

Corrigé - TD 16 Équations de Maxwell

I - Révisions sur l'induction

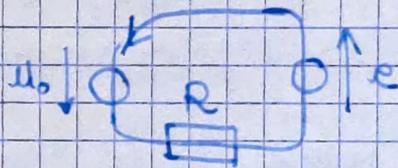
1 - Haut-parleur

1. On a un circuit déformable, dans le circuit il existe une force électromotrice induite donnée par la loi de Faraday $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$

où $\Phi = S \times B$ avec S la surface du circuit. Ainsi :

$$\mathcal{E} = -B \cdot \frac{dS}{dt} = -B \times a \dot{x}$$

2. Le schéma électrique est :



D'où : $i = \frac{U_0 + \mathcal{E}}{R}$

{tige + membrane} est soumis à :

- * la force de rappel du ressort
- * la force de Laplace
- * le frottement fluide

En appliquant le 1^{er} principe à ce système dans le référentiel terrestre

on trouve : $m \ddot{x} = -kx - \alpha \dot{x} + ia(\vec{e}_y + B\vec{e}_z) \cdot \vec{e}_x$
 $= -kx - \alpha \dot{x} + iaB$

D'où :

$$\begin{cases} R i = U_0 - aB \dot{x} & \text{équation électrique} \\ m \ddot{x} = -kx - \alpha \dot{x} + iaB & \text{équation mécanique} \end{cases}$$

3. On obtient :

$$R m \ddot{x} = -Rkx - R\alpha \dot{x} + aB(U_0 - aB \dot{x})$$

ou encore :

$$\left[\ddot{x} + \frac{R\alpha + (aB)^2}{Rm} \dot{x} + \frac{k}{m} x \right] = \frac{aB}{Rm} U_0$$

Il s'agit d'un système d'ordre 2. Les phénomènes d'induction se traduisent dans:

- * Le freinage: force de Laplace qui agit sur la membrane, contrôlée par la tension de consigne u_0
- * L'amortissement: on a un freinage inductif de la tige (comme en $(aB)^2$).

4. On multiplie l'équation électrique par i et l'équation mécanique par \dot{x} :

$$\begin{cases} Ri^2 = u_0 i - i a B \dot{x} \\ \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right)}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} k x^2 \right)}_{\text{énergie potentielle}} = \underbrace{-a \dot{x}^2 + i a B \dot{x}}_{\substack{\text{dissipation} \\ \text{par} \\ \text{frottements}}} \end{cases}$$

$u_0 i$: puissance fournie par le générateur

Ri^2 : puissance dissipée par effet Joule

$i a B \dot{x}$: puissance convertie d'énergie électrique en énergie mécanique (= puissance de la force de Laplace).

2 - Freinage d'une roue par induction

1. Lorsque la roue tourne, le flux du champ magnétique à travers un circuit "élémentaire" constitué de deux rayons adjacents et un arc de cercle va être modifié ce qui va créer un phénomène d'induction. Ceci va ralentir la roue car les effets de l'induction s'opposent aux courants qui leur ont donné naissance.

2. a. On a:
$$\begin{aligned} d\vec{F}_L &= i_0 d\vec{l} \wedge \vec{B} = i_0 dr \vec{e}_r \wedge B \vec{e}_z \\ &= -i_0 B dr \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

D'où son moment autour de l'axe (Oz):

$$dM = (\vec{OM} \wedge d\vec{F}_L) \cdot \vec{e}_z = r \vec{e}_r \wedge (-i_0 B dr \vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_z$$

Soit : $dM = -i_0 B r dr$

b. On a ainsi $M = \int_{r=0}^L dM = -i_0 B \frac{L^2}{2}$ (on intègre sur le rayon)

3. a. $P_L = M \times \omega = -i_0 B \omega \frac{L^2}{2}$

b. Cette puissance est l'opposée de la puissance fournie au circuit électrique par la force électromotrice. En effet la force de Laplace convertit l'énergie mécanique en énergie électrique (elle ne dissipe pas d'énergie). Ainsi la force électromotrice vérifie : $P_L + e(t) \times i = 0 \Rightarrow e(t) = \frac{BL^2 \omega(t)}{2}$

4. a. $i_1 = -\frac{U}{R}$ et $u = e - Ri_0$ donc $i_0 = \frac{e - u}{R}$

b. Par la loi des nœuds $\frac{N}{2} i_1 + \frac{N}{2} i_0 = 0 \Leftrightarrow i_0 + i_1 = 0$

Donc $\frac{e - 2u}{R} = 0$ soit $u = \frac{e}{2}$ et :

$i_1 = -\frac{e}{2R} = -\frac{BL^2}{4R} \times \omega$ $i_0 = +\frac{BL^2}{4R} \omega$

5. a. On a la roue qui est soumise au moment des forces de Laplace de tous les rayons immergés dans le champ magnétique :

