



17. Propagation des ondes électromagnétiques

Une des applications principales de l'électromagnétisme est la description des ondes électromagnétiques. Ces ondes sont présentes partout dans notre environnement : les ondes lumineuses, mais également les ondes radio, les rayons ultraviolets, rayons X, et le rayonnement infrarouge sont des ondes électromagnétiques. Le formalisme local de l'électromagnétisme va nous permettre de décrire ces ondes quantitativement, ainsi que leurs propriétés de propagation.

De nombreuses propriétés que nous verrons dans ce chapitre s'appliquent de manière générale à toutes les ondes et peuvent également être utilisées pour étudier la propagation des ondes sur une corde, ou bien les ondes acoustiques dans les fluides.

17.1 Équation de propagation dans le vide

17.1.1 Equations de Maxwell dans le vide

On considère dans un premier temps une perturbation électromagnétique se propageant dans le vide. Pour décrire ce phénomène, nous allons utiliser les équations de Maxwell.

 **Capacité exigible 1** Simplifier les équations de Maxwell dans le vide, et établir une équation de propagation pour le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$.

17.1.2 Laplacien vectoriel

Nous allons simplifier cette expression en définissant le laplacien vectoriel :

Définition — Laplacien vectoriel. Le laplacien vectoriel est un opérateur vectoriel agissant sur un champ vectoriel. Si $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ alors on écrira :

$$\vec{\Delta} \vec{A} = \Delta A_x \vec{e}_x + \Delta A_y \vec{e}_y + \Delta A_z \vec{e}_z \quad (17.1)$$

L'interprétation géométrique de cet opérateur est délicate, mais comme le laplacien scalaire, il est relié à la courbure des représentations graphiques des composantes du champ. On retiendra la propriété suivante, très utile :

Propriété Soit $\vec{A}$ un champ vectoriel. Alors :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{A})) = \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{A})) - \Delta \vec{A} \quad (17.2)$$

17.1.3 Equation de d'Alembert

On peut alors combiner les équations de Maxwell dans le vide avec ces propriétés pour obtenir l'équation dite de d'Alembert :

Théorème — Équation de d'Alembert. Dans le vide, le champ électromagnétique obéit à l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (17.3)$$

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (17.4)$$

Dans ces équations, on a défini la constante $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ sur laquelle nous allons revenir rapidement.

17.1.4 Solutions à une dimension : ondes planes

La nature des solutions de cette équation n'est pas claire a priori. Dans un premier temps, nous pouvons chercher des solutions sous la forme d'ondes planes :

Définition Une onde est dite plane lorsque le champ électromagnétique est uniforme dans des plans perpendiculaires à la direction de propagation.

 **Capacité exigible 2** Rappeler la définition d'une surface d'onde. Comment sont orientées les surfaces d'onde dans le cas d'une onde plane ?

Dans ce cas, nous pouvons étudier une onde se propageant selon $\vec{e}_x$. Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne dépendent alors que de la coordonnée x (invariance par translation selon (Oy) et (Oz) , par définition de l'onde plane). Dans ce cas, l'équation de d'Alembert pour le champ électrique devient :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (17.5)$$

Théorème — Solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension. Les solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension sont des ondes progressives ou des superpositions d'ondes progressives :

$$\vec{E}(x, t) = \vec{F}(x - ct) + \vec{G}(x + ct) \quad (17.6)$$

■ **Démonstration** Considérons une fonction $f(x, t)$ solution de l'équation de d'Alembert à une dimension : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$. Nous pouvons faire le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases} \quad (17.7)$$

Alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (17.8)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \quad (17.9)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) f \quad (17.10)$$

On peut alors dériver une seconde fois par rapport à x :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) f \quad (17.11)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \quad (17.12)$$

Nous réalisons la même chose pour calculer la dérivée temporelle :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (17.13)$$

$$= -c \frac{\partial f}{\partial u} + c \frac{\partial f}{\partial v} \quad (17.14)$$

$$= c \left(-\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) f \quad (17.15)$$

Ainsi :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \left(-\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) f \quad (17.16)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \quad (17.17)$$

L'équation de d'Alembert devient, après simplifications :

$$4 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0 \quad (17.18)$$

Autrement dit :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) = 0 \quad (17.19)$$

Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial v}$ est indépendante de u , c'est-à-dire qu'il existe une fonction g_0 telle que $\frac{\partial f}{\partial v} = g_0(v)$. En intégrant, on obtient :

$$f(u, v) = \int_0^v g_0(v') dv' + f(u, v = 0) \quad (17.20)$$

Notons $g_2(v) = \int_0^v g_0(v') dv'$ et $g_1(u) = f(u, v = 0)$. Alors :

$$f(u, v) = g_1(u) + g_2(v) \quad (17.21)$$

Autrement dit il existe deux fonctions à une seule variable, g_1 et g_2 , telles que :

$$f(x, t) = g_1(x - ct) + g_2(x + ct) \quad (17.22)$$

■

Nous pouvons alors constater que les solutions sont des perturbations se propageant à la célérité c , nous pouvons ainsi interpréter c comme la célérité de la lumière dans le vide :

Définition On note $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide, qui vaut :

$$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (\text{valeur exacte}) \quad (17.23)$$

- R** La valeur de c est une valeur exacte : elle est fixée par convention et permet de définir le mètre à partir de la seconde : un mètre correspond par définition à la distance parcourue par la lumière en un temps $\Delta t = 1/299\,792\,458 \text{ s}$.
 La valeur de $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$ est également exacte et permet de définir l'Ampère à partir du mètre, de la seconde et du kilogramme.
 La valeur de ϵ_0 est une valeur approchée issue de mesures expérimentales.

