

Propagation des ondes électromagnétiques

Chapitre 17

I - Ondes planes

1 Découpe laser

On étudie le champ électromagnétique d'un laser industriel à CO₂ de longueur d'onde $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$, de puissance moyenne $\mathcal{P} = 0.5 \text{ kW}$ et de section $s = 0.6 \text{ mm}^2$. On modélise grossièrement le champ électromagnétique du faisceau par une onde plane progressive se propageant selon l'axe (Oz), et on note $\vec{E}(z, t)$ le champ électrique associé à l'onde, avec :

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x \quad (1)$$

1. Décrire précisément les différents termes intervenant dans cette écriture et leur sens physique. Décrire l'état de polarisation.
2. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}(z, t)$ attaché à cette onde.
3. Calculer le vecteur de Poynting $\vec{R}$ et sa valeur moyenne $\langle \vec{R} \rangle$. En déduire l'expression littérale de l'amplitude du champ électrique E_0 en fonction de $\mathcal{P}$, s , c et ϵ_0 . Donner sa valeur numérique.
4. Ce faisceau est utilisé pour la découpe de plaques métallique d'épaisseur $e = 5 \text{ mm}$. Le faisceau se propage perpendiculairement à la plaque. On admet que l'énergie du faisceau laser est intégralement absorbée par la métal irradié, et on néglige tout phénomène de conduction thermique, ainsi que tout échange thermique avec l'air ambiant. L'énergie absorbée provoque, en particulier, le chauffage puis la fusion du métal permettant ainsi la découpe de la plaque.
 - (a) Quelle énergie $d\mathcal{E}$ faut-il fournir à un cylindre de métal de section s et d'épaisseur de (et de masse dm), initialement à $T_0 = 300 \text{ K}$, pour le faire fondre ?
 - (b) Déterminer une relation entre $\mathcal{P}$, $d\mathcal{E}$ et le temps dt qu'il faut au laser pour faire fondre un tel cylindre.
 - (c) En déduire la vitesse V de progression du faisceau laser à travers la plaque. Faire l'application numérique.

Données :

- masse volumique du métal : $\mu = 7.88 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$,
- capacité thermique massique du métal : $c = 450 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$,
- enthalpie massique de fusion du métal : $L_f = 270 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$,
- température de fusion du métal : $T_f = 1800 \text{ K}$

2 Étude de l'onde associée à un laser

Une onde plane étant d'extension infinie, elle ne peut représenter de manière réaliste le faisceau d'un laser. Dans un modèle plus réaliste, on considère l'onde électromagnétique émise dans le vide par un laser en $z = 0$. Cette onde se propage selon la direction $\vec{u}_z$ et peut être mise sous la forme suivante, dans la zone $z \geq 0$:

$$\vec{E}(M, t) = E(r, z) \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$$

avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, et en coordonnées cylindriques d'axe (Oz):

$$E(r, z) = E_0 \frac{i z_0}{z + i z_0} \exp\left(-ik \frac{r^2}{2(z + i z_0)}\right)$$

où E_0 et z_0 sont des constantes positives (z_0 est appelée distance de *Rayleigh*).

1. Montrer que le carré du module de $\vec{E}$ se met sous la forme $|\vec{E}(r, z)|^2 = A^2(z) \exp\left(-\frac{r^2}{w(z)^2}\right)$, avec $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}$.
Déterminer la constante w_0 , nommée *waist* en fonction de z_0 et λ . Montrer que $w(z)A(z) = w_0 E_0$.
2. Représenter le graphe de $w(z)$ pour $z \geq 0$.
3. Représenter le graphe du module $|\vec{E}(r, z)|$ du champ électrique en fonction de r pour $z = 0$, puis pour une valeur $z \geq 0$ fixée. Quelle signification physique peut-on donner à $w(z)$ ainsi qu'à la *waist* w_0 ?
4. Montrer que lorsque $z \gg z_0$, le faisceau laser a une forme de cône de sommet O et de demi-angle au sommet β , qui sera exprimé en fonction de w_0 et z_0 , puis en fonction de w_0 et λ .
5. Calculer β en degrés pour un laser YAG – Nd³⁺ possédant pour caractéristiques $w_0 = 0.50$ mm et $\lambda = 1.1$ μ m, puis pour un laser CO₂ de même *waist* mais de longueur d'onde 10 fois plus grande. Commenter.
6. Que dire du comportement du faisceau laser pour $z \ll z_0$?