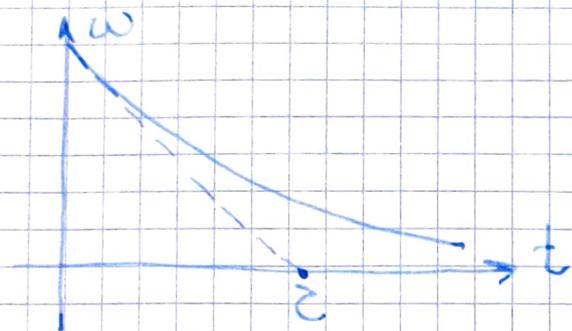
$M_{tot} = M \times \frac{N}{2} = -i_0 B \times \frac{N}{2} \times \frac{L^2}{2}$ avec $i_0 = \frac{BL^2}{4R} \omega$

Donc : $M_{tot} = -\frac{1}{16} \frac{NB^2 L^4}{R}$

On applique le théorème du moment cinétique à la roue dans le référentiel terrestre galiléen :

D'où : $\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2} \omega = 0$ ou $\tau = \frac{16RJ}{NB^2 L^4}$

b. la solution est $\omega(t) = \omega_0 e^{-t/\tau}$



6. a. Il faudrait un temps infini pour immobiliser le véhicule ce qui n'est pas souhaitable, on a également besoin de frottements solides (frein classique).

b. L'énergie cinétique est convertie en énergie électrique par le phénomène d'induction. Celle-ci est ensuite dissipée par effet Joule.

c. Le dispositif ne s'utilise pas comme un frein à disque classique.

II - Potentiel électrostatique

3 - Capteurs de niveau d'eau capacitifs

1. Le problème est invariant par translation selon \vec{e}_z (prix perpendiculairement à l'axe du cylindre) car les effets de bord sont négligeables, et par rotation autour de (Oz) .

Ainsi V ne dépend que de r .

2. Le milieu entre les cylindres est non chargé donc V satisfait l'équation de Laplace: $\Delta V = 0$

Donc:
$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

D'où: $r \frac{dV}{dr} = K$ une constante, et $\frac{dV}{dr} = \frac{K}{r}$ soit:

$$V(r) = K \ln\left(\frac{r}{b}\right) + K'$$
 où K et K' sont constantes.

$V(r) = 0$ en $r = b$ donc $K' = 0$. De plus $V(r=a) = V_0$ donc $K \ln\left(\frac{a}{b}\right) = V_0$ soit:

$$k = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} = - \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \text{ etc.}$$

$$V(r) = -V_0 \times \frac{\ln(r/b)}{\ln(b/a)}$$

$$3. \vec{E} = -\text{grad } V = - \frac{dV}{dr} \vec{e}_r = \left[\frac{V_0}{r} \times \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \vec{e}_r \right]$$

$$4. E_{\text{elec}} = \iiint_V \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}^2 d\tau \quad \text{où } V \text{ est le volume entre les cylindres (séparé entre air et liquide)}$$

On peut intégrer sur des cylindres élémentaires entre r et $r+dr$ de volume $\begin{cases} 2\pi r dr \times h & \text{pour le liquide} \\ 2\pi r dr \times (H-h) & \text{pour l'air} \end{cases}$ et on prend $\epsilon_r = 1$ dans l'air. Alors:

$$E_{\text{elec}} = \int_a^b \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}^2 \times 2\pi r dr h + \int_a^b \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 \times 2\pi r dr (H-h)$$

$$= \pi \frac{\epsilon_0 V_0^2}{\left(\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)^2} \times \int_a^b \frac{r dr}{r^2} \times (\epsilon_r h + H-h)$$

$$E_{\text{elec}} = \frac{\pi \epsilon_0 V_0^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \times (H + (\epsilon_r - 1)h)$$

5. On a donc un condensateur de capacité C telle que $E_{\text{elec}} = \frac{1}{2} C V_0^2$ donc:

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} (H + (\epsilon_r - 1)h)$$

C varie linéairement en fonction de h donc la mesure de C permet de trouver h .

6. Il faut que $\epsilon_r \neq 1$ sinon C ne dépend plus de h . De plus si le liquide est conducteur les armatures sont connectées et $V_0 = 0$ donc

La sonde n'est plus utilisable.

4 - Étude d'une solution colloïdale

1. a. Pour des particules indépendantes, la probabilité pour une particule de se trouver dans un état d'énergie E est proportionnelle à $\exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$.

b. La probabilité d'un cation d'être à une distance r est donc $P(r) \propto \exp\left(-\frac{eV(r)}{k_B T}\right)$ d'où $N_+(r) = K_+ e^{-\frac{eV(r)}{k_B T}}$

De même $N_-(r) = K_- \times e^{+\frac{eV(r)}{k_B T}}$

où K_+ et K_- sont des constantes.

c. On a $\exp\left(\pm \frac{eV(r)}{k_B T}\right) \approx 1$ si $eV \ll k_B T$ et donc :

$N_+(r) \approx K_+$ $N_-(r) \approx K_-$. On prendra ainsi $K_+ = K_- = N_0$.