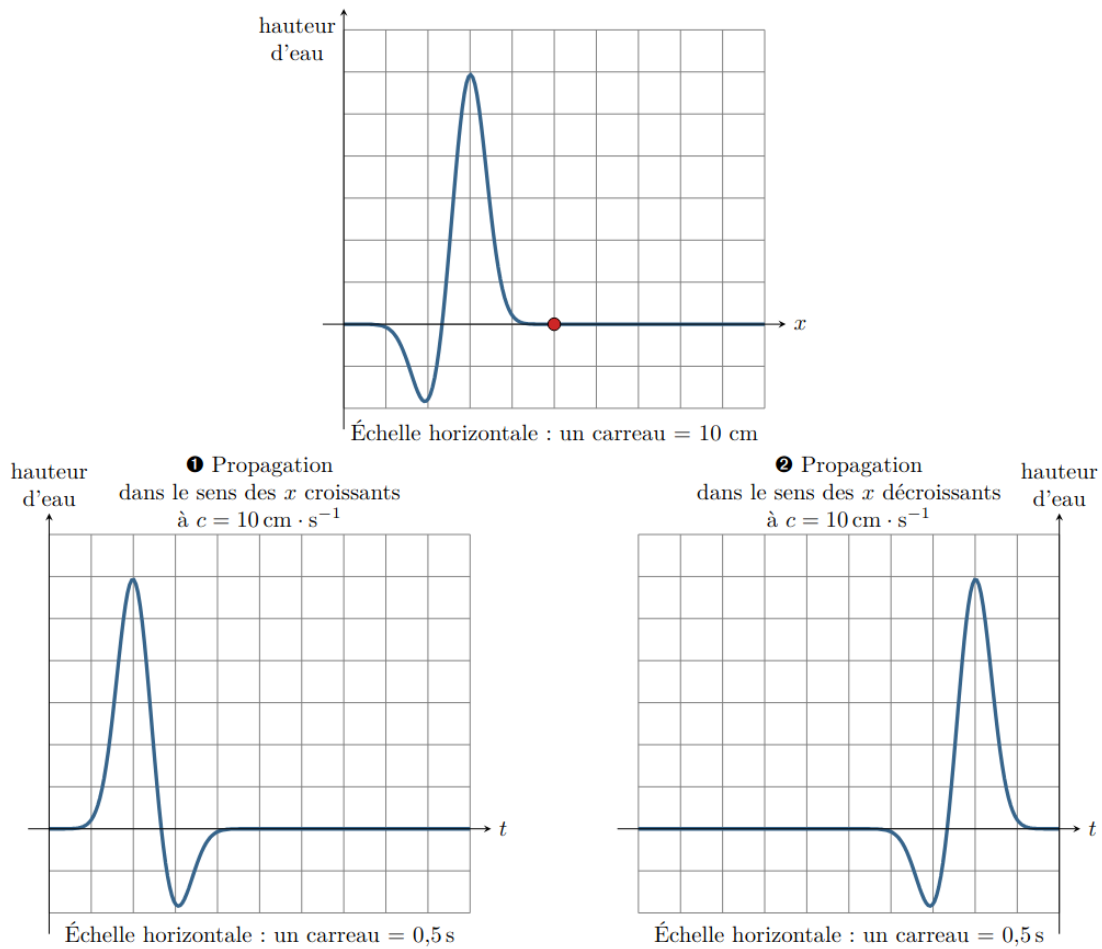


FIGURE 17.1 – Structure d'une onde plane, en prenant l'exemple d'une vague sur un plan d'eau. Source : poly de cours de Etienne Thibierge.

Ainsi, les équations de Maxwell permettent la propagation d'ondes dans le vide à une vitesse c bien précise : il s'agit des ondes électromagnétiques.

Nous avons ici choisi, par convention, d'orienter la direction de propagation selon $\vec{e}_x$. Dans le cas plus général, nous pouvons écrire la propriété suivante :

Propriété Les ondes planes solutions de l'équation de d'Alembert se propageant dans la direction $\vec{u}$ sont de la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{u} \cdot \vec{r} - ct) \quad \text{et} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{u} \cdot \vec{r} - ct) \quad (17.24)$$

17.1.5 Relation de structure

Nous pouvons désormais étudier la structure du champ électromagnétique en reliant le champ électrique et le champ magnétique pour une onde plane. Pour cela, nous allons utiliser la relation de structure, valable pour une onde plane :

Théorème — Relation de structure. On considère une onde plane progressive se propageant selon la direction $\vec{u}$. Alors le champ électrique et le champ magnétique sont reliés par la relation :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} \quad (17.25)$$

■ **Démonstration** Etant donné que l'on a une onde plane progressive, on peut écrire le champ électrique et le champ magnétique sous la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{u} \cdot \vec{r} - ct) \quad \text{et} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{u} \cdot \vec{r} - ct) \quad (17.26)$$

On en déduit que :

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = c \vec{B}'(\vec{u} \cdot \vec{r} - ct) \quad (17.27)$$

où le prime dénote une dérivée totale par rapport à la variable $\vec{u} \cdot \vec{r} - ct$. De plus, nous pouvons remarquer que pour une dérivée spatiale on a :

$$\frac{\partial \vec{E}_\xi}{\partial \xi} = u_\xi E'_\xi(\vec{u} \cdot \vec{r} - ct) \quad (17.28)$$

(où $\xi \in \{x, y, z\}$ et $\zeta \in \{x, y, z\}$). Or on sait que par définition du rotationnel :

$$\text{rot}(\vec{E}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E'_x(\vec{u} \cdot \vec{r} - ct) \\ E'_y(\vec{u} \cdot \vec{r} - ct) \\ E'_z(\vec{u} \cdot \vec{r} - ct) \end{pmatrix} \quad (17.29)$$

On en déduit directement que :

$$\text{rot}(\vec{E}) = \vec{u} \wedge \vec{E}'(\vec{u} \cdot \vec{r} - ct) \quad (17.30)$$

Ainsi :

$$c \vec{B}'(\vec{u} \cdot \vec{r} - ct) = \vec{u} \wedge \vec{E}'(\vec{u} \cdot \vec{r} - ct) \quad (17.31)$$

En intégrant, et en remarquant que les champs ne peuvent pas avoir une moyenne non nulle dans tout l'espace (sinon l'énergie serait infinie), on obtient la relation de structure. ■

 **Capacité exigible 3** A partir de la relation de structure, décrire la structure géométrique d'une onde plane progressive.

17.2 Ondes planes progressives harmoniques

L'équation de d'Alembert permet la propagation d'ondes et de signaux de toute forme. Cependant, nous avons vu en TP d'électronique que tout signal périodique peut se décomposer comme une série de signaux sinusoïdaux dont les fréquences sont multiples du fondamental. Par ailleurs, cette propriété se généralise aux signaux non périodiques, en remplaçant la somme par une intégrale (transformée de Fourier).

17.2.1 Définition

Définition Une onde plane progressive est dite harmonique, ou monochromatique, si elle dépend sinusoïdalement du temps. Elle se met alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_E) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_B) \end{cases} \quad (17.32)$$

Comme dans le cours d'optique, $\vec{k}$ est appelé le vecteur d'onde et ω la pulsation de l'onde.

Le vecteur d'onde et la pulsation sont reliés à la direction de propagation $\vec{u}$, à la longueur d'onde λ , à la période T et à la fréquence ν par les relations suivantes :

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u} \quad (17.33)$$

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad (17.34)$$

Les ondes électromagnétiques de différentes longueurs d'onde ont des applications très différentes. En effet, selon la longueur d'onde, le rayonnement pourra interagir avec différents composants de la matière (électrons, atomes, molécules ou objets macroscopiques). On distingue ainsi différents grands domaines de longueur d'onde (à connaître) :

- Les ondes radio (de 10 cm à 10 km) utilisées pour les télécommunications ;
- Les micro-ondes (de 1 mm à 10 cm) qui interagissent avec les molécules d'eau notamment ;
- Les rayons infrarouges (de 1 μm à 1 mm) qui correspondent essentiellement au rayonnement de Planck des corps à température ambiante ;
- La lumière visible, entre 400 et 800 nm ;
- Les rayons ultraviolets (de 1 à 400 nm) qui peuvent interagir avec la structure électronique des atomes ;
- Les rayons X (10 pm à 10 nm) qui permettent de sonder les solides cristallins ;
- Les rayons gamma très énergétiques (en-dessous de 1 $\text{\AA}$), notamment utilisés en radiothérapie.

R L'image de couverture du chapitre montre une superposition d'images de la nébuleuse du Crabe par les télescopes Chandra, Hubble, and Spitzer qui montrent respectivement les rayons X en rose, la lumière visible en vert, et le rayonnement infrarouge en rouge. Source : NASA's Goddard Space Flight Center.

