.3 Energie électrique

Pour mieux comprendre à quoi correspond la densité volumique d'énergie électromagnétique, nous pouvons nous intéresser au condensateur parfait, que nous avons étudié dans le cours d'électrostatique.

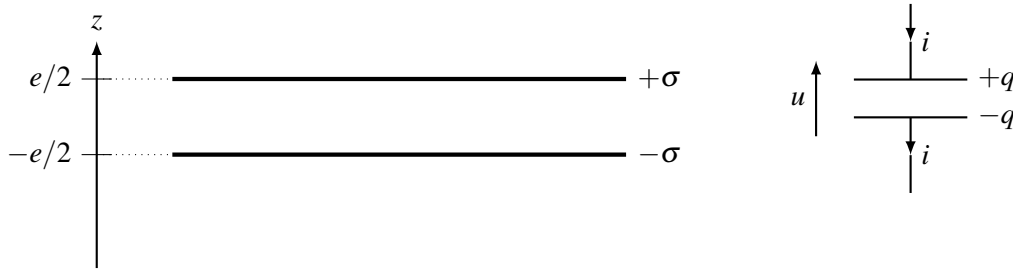


FIGURE 16.7 – Modèle du condensateur plan. A gauche : modèle électrostatique. A droite : modèle simplifié utilisé en électronique.

Considérons un condensateur parfait constitué de deux armatures de surface S et séparées d'une épaisseur $e \ll S$. On note $\pm Q = \pm \sigma S$ la charge portée par chacune des armatures, où σ est la densité surfacique de charges. Nous avons vu dans le cours d'électrostatique que dans ce condensateur règne un champ électrique :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z \quad (16.52)$$

Alors, la densité volumique d'énergie électromagnétique est donnée par :

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad (16.53)$$

Comme le champ électrique est nul à l'extérieur des armatures, l'énergie électromagnétique totale stockée dans le condensateur s'obtient en intégrant la densité volumique d'énergie sur le volume $V = eS$ entre les armatures :

$$\mathcal{E}_{\text{em}} = \iiint_V u_{\text{em}} d\tau = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \times eS = \frac{Q^2 e}{2S\epsilon_0} \quad (16.54)$$

Nous pouvons alors reconnaître l'expression de la capacité du condensateur :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e} \quad (16.55)$$

et en remplaçant, nous retrouvons la formule d'électrostatique que nous avons déduite des lois macroscopiques :

$$\mathcal{E}_{\text{em}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (16.56)$$

16.6.4 Energie magnétique

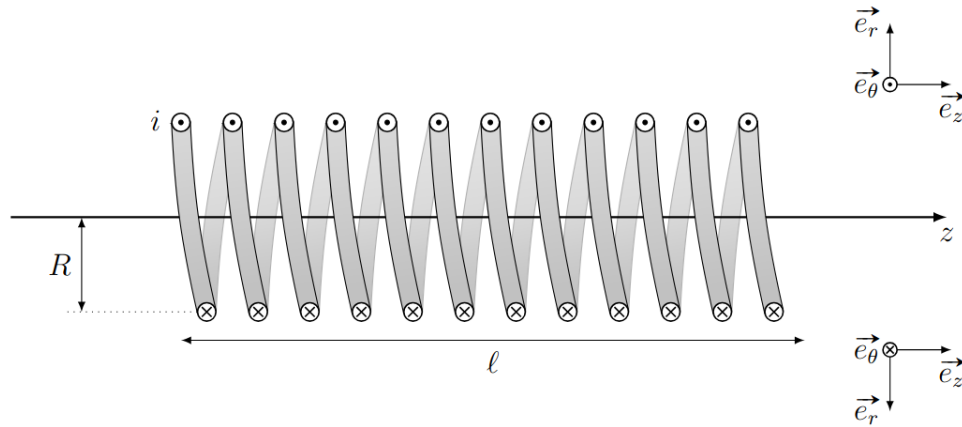


FIGURE 16.8 – Le solénoïde infini

 **Capacité exigible 14** Mener un raisonnement similaire pour retrouver l'expression de l'énergie stockée dans une bobine, dans le cadre du modèle du solénoïde infini.