Alors :
$$p(r) = e \times N_+ - e \times N_- = N_0 e \left(e^{-\frac{eV}{k_B T}} - e^{+\frac{eV}{k_B T}} \right)$$

D'où :
$$p(r) = -2N_0 e \operatorname{sh}\left(\frac{eV}{k_B T}\right)$$

2. $V(r)$ satisfait l'équation de Poisson $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$

$$\text{Or : } \Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} + \frac{d^2 V}{dr^2}$$

$$\text{De plus en posant } U = rV : \quad \frac{dU}{dr} = r \frac{dV}{dr} + V$$

$$\text{d'où } \frac{d^2 U}{dr^2} = 2 \frac{dV}{dr} + r \frac{d^2 V}{dr^2} = r \times \Delta V = -r \times \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{Soit : } U''(r) = +2N_0 e r \operatorname{sh}\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right)$$

$$\frac{r}{eV \ll k_B T} \frac{2N_0 e^3}{k_B T} \times rV(r)$$

On conclut que : $U''(r) - \frac{2N_0 e^2}{\epsilon_0 k_B T} U(r) = 0$

Posons $\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2N_0 e^2}}$, alors $U(r) = A e^{-\frac{r}{\lambda}} + B e^{\frac{r}{\lambda}}$

Et $V(r) = \frac{A}{r} e^{-\frac{r}{\lambda}} + \frac{B}{r} e^{\frac{r}{\lambda}}$. $B = 0$ car $V(r)$ ne peut pas diverger, ainsi : $V(r) = \frac{A}{r} e^{-\frac{r}{\lambda}}$

$$3. \vec{E} = - \text{grad } V = - \frac{dV}{dr} \vec{e}_r = \left(\frac{A}{r^2} + \frac{A}{\lambda r} \right) e^{-\frac{r}{\lambda}} \vec{e}_r$$

On applique le théorème de Gauss, à une sphère de centre O et de rayon R correspondant à la particule :

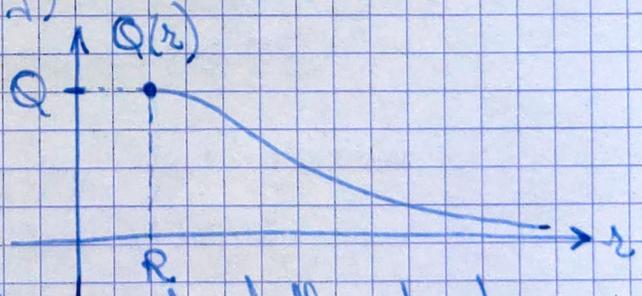
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{A}{R} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\lambda} \right) e^{-\frac{R}{\lambda}} \times 4\pi R^2 = 4\pi A \left(1 + \frac{R}{\lambda} \right) e^{-\frac{R}{\lambda}} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

D'où : $A = \frac{Q e^{R/\lambda}}{4\pi \epsilon_0 \left(1 + \frac{R}{\lambda} \right)}$

4. a. On applique le théorème en utilisant une sphère de rayon r , on trouve :

$$Q(r) = 4\pi A \epsilon_0 \left(1 + \frac{r}{\lambda} \right) e^{-\frac{r}{\lambda}} \text{ soit :}$$

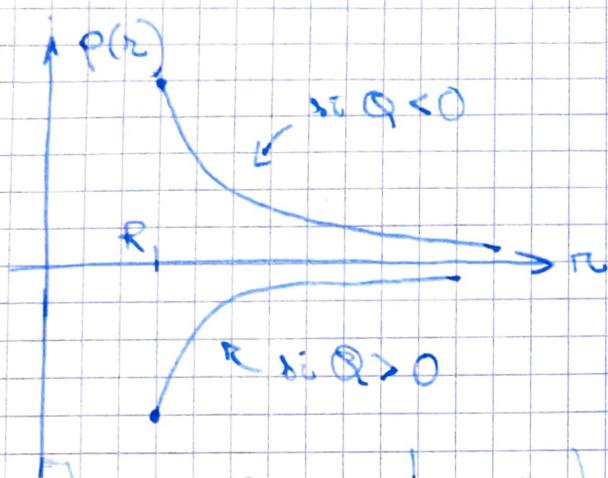
$$Q(r) = Q \frac{1 + \frac{r}{\lambda}}{1 + \frac{R}{\lambda}} \cdot e^{\frac{R-r}{\lambda}}$$



Les anions/cations vont se placer préférentiellement autour des colloïdes chargés positivement/négativement ce qui va avoir pour effet d'écranter leur charge.

b. On a vu que $\rho(r) = -2N_0 e \ln \left(\frac{eV}{k_B T} \right) \approx -\frac{2N_0 e^2}{k_B T} V$

Soit $\rho(r) \approx -\frac{\epsilon_0}{\lambda^2} \times V = -\frac{A \epsilon_0}{\lambda^2 r} \times e^{-\frac{r}{\lambda}}$



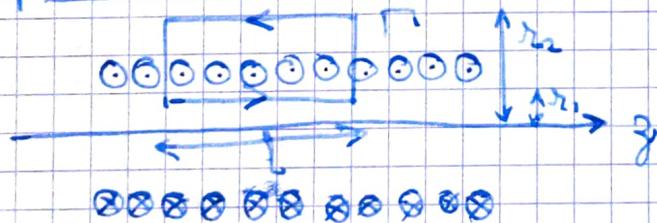
Les ions vont venir écranter la charge Q .