17.2.2 Représentation complexe

Il est possible, comme en optique, d'adopter une représentation complexe des ondes planes progressives monochromatiques :

Définition Dans le cas d'une onde plane progressive monochromatique, on adopte une notation complexe pour le champ électrique et magnétique :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (17.35)$$

On a alors $\vec{E} = \text{Re}(\underline{\vec{E}})$ et $\vec{B} = \text{Re}(\underline{\vec{B}})$.

Plusieurs propriétés mathématiques intéressantes s'appliquent alors, car on peut remarquer que

les opérateurs divergence, rotationnel et gradient s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{A}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \\ \overrightarrow{\operatorname{grad}}(A) &= \vec{\nabla} A \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{A}) &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \end{cases} \quad (17.36)$$

où l'on a noté $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right)$.

 **Capacité exigible 4** Exprimer l'action d'une dérivée temporelle, $\partial/\partial t$, et du vecteur $\vec{\nabla}$ sur la représentation complexe d'une onde plane progressive harmonique. En déduire que l'on peut remplacer les dérivées temporelles et les opérateurs vectoriels comme indiqué dans la propriété suivante.

Propriété — Opérateurs vectoriels et représentation complexe. Pour une onde plane progressive monochromatique, les opérateurs peuvent se simplifier comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow j\omega \times \quad (17.37)$$

$$\operatorname{div} \leftrightarrow j\vec{k} \cdot \quad (17.38)$$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} \leftrightarrow j\vec{k} \times \quad (17.39)$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \leftrightarrow j\vec{k} \wedge \quad (17.40)$$

17.2.3 Relation de dispersion

 **Capacité exigible 5** En utilisant l'équation de d'Alembert et la représentation complexe d'une onde électromagnétique, déterminer une relation entre la pulsation et le vecteur d'onde. Cette relation est appelée **relation de dispersion** et est à connaître par coeur.

La relation de dispersion est la signature d'un type d'onde : elle est caractéristique de l'onde. La fréquence et la longueur d'onde sont en général des grandeurs mesurables (sauf dans le cas des très hautes fréquences) et la relation entre ces deux grandeurs est caractéristique d'une équation d'onde.

17.2.4 Etude énergétique

On s'intéresse désormais à l'énergie transmise par une onde plane progressive monochromatique. Pour cela, nous allons faire un bilan énergétique.

 **Capacité exigible 6** On considère une onde plane progressive harmonique. Déterminer en fonction de $||\vec{E}_0||$ et de $\vec{k}$:

- La densité volumique d'énergie électromagnétique u_{em} ;
- Le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$

On constate la propriété suivante, très importante :

Propriété Une onde plane progressive monochromatique, associée à une densité volumique d'énergie u_{em} , et se propageant dans la direction $\vec{u}$, transporte l'énergie dans sa direction de propagation à la vitesse c :

$$\vec{\Pi} = cu_{em} \vec{u} \quad (17.41)$$

On remarquera par ailleurs que l'on peut relier les valeurs moyennes des propriétés énergétiques des ondes à leur représentation complexe, en effet on a la propriété suivante :

Propriété Soit $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$, on peut alors adopter la représentation complexe :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (17.42)$$

De même le champ magnétique peut s'écrire :

$$\underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (17.43)$$

On a alors les propriétés suivantes :

$$\left\langle \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\underline{\vec{E}}^* \cdot \underline{\vec{E}}}{2} \quad (17.44)$$

$$\left\langle \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right\rangle = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\underline{\vec{B}}^* \cdot \underline{\vec{B}}}{2} \quad (17.45)$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle = \frac{1}{\mu_0} \text{Re} \left(\frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{2} \right) \quad (17.46)$$

17.2.5 Polarisation

Relation de structure pour une onde monochromatique

 **Capacité exigible 7** Retrouver la relation de structure dans le cas des ondes planes progressives monochromatiques, et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} \quad (17.47)$$

Cette relation est à connaître.

Nous avons vu que la relation de structure caractérise la structure géométrique de l'onde électromagnétique. L'onde plane progressive monochromatique n'en est qu'un cas particulier. Pour aller plus loin dans la caractérisation de la géométrie des ondes, nous pouvons nous intéresser à quelques cas particuliers de géométrie, que l'on étudiera à travers ce que l'on nomme la polarisation.

Pour cela, nous pouvons étudier la structure du champ électromagnétique pour une onde plane progressive monochromatique. Supposons que l'onde se propage selon la direction $\vec{u} = \vec{e}_z$, alors par la relation de structure, le champ électrique est perpendiculaire à $\vec{e}_z$ et nous pouvons écrire :

$$\vec{E}(M, t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \phi_E^x) \vec{e}_x + E_{0y} \cos(\omega t - kz + \phi_E^y) \vec{e}_y \quad (17.48)$$

En un point M de l'espace, le vecteur $\vec{E}(M, t)$ aura donc une évolution bien particulière en fonction du temps : il va décrire une ellipse dans le plan $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$. Selon le déphasage entre les deux composantes du champ électrique, l'allure de cette ellipse sera différente.

Polarisation rectiligne

Définition — Polarisation rectiligne. Une onde électromagnétique est dite polarisée rectilignement si, en tout point M de l'espace, le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ garde une direction fixe au cours du temps. Cette direction est alors appelée la direction de polarisation.

Cette situation se produit lorsque le déphasage $\Delta\phi_E = \phi_E^x - \phi_E^y$ est tel que $\phi \equiv 0[\pi]$. On a alors $e^{j\Delta\phi_E} = \pm 1$ et :

$$\vec{E}(M, t) = (E_{0x} \vec{e}_x \pm E_{0y} \vec{e}_y) \cos(\omega t - kz + \phi_E^x) \quad (17.49)$$

Capacité exigible 8 On considère une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement selon $\vec{e}_x$ et se propageant selon $\vec{e}_z$. Que peut-on dire de la direction du champ magnétique ? Y a-t-il un déphasage entre les maxima d'amplitude du champ électrique et du champ magnétique ?

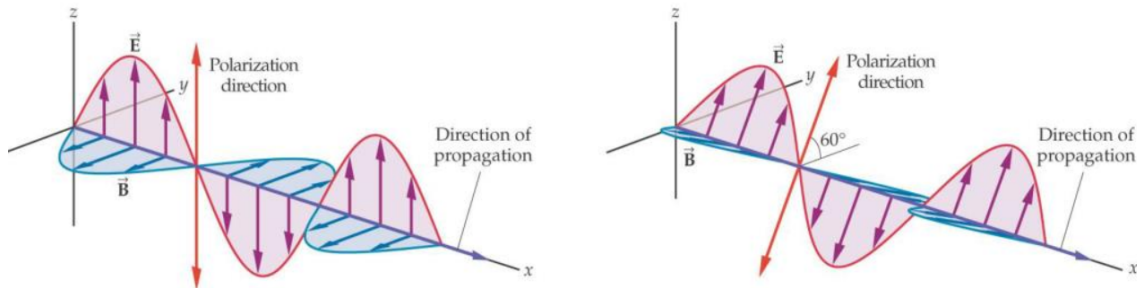


FIGURE 17.2 – Onde électromagnétique plane progressive monochromatique polarisée rectilignement dans deux directions. Source : physicsopenlab.org.