6. On voit que $\lambda \propto \frac{1}{\sqrt{N_0}}$ est la distance caractéristique au delà de laquelle les charges des colloïdes sont écranées. Si on ajoute du sel, on augmente N_0 donc on diminue λ , les charges seront écranées et l'interaction électrostatique ne sera plus assez efficace pour empêcher la floculation.

III - Équations de Maxwell

5 - Champ dans un solénoïde

1.



Le solénoïde étant très long on pourra supposer que le problème est invariant par translation selon \vec{e}_z . On a également invariance par rotation autour de (O_z) . De plus si M est un point de l'espace, $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie des courants donc un plan d'antisymétrie de \vec{B} , donc \vec{B} est normal à ce plan et : $\vec{B} = B(r) \vec{e}_z$.

On étudie le contour Γ :

$$I_{enc} = n l \times i \quad \text{et} \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = (B(r_1) - B(r_2)) \times l$$

Par le théorème d'Ampère: (valable en régime lentement variable) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{encasé}}$ et donc:

$$B(r_1) - B(r_2) = \mu_0 n i$$

De plus si on prend $r_2 > a$ on trouve que $B(r) = 0$ à l'extérieur du solénoïde, l'énergie magnétique ne pouvant être infinie $B(r) = 0$ pour $r > a$ et donc $B(r_1) = \mu_0 n i$ soit:

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e}_z} \text{ dans le solénoïde.}$$

2. On va avoir un phénomène d'induction: $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 n \frac{di}{dt} \vec{e}_z$ est invariant par translation selon \vec{e}_z et rotation d'angle θ donc il en est de même pour les composantes de \vec{E} .

De plus si M est un point de l'espace, $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie de $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ donc c'est un plan d'antisymétrie de \vec{E} et \vec{E} est normal à ce plan, d'où:

$$\boxed{\vec{E} = E(r, t) \vec{e}_\theta}$$

3. On intègre l'équation de Maxwell-Faraday sur une surface S délimitée par un contour fermé Γ :

$$\iint \text{rot}(\vec{E}) \cdot d\vec{S} = \iint -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Or par théorème de Stokes: $\iint \text{rot}(\vec{E}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l}$.

$$\text{D'où: } \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

4. On applique l'équation à un cercle de rayon r et d'axe (Oz) .

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 2\pi r E(r, t)$$

$$\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \pi r^2 \times \mu_0 n \frac{di}{dt} \Rightarrow 2\pi r E(r, t) = -\pi r^2 \mu_0 n \frac{di}{dt}$$

$$\text{D'où } \boxed{\vec{E} = -\frac{\mu_0 n r}{2} \frac{di}{dt} \vec{e}_\theta}$$

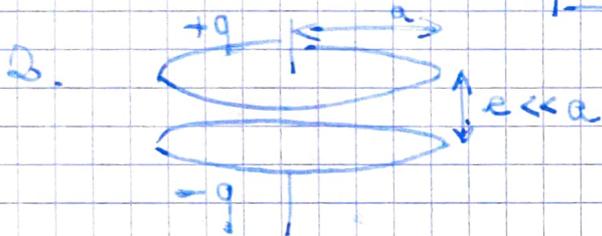
6 - Charge d'un condensateur

1. Loi des mailles : $U_0 = u + Ri$ or $i = C \frac{du}{dt}$

D'où : $\tau \frac{du}{dt} + u = U_0$ avec $\tau = RC$

Ainsi, comme $u(t=0) = 0$ (continuité de u aux bornes d'un condensateur) :

$$u(t) = U_0(1 - e^{-t/\tau})$$



On a vu en cours que :

$$C = \frac{\epsilon_0 \cdot \pi a^2}{e} \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_y$$

a. Ici $\begin{cases} q = C u & \text{par définition de la capacité} \\ q = \sigma \times \pi a^2 & \text{par définition de la charge surfacique} \end{cases}$

Donc : $\vec{E} = \frac{q}{\pi a^2 \epsilon_0} \vec{e}_y = \frac{C u}{\pi a^2 \epsilon_0} \vec{e}_y = \boxed{\frac{u}{e} \vec{e}_y}$

b. Entre les armatures, \vec{E} varie en fonction du temps ce qui crée un champ magnétique via le terme de courant de déplacement :

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

car ici $\vec{j} = \vec{0}$. \vec{j} et $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ jouent un rôle similaire et donc on

peut étudier la symétrie de $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$:

* $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est invariant par ~~translation~~ rotation d'angle θ donc

les composantes de \vec{B} aussi ;

* Soit M un point de l'espace, le plan $(M, \vec{e}_z, \vec{e}_r)$ est plan de symétrie de $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ donc c'est un plan d'antisymétrie de \vec{B} et \vec{B} est normal à ce plan.

D'où : $\vec{B} = B(r, z) \vec{e}_\theta$

c. On a alors $\text{rot}(\vec{B}) = -\frac{\partial B}{\partial z} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(rB)}{\partial r} \vec{e}_z$

$$\text{Et } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \frac{du}{dt} \vec{e}_z.$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} \frac{\partial B}{\partial z} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rB)}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \times \frac{du}{dt} \end{cases}$$

$$\text{On a } [\text{rot } \vec{B}]_{(r=0)} = 0_r$$

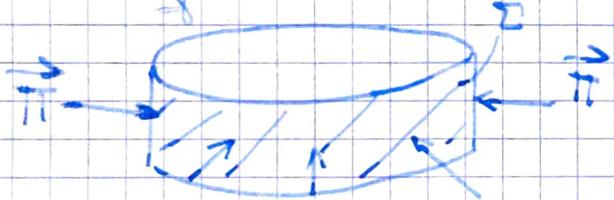
$$\text{Donc } rB(r) = \int_0^r \frac{1}{c^2} \frac{du}{dt} r' dr' = \frac{r^2}{2c^2} \frac{du}{dt}$$

$$\text{Et : } B(r) = \frac{r}{2c^2} \frac{du}{dt} \quad \text{soit } \boxed{\vec{B} = \frac{r}{2c^2} \frac{du}{dt} \vec{e}_\theta}$$

$$3. a. \quad \vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \times \frac{u}{\epsilon} \times \frac{r}{2c^2} \frac{du}{dt} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta \quad \text{avec } \mu_0 \epsilon = \frac{1}{c^2}$$

$$\text{Soit : } \boxed{\vec{\Pi} = \frac{-u \epsilon_0}{2\epsilon^2} \frac{du}{dt} r \vec{e}_r} \quad \text{donc de l'énergie électromagnétique}$$

rentre entre les armatures. La puissance qui entre et est dissipée par le flux de $\vec{\Pi}$ à travers le cylindre délimitant les armatures:



$$P_{\text{entrante}} = \iint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = 2\pi a r \|\vec{\Pi}\|$$

orientés vers l'intérieur

$$\text{Donc : } \boxed{P_{\text{entrante}} = \epsilon_0 \frac{\pi a^2 u}{\epsilon} \frac{du}{dt}}$$

Interprétation (difficile) : les fils transportent les charges mais l'énergie est transportée par le champ électromagnétique : les courants et tensions variables génèrent un champ (\vec{E}, \vec{B}) qui va faire converger l'énergie vers l'intérieur du condensateur.

$$b. \text{ On remarque : } P_{\text{entrante}} = C u \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u^2 \right)$$

Ainsi la puissance électromagnétique entrant dans le condensateur correspond à la variation d'énergie électromagnétique stockée.

c. On en déduit :

$$E_m = \int_{t=0}^{\infty} P_{\text{entrante}} dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u^2 \right) dt = \frac{1}{2} C U_0^2.$$

On retrouve bien le résultat classique.

7 - Expérience de Rowland

1. Les charges en rotation créent un courant (ou plutôt une densité volumique de courants) $\vec{j} = n \cdot q \cdot \vec{v}$ qui va alors engendrer un champ magnétique (équation de Maxwell - Ampère).
2. Soit un point M sur l'axe, les plans contenant l'axe sont tous plans d'antisymétrie de la distribution de courants donc $\vec{B}(M)$ est contenu dans tous ces plans et $\vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_z$.
3. On étudie un élément de disque entre R et R+dR. Il a une surface $dS = 2\pi R dR$ d'où une charge $dQ = \rho \times \frac{dS}{\sigma_0}$
$$dQ = \frac{2\pi R dR}{\pi a^2} = 2 \frac{R dR}{a^2}.$$

Le courant qui le parcourt correspond à une charge dQ qui passe pendant $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (période de révolution du disque) soit :

$$di = \frac{dQ}{T} = \frac{2 \cdot \frac{R dR}{a^2} Q}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{R dR}{a^2} Q$$

Ceci correspond à une spire de rayon R et de courant di qui crée un champ :

$$Et : \vec{B} = \int_{R=0}^a d\vec{B} = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi a^2} \times a \times \vec{e}_z = \boxed{\frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi a} \vec{e}_z}$$

8 - Principe d'une plaque à induction

1. a. L'équation s'écrit: $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Dans le cadre de l'ARQS on peut supposer les champs lentement variables et $\epsilon_0 \|\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\| \ll \|\vec{j}\|$, d'où: $\boxed{\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}}$

b. On considère un contour Γ entourant des fils électriques à travers lesquels circulent des courants (ici i_1, i_2 et i_3)

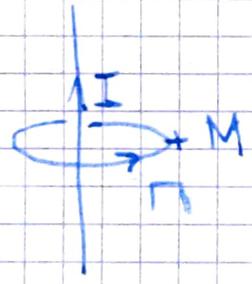


On intègre l'équation de Maxwell-Ampère sur une surface S s'appuyant sur Γ : $\iint_S \vec{\text{rot}}(\vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$

Par théorème de Stokes et par définition de \vec{j}^S :

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \times I_{\text{enc}}}$$

2. a.