Polarisation circulaire

Un autre cas particulier est celui dans lequel l'ellipse dessinée par le vecteur champ électrique est un cercle, on parle alors de polarisation circulaire :

Définition Une onde électromagnétique est dite polarisée circulairement si, en tout point M de l'espace, le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ garde une norme constante au cours du temps. La polarisation est dite circulaire droite (respectivement circulaire gauche) si un observateur qui voit l'onde arriver vers lui voit le champ électrique tourner dans le sens horaire (respectivement trigonométrique).

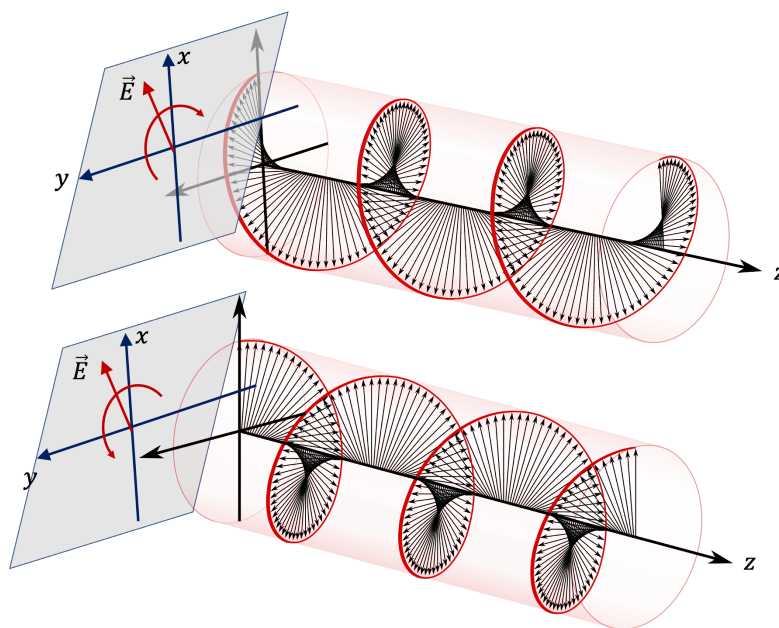


FIGURE 17.3 – Ondes planes progressives monochromatiques avec une polarisation circulaire droite (en haut) et gauche (en bas). Source : Wikimedia Commons.

Capacité exigible 9 Quel doit être le déphasage $\Delta\phi_E$ pour que l'onde soit polarisée circulairement ? Que peut-on dire de la densité d'énergie électromagnétique pour une onde polarisée circulairement ?

Encart — Polarisation circulaire dans la nature. La polarisation circulaire dans la nature est très rare. Certains cristaux, dits biréfringents, sont capables de transformer la polarisation linéaire en polarisation circulaire (notamment le quartz). Les scarabées ont également une propriété intéressante : ils ne réfléchissent que la lumière ayant une polarisation circulaire gauche. Ceci est lié à la structure microscopique de leur carapace. Cette propriété peut sembler surprenante, mais elle les aide à se reconnaître car leur vision est également adaptée à cette polarisation. Une équipe de recherche a ainsi montré que ces propriétés de polarisation favorisent l'expression de certains gènes ainsi que la reproduction de l'espèce. Source : Li, T., Jiang, Y., Yang, X., Li, H., Gong, Z., Qin, Y., ... Lu, C. (2023). *The effects of circularly polarized light on mating behavior and gene expression in Anomala corpulenta (Coleoptera : Scarabaeidae)*. *Frontiers in Physiology*, 14, 1172542.

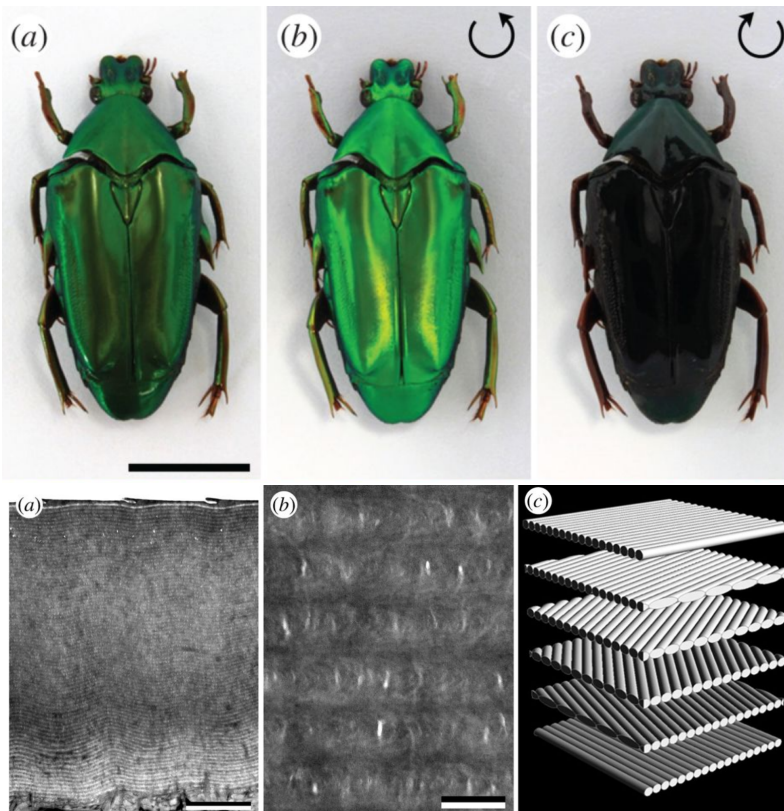


FIGURE 17.4 – En haut : photographie d'un scarabée en lumière naturelle, et avec un filtre sélectionnant uniquement la polarisation circulaire gauche ou droite. En bas : images de la carapace du scarabée au microscope. Echelle : a) 3 μm et b) 200 nm. En bas à droite : modèle proposé pour la structure microscopique de la carapace, à partir des images au microscope. Source : McDonald, L. T., Finlayson, E. D., Wilts, B. D., Vukusic, P. (2017). *Circularly polarized reflection from the scarab beetle Chalcothoe smaragdina : light scattering by a dual photonic structure*. *Interface Focus*, 7(4), 20160129.

Polarisation de la lumière

Dans la nature, la lumière est parfois polarisée et parfois non. La lumière produite par le soleil ou par la plupart des lampes, par exemple, est dite non polarisée. En effet, il s'agit d'une superposition de trains d'onde incohérents entre eux qui ont chacun une polarisation aléatoire, celle-ci n'étant pas forcément circulaire ou rectiligne.

R C'est parce que la lumière naturelle est non polarisée que le modèle scalaire de la lumière fonctionne en optique : on n'a pas besoin de prendre en compte le caractère vectoriel des ondes électromagnétiques.