Soit M un point de l'espace, le plan passant par M et contenant (Oz) est plan de symétrie de la distribution de courants donc \vec{B} est normal à ce plan (selon \vec{e}_θ). De plus la distribution de courants est invariante par translation selon \vec{e}_z et rotation d'angle θ donc

$$\boxed{\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta}$$

b. On choisit un contour Γ d'axe (Oz) et de rayon r orienté selon \vec{e}_θ , alors $I_{\text{enc}} = I$ et $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r)$.

D'où: $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ et $\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta}$

3. a. Tout plan passant par M et contenant (Oz) est plan d'antisymétrie de la distribution de courants donc $\vec{B}(M)$ est dans tous ces plans ainsi $\vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_x = B(x) \vec{e}_x$ car $M \in (Ox)$

De plus par la règle de la main droite $B(x) > 0$.

$$b. \text{ On a } \tan(\alpha) = \frac{r}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$$

$$\text{D'où : } (1 - \sin^2 \alpha) \frac{r^2}{x^2} = \sin^2 \alpha$$

$$\text{Ainsi : } \frac{r^2}{x^2} = \left(1 + \frac{r^2}{x^2}\right) \sin^2 \alpha \quad \text{et} \quad \sin^2 \alpha = \frac{r^2}{r^2 + x^2} \quad \sin \alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

(on retrouve le théorème de Pythagore qu'on aurait pu utiliser directement).

On en déduit :

$$\vec{B} = \frac{B_0 r^3}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \vec{e}_x$$

c. On fait un développement d'ordre 1 en $\left(\frac{x}{r}\right)^2$:

$$\vec{B} = - \frac{B_0}{\left(1 + \left(\frac{x}{r}\right)^2\right)^{3/2}} \vec{e}_x \approx B_0 \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{x}{r}\right)^2\right) \vec{e}_x$$

$$\text{Ainsi } \frac{\Delta B}{B_0} = \frac{3}{2} \left(\frac{x}{r}\right)^2 \quad \frac{\Delta B}{B_0} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{2}{30} \Leftrightarrow x = r \sqrt{\frac{1}{15}}$$

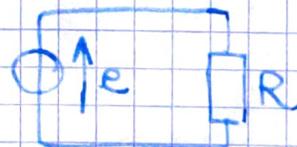
$$\text{Soit } x \approx \frac{r}{4} \quad (\sqrt{15} \approx 4).$$

4. a. On a $\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$ où Φ est le flux de \vec{B} à travers la spire :

$$\Phi \approx B_0 \cos(\omega t) \times \pi r_2^2 \quad \text{avec la hypothèse de l'énoncé.}$$

$$\text{D'où : } \mathcal{E} = \pi r_2^2 \omega B_0 \sin(\omega t)$$

b. Schéma équivalent de la spire :



La puissance dissipée est :

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{\pi^2 r_2^4 \omega^2 B_0^2}{R} \sin^2(\omega t)$$

$$\text{D'où : } \langle P \rangle = \frac{\pi^2 r_2^4 \omega^2 B_0^2}{2R}$$

5. a. Il y a conduction thermique (en cas de contenu solide) et convection (en cas de contenu liquide).

b. Dans la plaque à induction, on ne chauffe pas la plaque mais directement la casserole ce qui permet:

- * un temps caractéristique plus rapide (meilleur contrôle de la cuisson)
- * un gain d'énergie
- * limiter les risques de brûlure.

9 - Phénomène destriction

1. On a $\rho = \underbrace{n_0 \times e}_{\text{cations}} - \underbrace{n(r) \times e}_{\text{électrons}} = e(n_0 - n(r))$

Et $\vec{j} = n_0 \times e \times \underbrace{\vec{v}_{\text{cations}}}_{=\vec{0}} + n(r) \times (-e) \times \vec{v} = -n(r)e\vec{v}$

Alors: $\text{div}(\vec{j}) = -\text{div}(n(r)e \cdot v \cdot \vec{e}_z) = -\frac{\partial}{\partial z}(n(r)e \cdot v) = 0$

Et $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ car $n(r)$ est constant (on étudie le régime stationnaire)

En conclut donc que $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$ et la conservation de la charge est satisfaite.

2. En régime stationnaire:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = \vec{0} \\ \text{div} \vec{E} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$$

* Soit M un point à l'intérieur du conducteur. Le plan $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ est plan de symétrie de la distribution de charge, et le plan $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ aussi donc $\vec{E}(M)$ est contenu dans ces plans et on a

$$\boxed{\vec{E} = E(r) \vec{e}_x}$$

invariance par translation selon \vec{e}_z et rotation d'angle θ donc les composantes de \vec{E} ne dépendent que de r

* Le plan $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ est plan de symétrie de la distribution de courants donc \vec{B} est normal à ce plan et $\boxed{\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_z}$

3. Soit un électron, en régime stationnaire il a un mouvement rectiligne uniforme donc par la 1^{ère} loi de Newton, les forces qu'il

seul se compensent, ainsi : $-e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$

en négligeant le poids de l'électron.