Plusieurs objets sont capables de polariser la lumière. En particulier, les polariseurs (ou polaroïds) utilisés en TP et dans les verres polarisants des lunettes de soleil permettent de sélectionner l'une des directions du champ électrique :

Propriété Un polariseur orienté selon la direction $\vec{e}_x$ absorbe les composantes du champ électrique orientées parallèlement à $\vec{e}_x$ et transmet les composantes perpendiculaires à $\vec{e}_x$. Ainsi, il transforme une onde incidente quelconque en onde polarisée rectilignement.

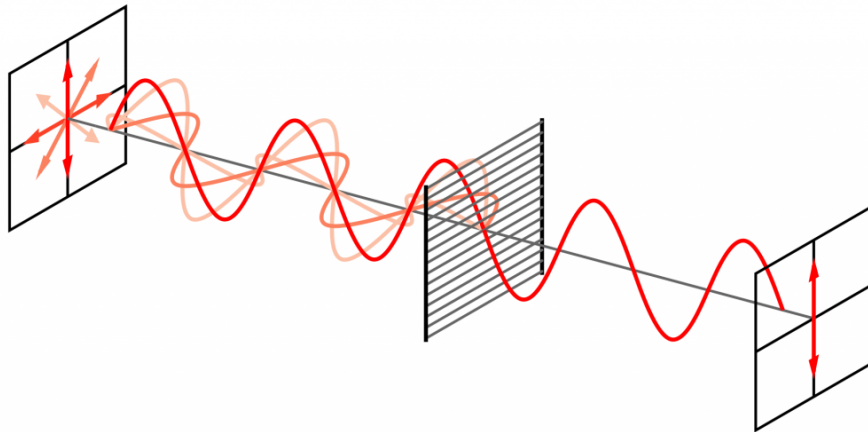


FIGURE 17.5 – Fonctionnement d'un polariseur. La lumière non polarisée est convertie en lumière polarisée (avec absorption d'énergie au niveau du polariseur). Source : Wikimedia Commons.

Capacité exigible 10 On place deux polariseurs l'un derrière l'autre, inclinés d'un angle α . Quel est le rapport entre l'énergie transportée par l'onde après et avant le second polariseur ? Le résultat, connu sous le nom de Loi de Malus, est à connaître.

Nous verrons dans le dernier chapitre d'électromagnétisme que des phénomènes naturels peuvent également polariser la lumière, par exemple la diffusion d'une onde lumineuse par les atomes de l'atmosphère.

17.3 Propagation dans un plasma

L'équation de d'Alembert caractérise la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. Néanmoins, il peut également être intéressant d'étudier la propagation de ces ondes dans des milieux différents, afin de bien distinguer les propriétés qui sont spécifiques à la propagation dans le vide, et celles qui se généralisent à toutes les ondes électromagnétiques.

Pour cela, nous allons nous intéresser aux plasmas : c'est un quatrième état de la matière, en plus des états solide, liquide et gazeux :

Définition Un plasma est un état dans lequel la matière est partiellement ou totalement ionisée : des électrons sont arrachés aux atomes et libres de circuler. Un plasma est électriquement neutre.

Les astrophysiciens estiment qu'environ 99 % de la matière de l'univers se trouve sous forme de plasma, et l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques dans les plasmas est cruciale pour la compréhension de divers phénomènes naturels tels que les aurores boréales, les éruptions solaires ou l'étude à distance des atmosphères stellaires. De nombreuses applications industrielles exploitent également les plasmas.

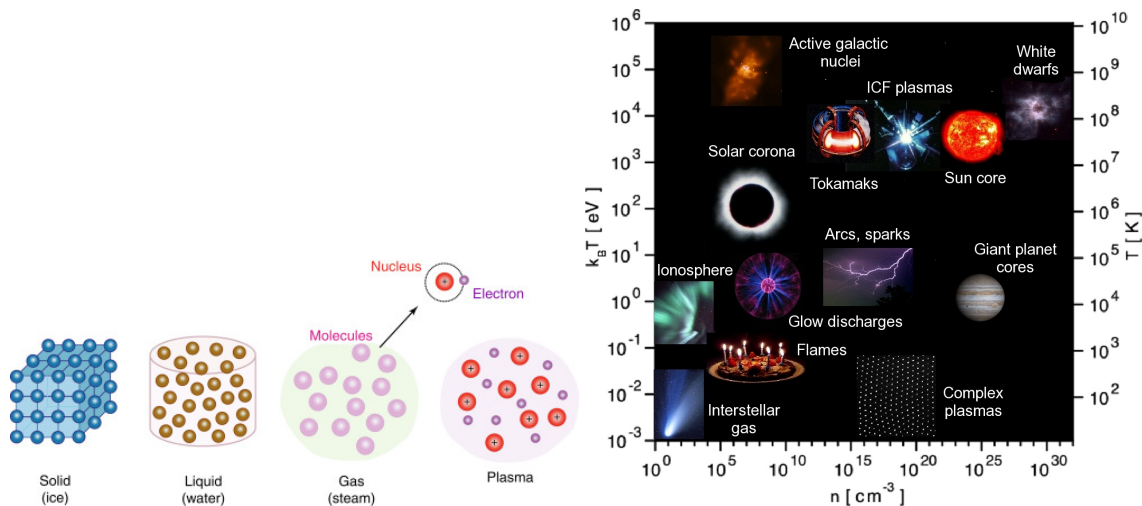


FIGURE 17.6 – À gauche : les différents états de la matière, incluant le plasma. À droite : les différents plasmas observés dans la nature, classés par température et par densité de particules chargées n . Sources : Mehdizadeh, M. (2015). *Microwave/RF applicators and probes : for material heating, sensing, and plasma generation*. et Wigner Research Center for Physics.

On peut créer un plasma :

- à partir de décharges électriques (méthode habituelle en laboratoire) ;
- par un chauffage puissant provoquant des collisions entre atomes (centre du soleil, prototypes de centrales de fusion nucléaire) ;
- par l'absorption de rayonnements ionisants (absorption des UV par la haute atmosphère).

17.3.1 Mouvement des charges

Un plasma est souvent caractérisé par la densité d'électrons libres par unité de volume, notée n_e . Nous nous limiterons au cas des plasmas dilués, c'est-à-dire que nous négligerons les interactions entre porteurs de charge. De plus, les cations sont supposés trop massiques pour se déplacer significativement au passage d'une onde électromagnétique : l'essentiel des effets seront liés au mouvement des électrons.

Nous supposons que les électrons sont non relativistes. En effet, la vitesse caractéristique des électrons est donnée par le théorème d'équipartition de l'énergie et vaut, à une température $T = 10^4$ K :

$$v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}} = 7 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \ll c \quad (17.50)$$

Capacité exigible 11 Montrer que la composante magnétique de la force de Lorentz est négligeable devant la composante électrique. En déduire une relation entre la densité volumique

de courant $\vec{j}$ et le champ électrique $\vec{E}$.

17.3.2 Relation de dispersion du plasma

On considère désormais une onde plane progressive monochromatique se propageant dans un plasma.

Capacité exigible 12 Traduire la relation reliant $\vec{j}$ et $\vec{E}$ en notations complexes, puis établir la relation de dispersion de l'onde électromagnétique dans le plasma.