D'où : $\vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B}$

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\operatorname{div}(\vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{0} \quad (\vec{v} = c\vec{u})$$
$$= \vec{v} \cdot \operatorname{rot}(\vec{B}) - \vec{B} \cdot \operatorname{rot}(\vec{v})$$

Ainsi : $\frac{\rho}{\epsilon_0} = \vec{v} \cdot \mu_0 \vec{j}$ ou encore :

$$e(n_0 - n(r)) = -\mu_0 \epsilon_0 n(r) e v^2 = -\beta^2 n(r) e \quad \text{car } \mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

D'où : $n_0 = n(r)(1 - \beta^2)$ soit $n(r) = \frac{n_0}{1 - \beta^2}$

4. On considère une tranche de conducteur entre z et $z + dz$: la charge portée par les cations est $dq_+ = +e \times n_0 \times \pi a^2 dz$

Si $n(r)$ était égale à l'expression obtenue pour tout r on aurait une charge portée par les électrons $dq_- = -\frac{e n_0}{1 - \beta^2} \times \pi a^2 dz$

et $dq_+ + dq_- \neq 0$ ce qui est impossible. Ainsi, par phénomène de striction, les électrons se confinent dans une région de rayon $b < a$ telle que $dq_+ + dq_- = 0$ soit :

$$e n_0 \pi a^2 dz - \frac{e n_0}{1 - \beta^2} \pi b^2 dz = 0$$

Au encore :

$$b = a \sqrt{1 - \beta^2}$$

5. On a alors $i = \pi b^2 \times |j| = \pi b^2 \times n(r) e v = \pi a^2 \times n_0 e v$

(car $\beta^2 n(r) = n_0$ par électroneutralité).

$$\text{Or } n_0 = \frac{N_A \times \rho_{\text{Cu}}}{M_{\text{Cu}}} = \frac{6 \cdot 10^{23} \times 9 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-2}} = 9 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

$$\text{D'où } \beta = \frac{v}{c} = \frac{i}{S n_0 e c} = \frac{1}{10^{-6} \cdot 10^{29} \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^8} = 2 \cdot 10^{-13} \text{ et donc}$$

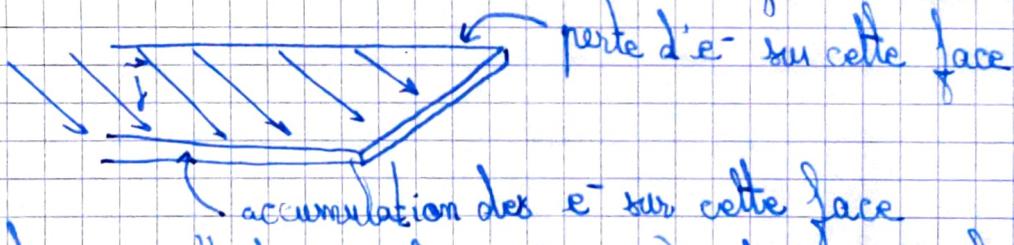
$$b \approx a \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) \approx a \left(1 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^{-26}\right) \approx a(1 - 2 \cdot 10^{-26})$$

Soit : $\frac{a-b}{a} \approx 2 \cdot 10^{-26}$. Le phénomène de striction est totalement négligeable et l'approximation que l'on fait habituellement est excellente.

10 - Tensamètre à effet Hall

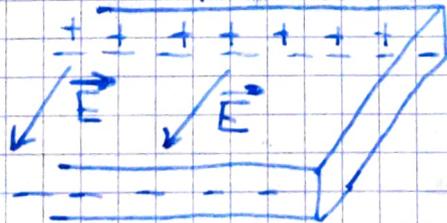
1. a. Lorsqu'on allume le champ, on a une force $-e \vec{v} \wedge \vec{B}$ et donc les électrons seront déviés. \vec{v} est selon $-\vec{u}_x$ donc $\vec{F}_{\text{Lorentz}} = -e(-v\vec{u}_x) \wedge B\vec{u}_z = -evB\vec{u}_y$.

Les électrons vont être déviés vers la face latérale $y < 0$:



b. Les électrons quittent une face ($y > 0$) et s'accumulent sur l'autre ($y < 0$) ce qui crée une densité surfacique de charge

σ :



La situation est analogue à un condensateur et crée un champ \vec{E} orienté selon $-\vec{u}_y$.

2. a. En régime permanent, les électrons ne peuvent pas continuer à s'accumuler sur les faces et ils circulent à nouveau dans le sens du ruban : la force de Lorentz est nulle $-e(\vec{E}_H + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$
 D'où : $\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}$ or $\vec{j} = -ne\vec{v} = nev\vec{u}_x$
 Et $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = hb \times j$. On conclut que :

$$\vec{E}_H = \frac{1}{n e} \mathbf{B} \times (-n \vec{u}_y) \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{E}_H = - \frac{I B}{n e h} \vec{u}_y}$$

b. La différence de potentiel s'obtient en intégrant \vec{E}_H :

$$U_H = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vec{E}_H \cdot d\vec{l} = \boxed{\frac{I B}{n e h}}$$

3. $U_H \propto \frac{1}{n}$ donc pour avoir une tension suffisamment élevée on a intérêt à avoir une faible densité d'électrons.

Si on veut mesurer $B = 10 \text{ mT}$ avec $I = 1 \text{ A}$ et $h = 0,1 \text{ mm}$ on trouve

$$\begin{cases} U_H = 62 \text{ mV} & \text{avec InSb} \\ U_H = 6 \cdot 10^{-9} \text{ V} & \text{avec un métal classique} \end{cases}$$

U_H n'est clairement pas mesurable dans le second cas.

4. Les ions fixes du réseau subissent une force $\vec{F} = +e \vec{E}_H$.

Ils sont en quantité $dN = h l dx \times n$ sur une portion dx de fil donc : $d\vec{F} = n h l dx \times e \vec{E}_H = - n e h l dx \cdot \frac{I B}{n e h} \vec{u}_y$

$$\text{D'où : } d\vec{F} = -I dx \times B \vec{u}_y = I dx \vec{u}_x \wedge \vec{B}$$

On retrouve l'expression de la force de Laplace (admise au PSI)

II - Quantité de mouvement du champ électromagnétique

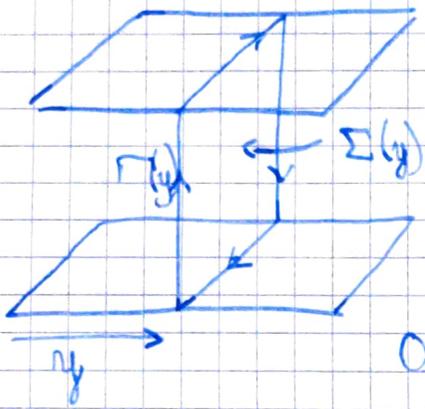
1. Lorsque l'on coupe le champ magnétique, un champ électrique va apparaître par induction : $\text{rot}(\vec{E}) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, avec

$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ nul hors de la boîte et selon \vec{u}_y dans la boîte.

Si M est un point de l'espace, $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie de $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ donc \vec{E} est normal à ce plan. De plus

le problème est invariant par translation selon x et y ($a \gg h$ et $b \gg h$)

On en déduit $\vec{E} = E(z) \vec{u}_x$.



Soit $\Gamma(y)$ le contour ci-contre, par
théorème de Stokes :

$$\oint_{\Gamma(y)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\Sigma(y)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Or $\oint_{\Gamma(y)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = b (E(z=h) - E(z=0))$

Et $\int_{\Sigma(y)} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \frac{dB}{dt} \times bh$

Enfin, on intègre pour $0 \leq y \leq a$:

$$ab (E(z=h) - E(z=0)) = - abh \frac{dB}{dt}$$

On multiplie par σ et on remarque que $\sigma ab = q$ la charge
portée par les armatures : $q (E(z=h) - E(z=0)) = - abh \frac{dB}{dt} \sigma$

On applique le PFD à la boîte dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= q \vec{E}(z=h) - q \vec{E}(z=0) \\ &= q (E(z=h) - E(z=0)) \vec{u}_x \\ &= - abh \sigma \frac{dB}{dt} \vec{u}_x \end{aligned}$$

On intègre, avec $\Delta B = B(t=0^+) - B(t=0^-) = -B_0$ et :

$$\Delta \vec{p} = abh B_0 \sigma \vec{u}_x$$

2. a. L'énergie d'un photon est $E_{ph} = \hbar \omega$

Son impulsion est $\vec{p}_{ph} = \hbar \vec{k}$

Or $k = \frac{\omega}{c}$ donc si \vec{u} est la direction de propagation
du photon : $\vec{p}_{ph} = \frac{\hbar \omega}{c} \times \vec{u} = \frac{1}{c} E_{ph} \vec{u}$

b. On peut écrire $\vec{\Pi} = n_{ph} \times E_{ph} \times \underbrace{c \vec{u}}_{\text{vitesse des photons}}$

Et $\frac{d\vec{p}}{dt} = n_{ph} \times \vec{p}_{ph} = n_{ph} \times \frac{1}{c} E_{ph} \times \vec{u} = \frac{1}{c^2} \times \vec{\Pi}$

c. Avant qu'on éteigne le champ, le boîtier et le siège d'un champ $\vec{B} = B_0 \vec{u}_x$ et $\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$ (champ entre les armatures d'un condensateur).

On peut alors calculer: $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\sigma B_0}{\mu_0 \epsilon_0} \vec{u}_x = \sigma B_0 c^2 \vec{u}_x$

D'où: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sigma B_0 \vec{u}_x$ et $\boxed{\vec{p} = abh \sigma B_0 \vec{u}_x}$

Après avoir éteint le champ $\vec{E} \neq \vec{0}$ mais $\vec{B} = \vec{0}$ donc $\vec{\Pi} = \vec{0}$ et $\vec{p} = \vec{0}$. Ainsi $\Delta \vec{p}_{EM} = -abh \sigma B_0 \vec{u}_x$.

On a bien:

$$\boxed{\Delta \vec{p}_{boîtier} + \Delta \vec{p}_{EM} = \vec{0}}$$

La quantité de mouvement est conservée!