Nous obtenons le résultat suivant :

Propriété Dans un plasma, la relation de dispersion pour une onde plane progressive monochromatique s'écrit :

$$\vec{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad (17.51)$$

où ω_p est la pulsation plasma définie comme :

$$\omega_p = \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e} \quad (17.52)$$

17.3.3 Cas d'une onde propagative

Dans le cas où $\omega > \omega_p$, l'onde peut se propager à travers le plasma.

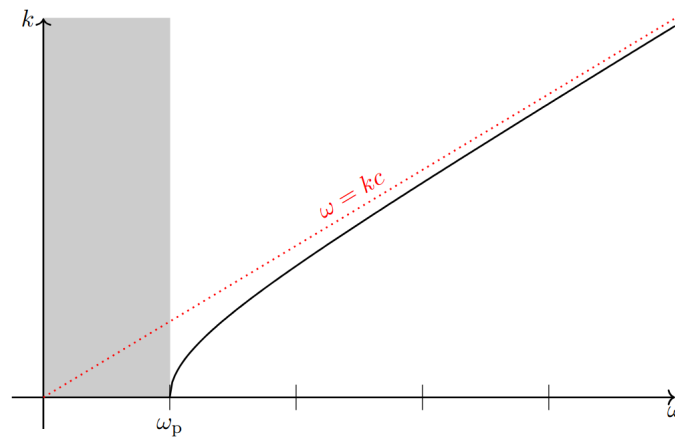


FIGURE 17.7 – Relation de dispersion pour une onde propagative dans un plasma. On constate que la région $\omega < \omega_p$ est interdite. Source : poly de cours de Maxime Champion.

On constate alors que la longueur d'onde de l'onde, $\lambda = \frac{2\pi}{\|\vec{k}\|}$, n'est pas proportionnelle à la période du signal : on dit que la propagation est dispersive. Nous verrons plus loin les implications de cette dispersion.

Une des propriétés caractéristiques de cette dispersion est que l'énergie ne se propage plus à la vitesse c :

Propriété Dans un plasma, l'énergie se propage à la vitesse $c^2 \vec{k} / \omega$.

■ **Démonstration** Nous pouvons calculer le vecteur de Poynting de l'onde :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle \quad (17.53)$$

$$= \left\langle \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \right\rangle \quad (17.54)$$

$$= \left\langle \frac{1}{\mu_0 \omega} \vec{k} \vec{E}^2 \right\rangle \quad (17.55)$$

$$= \frac{\vec{E}_0^2}{2\mu_0 \omega} \vec{k} \quad (17.56)$$

Nous pouvons également calculer la densité d'énergie électromagnétique :

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \langle \vec{E}^2 \rangle + \frac{\langle \vec{B}^2 \rangle}{2\mu_0} \quad (17.57)$$

$$= \frac{\epsilon_0 \vec{E}_0^2}{4} + \frac{\vec{B}_0^2}{4\mu_0} \quad (17.58)$$

Or par la relation de structure : $||\vec{B}_0|| = \frac{k}{\omega} ||\vec{E}_0||$ et donc :

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{\epsilon_0 \vec{E}_0^2}{4} \left(1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right) \quad (17.59)$$

Enfin la densité d'énergie cinétique des électrons peut s'écrire :

$$\langle u_c \rangle = n_e \times \frac{1}{2} m_e \langle \vec{v}^2 \rangle \quad (17.60)$$

Comme $m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E}$ on a $\langle \vec{v}^2 \rangle = \frac{e^2 \langle \vec{E}^2 \rangle}{m_e^2 \omega^2} = \frac{e^2 \vec{E}_0^2}{2m_e^2 \omega^2}$ et donc :

$$\langle u_{em} + u_c \rangle = \frac{\epsilon_0 \vec{E}_0^2}{4} \left(1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) = \frac{\epsilon_0 \vec{E}_0^2}{4} \quad (17.61)$$

Nous obtenons alors :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{c^2 \vec{k}}{\omega} \times \langle u_c + u_{em} \rangle \quad (17.62)$$

■

17.3.4 Onde évanescence

On s'intéresse désormais au cas où $\omega < \omega_p$. Pour plus de simplicité, on supposera que l'onde se propage selon la direction $\vec{e}_x$, ainsi $\vec{k} = k\vec{e}_x$.

 **Capacité exigible 13** En exploitant la relation de dispersion, établir le vecteur d'onde k de l'onde, puis en déduire la structure de l'onde. Calculer le vecteur de Poynting associé.

Nous constatons que l'onde ne peut pas pénétrer dans le milieu : elle ne transporte pas d'énergie et son amplitude diminue exponentiellement. C'est ce que l'on appelle une onde évanescence :

Définition Une onde est dite évanescence selon une direction $\vec{e}_x$ si :

- L'onde ne se propage pas selon $\vec{e}_x$;
- L'onde ne transporte pas d'énergie selon $\vec{e}_x$;
- L'amplitude décroît exponentiellement selon $\vec{e}_x$.

Une onde évanescence selon une direction peut souvent être propagative dans les autres directions, ainsi il existe des ondes évanescences qui se propagent parallèlement à l'interface entre le vide et un plasma, notamment dans l'ionosphère terrestre.

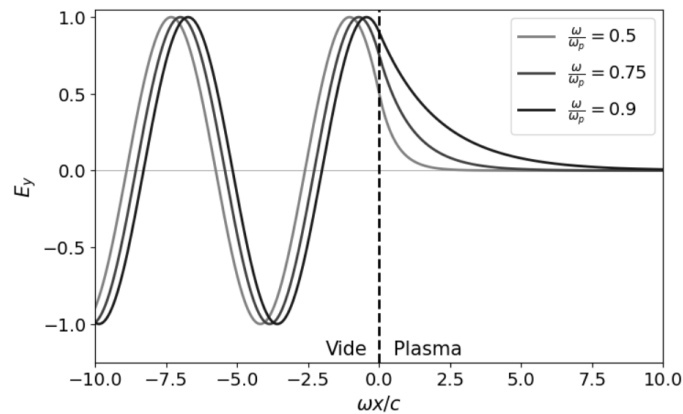


FIGURE 17.8 – Structure d'une onde plane progressive harmonique arrivant à l'interface avec un plasma, pour différentes valeurs de pulsations. L'onde évanescence est visible dans le plasma.

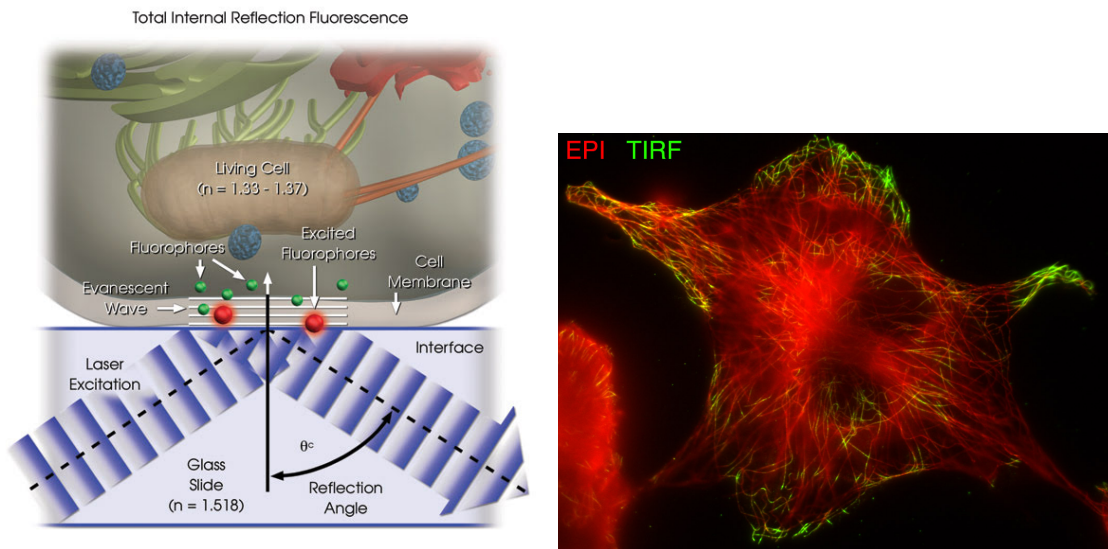


FIGURE 17.9 – A gauche : le principe de fonctionnement de la microscopie à réflexion interne totale. A droite : image obtenue par réflexion interne totale (en vert) comparée à une image classique (en rouge). Les structures fines de la surface de l'échantillon sont beaucoup plus visibles dans le premier cas. Source : Florida State University et Université de Heidelberg.

Encart — Microscopie à réflexion interne totale. Lors d'une réflexion totale, une onde évanescence est créée dans la zone interdite, ce que nous expliquerons dans un exercice de TD.

En plaçant dans une cellule une molécule fluorescente, il est alors possible d'étudier ce qui se passe dans une couche très fine (de l'ordre de 100 nm) à la surface de la cellule : on observe alors la cellule avec une très faible profondeur de champ. Ceci permet de voir une "coupe" de la surface de l'échantillon, là où un microscope classique montre (en transparence) la totalité de l'échantillon.

17.4 Propagation d'un paquet d'ondes

17.4.1 Limites du modèle de l'onde plane monochromatique

Le modèle d'onde plane progressive monochromatique que nous avons construit présente des limites, en effet, dans ce modèle, la densité volumique d'énergie électromagnétique u_{em} a une moyenne uniforme ($\langle u_{em} \rangle = c^{ste}$) ; par ailleurs l'onde a une extension spatiale infinie, donc son énergie totale est infinie. Dans la réalité les ondes ont une extension spatiale finie. Plusieurs phénomènes peuvent en être la cause :

- Le milieu dans lequel l'onde se propage a une extension finie et est délimité par des parois opaques au rayonnement. On a alors des phénomènes de réflexion que nous étudierons au prochain chapitre ;
- L'onde en elle-même est non monochromatique, ce qui limite son extension spatiale.

17.4.2 Paquet d'ondes, vitesse de phase, vitesse de groupe

Nous allons commencer par étudier ce second cas : en général, une onde est émise entre deux instants t_1 et t_2 avec une amplitude qui varie en fonction du temps, ce qui crée un signal non parfaitement monochromatique. C'est ce que l'on appelle un paquet d'onde :

Définition On appelle paquet d'ondes la superposition d'un nombre fini ou infini d'ondes planes progressives monochromatiques de pulsations proches d'une pulsation moyenne ω_0 . Son écriture mathématique la plus générale est, pour une propagation à une dimension :

$$\vec{E}(z, t) = \text{Re} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \underline{E}_0(k) e^{j(\omega(k)t - kz)} dk \right) \quad (17.63)$$

On remarque que dans la forme mathématique du paquet d'onde, on a écrit $\omega = \omega(k)$ en vertu de la relation de dispersion qui est caractéristique du milieu de propagation, on aura ainsi dans le vide $\omega(k) = kc$.

Nous constatons que ce paquet d'ondes est formellement analogue à la superposition d'ondes de différentes fréquences que nous avons étudiée en optique : il s'agit d'une onde autour de la pulsation $\omega_0 = 2\pi\nu_0$, et la présence d'une superposition d'ondes va créer une enveloppe au sein de laquelle se propage l'onde. Nous pouvons relier la durée du paquet d'ondes Δt à la largeur fréquentielle $\Delta\omega = 2\pi\Delta\nu$ par la relation :

$$\Delta\nu \times \Delta t \approx 1 \quad (17.64)$$

(pour une démonstration de cette propriété dans le cadre d'un exemple particulier, se référer au cours d'optique).

On peut retrouver cette propriété en écrivant :

$$\omega = \omega_0 + (k - k_0) \frac{d\omega}{dk} (k = k_0) \quad (17.65)$$

D'où :

$$\omega(k)t - kz = \omega t - (k - k_0)z - k_0 z = (\omega_0 t - k_0 z) + (k - k_0) \left(\frac{d\omega}{dk} (k_0) t - z \right) \quad (17.66)$$

Et donc, en réinjectant dans l'expression du paquet d'onde, nous pouvons écrire que :

$$\vec{E}(z, t) = e^{j(\omega_0 t - k_0 z)} \times \mathcal{A} \left(\frac{d\omega}{dk}(k_0) t - z \right) \quad (17.67)$$

avec

$$\mathcal{A}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{E}_0(k) e^{j(k-k_0)\zeta} dk \quad (17.68)$$

Nous pouvons alors interpréter $\vec{E}(z, t)$ comme une onde plane monochromatique à la pulsation ω_0 , qui est modulée par une enveloppe $\mathcal{A}$. La largeur de l'enveloppe est toujours la même à savoir $\Delta t \approx 1/\Delta \nu$, ainsi plus le paquet d'ondes est spectralement pur et plus sa durée est longue.

Nous constatons alors une propriété très importante :

Théorème — Propagation du paquet d'ondes. Un paquet d'ondes peut se modéliser par une onde plane monochromatique modulée par une enveloppe $\mathcal{A}$. Si on note $\omega = \omega(k)$ la relation de dispersion caractéristique du milieu de propagation, alors :

- La phase de l'onde monochromatique, à l'intérieur du paquet d'onde, se propage à la vitesse $v_\phi = \frac{\omega}{k}$ appelée **vitesse de phase** ;
- L'enveloppe du paquet d'onde se propage à la vitesse $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ appelée **vitesse de groupe**.

Nous admettons que cette propriété se généralise à trois dimensions, ce qui nous permet de définir la vitesse de phase et la vitesse de groupe dans un espace tridimensionnel :

Définition Soit un milieu caractérisé par la relation de dispersion $\omega = \omega(\vec{k})$, alors nous définissons la vitesse de phase $\vec{v}_\phi$ et la vitesse de groupe $\vec{v}_g$ du milieu par :

$$\begin{cases} \vec{v}_\phi = \frac{\omega}{\|\vec{k}\|} \\ \vec{v}_g = \text{grad}_{\vec{k}}(\omega) \end{cases} \quad (17.69)$$

où le gradient est calculé non pas par rapport aux coordonnées d'espace, mais par rapport au vecteur d'onde $\vec{k}$. Pour une propagation unidimensionnelle, l'expression de la vitesse de groupe se simplifie par $v_g = \frac{d\omega}{dk}$.

 **Capacité exigible 14** Déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe dans un plasma, et comparer aux résultats précédents. A quelle vitesse se propage l'énergie ?

17.4.3 Notion de dispersion

Dans le cas où la relation entre ω et k est non linéaire, on peut montrer qu'il va y avoir une déformation du paquet d'onde, et en particulier le paquet d'onde va s'étaler. En effet, dans ce cas, la vitesse de groupe dépend de la fréquence, si bien que les différentes fréquences contenues dans le paquet d'onde vont avoir une énergie qui se propage à des vitesses différentes. On dit alors que la propagation est dispersive :

Définition Un milieu est dit dispersif si la relation de dispersion est non linéaire. Dans ce cas, la vitesse de phase et la vitesse de groupe dépendent de la fréquence, et les paquets d'ondes subissent une déformation (ou étalement) lors de leur propagation.

■ **Démonstration** Cette démonstration n'est pas à connaître.

Pour démontrer ce phénomène d'étalement, nous pouvons aller à l'ordre 2 dans le développement limité :

$$\omega = \omega_0 + (k - k_0) \frac{d\omega}{dk}(k = k_0) + \frac{(k - k_0)^2}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2}(k = k_0) \quad (17.70)$$

Nous allons noter $v_g = \frac{d\omega}{dk}(k = k_0)$ et $\beta = \frac{d^2\omega}{dk^2}(k = k_0)$ pour simplifier l'expression, ainsi que $\zeta = v_g t - z$. Nous avons alors :

$$\omega t - kz = \omega_0 t - k_0 z + (k - k_0)\zeta + \frac{1}{2}(k - k_0)^2 \beta t \quad (17.71)$$

Alors :

$$\vec{E}(z, t) = e^{j(\omega_0 t - k_0 z)} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_0(k) e^{-j(k - k_0)\zeta} e^{-j\frac{(k - k_0)^2}{2}\beta t} dk \quad (17.72)$$

$$= e^{j(\omega_0 t - k_0 z)} \times \frac{1}{\sqrt{\beta t}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_0(k) e^{-ju\frac{\zeta}{\sqrt{\beta t}}} e^{-j\frac{u^2}{2}} du \quad (17.73)$$

où on a posé $u = (k - k_0)\sqrt{\beta t}$. On retrouve alors l'expression d'une onde monochromatique modulée par une enveloppe :

$$\vec{E}(z, t) = e^{j(\omega_0 t - k_0 z)} \times \mathcal{A}(z, t) \quad (17.74)$$

où l'enveloppe est de la forme :

$$\mathcal{A}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\beta t}} \mathcal{F}\left(\frac{v_g t - z}{\sqrt{\beta t}}\right) \quad (17.75)$$

Autrement dit, l'amplitude du paquet d'onde diminue en $1/\sqrt{t}$ alors que l'enveloppe s'étale petit à petit avec une demi-largeur $|z - v_g t| \sim \sqrt{\beta t}$. Le centre du paquet d'onde continue bien à avancer avec la vitesse de groupe v_g .

Nous avons ainsi bien démontré que le paquet d'onde avance à la vitesse de groupe, mais subit un étalement d'autant plus important que β est élevé, c'est-à-dire que la relation de dispersion est non linéaire : c'est le phénomène de dispersion. ■

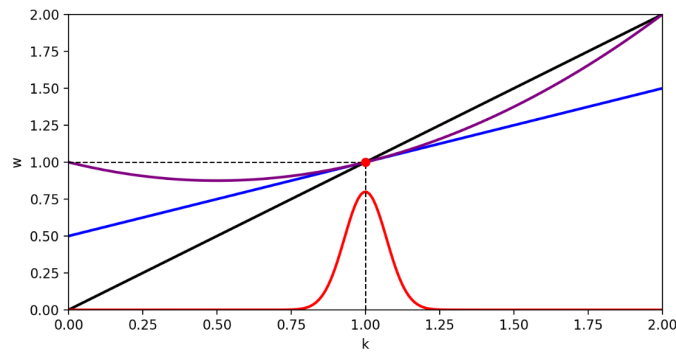
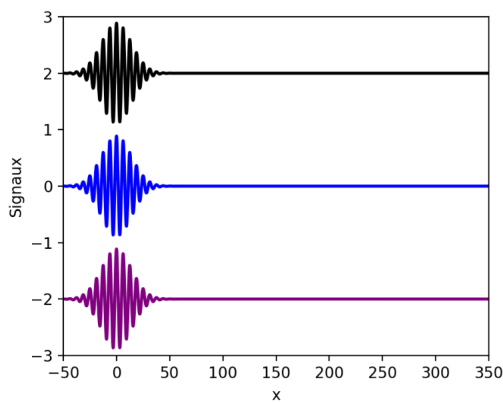
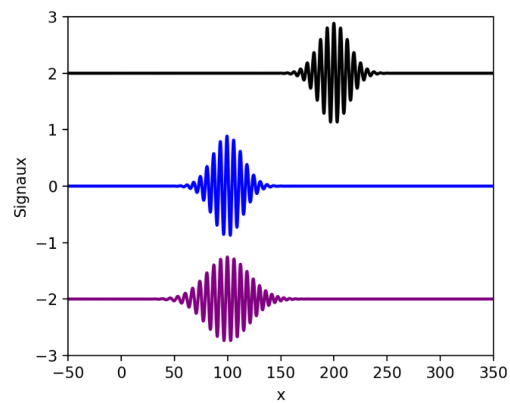


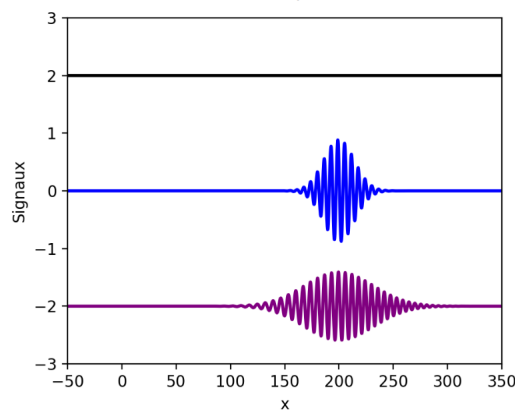
FIGURE 17.10 – Tracé de trois relations de dispersion : en noir un milieu non dispersif et en bleu et violet deux relations plus ou moins dispersives. La courbe rouge représente l'enveloppe initiale du paquet d'onde centrée en $k = 1$ (unités arbitraires). Pour les courbes bleue et violette, la valeur de $d\omega/dk$ est la même en $k = 1$, ainsi elles ont la même vitesse de groupe et le maximum de leur paquet d'onde se propagera à la même vitesse. La relation de dispersion violette a des variations plus rapides que la bleue, elle est plus dispersive. Source : poly de cours de Maxime Champion.



(b) Tracé des trois paquets d'onde au temps initial : ils sont identiques.



(c) Le paquet d'onde noir va plus vite que les deux autres qui ont la même vitesse de groupe.



(d) Après un temps long, le paquet d'onde violet est très déformé car il parcourt un milieu très dispersif.

FIGURE 17.11 – Evolution à trois instants différents du même paquet d'onde (en unités arbitraires) dans trois milieux décrits par les relations de dispersion de la figure précédente. Source : poly de cours de Maxime Champion.