3 Superposition de deux ondes

Une OPPH électromagnétique de pulsation ω se propage dans le vide. Son vecteur d'onde est: $\vec{k}_1 = k_1(\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_z)$ et son champ électrique est noté $\vec{E}_1(M, t)$. Elle est polarisée rectilignement suivant l'axe Oy .

1. Que vaut k_1 ? Justifier. Quel est le champ magnétique associé à l'onde ?
2. Une deuxième OPPH, de même fréquence, amplitude et polarisation est superposée à la première. Son vecteur d'onde est le symétrique de $\vec{k}_1$ par rapport à $\vec{e}_x$. Ces deux ondes sont en phase à l'origine des coordonnées.
 - (a) Exprimer les champs électrique et magnétique de l'onde globale.
 - (b) Quelle est la direction de propagation de cette onde globale ? Caractériser cette onde. Quelle vitesse de phase peut-on associer à cette onde ? Quelle est la particularité de cette vitesse ?
 - (c) Quelle est la valeur moyenne temporelle $\langle \vec{\Pi} \rangle$ du vecteur de Poynting de l'onde globale ?
 - (d) Exprimer la puissance moyenne dans le temps transportée par l'onde globale à travers une surface S rectangulaire de cotés (L, ℓ) très grands devant la période spatiale de l'onde, perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde globale.
 - (e) Quelle vitesse d'énergie moyenne (moyenne temporelle et spatiale) peut-on associer à cette onde ? Commenter ce résultat.

4 Réflexion totale et onde évanescente

Un milieu diélectrique d'indice d'indice $n > 1$ occupe le demi-espace $y < 0$ tandis que l'air d'indice 1 occupe le demi-espace $y > 0$. Une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω , de vecteur d'onde $\vec{k}_i$, se propageant dans le milieu d'indice n atteint sur la surface de séparation $y = 0$ avec un angle d'incidence $\theta = (\vec{u}_y, \vec{k}_i)$. On pose $\alpha = \frac{n\omega}{c} \cos \theta$ et $\beta = \frac{n\omega}{c} \sin \theta$.

Le champ électrique de l'onde incidente s'écrit, en un point M de l'espace, en notation complexe :

$$\vec{E}_i = E_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \vec{u}_x \quad (2)$$

où E_0 est une constante réelle et $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Nous admettons que les champs électrique de l'onde réfléchi et transmise s'écrivent :

$$\begin{cases} \vec{E}_r = E_{0r} e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \vec{u}_x \\ \vec{E}_t = E_{0t} e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} \vec{u}_x \end{cases} \quad (3)$$

1. Rappeler sans démonstration les lois de Snell-Descartes. A partir de quel angle θ_c y a-t-il réflexion totale ?
2. Exprimer les champs magnétiques $\vec{B}_i, \vec{B}_r$ et $\vec{B}_t$ des trois ondes.

3. On cherche à exprimer $\vec{k}_r$ et $\vec{k}_t$. On notera $\vec{k}_t = k_{ty}\vec{u}_y + k_{tz}\vec{u}_z$.
 - (a) Déterminer une relation entre $k = ||\vec{k}_i||$, $||\vec{k}_r||$ et $||\vec{k}_t||$.
 - (b) En exploitant la continuité du champ électrique en $y = 0$, montrer que $k_{iz} = k_{rz} = k_{tz}$. (On ne cherchera pas à déterminer les amplitudes E_{0r} et E_{0t} .)
 - (c) Déterminer $\vec{k}_r$ et $\vec{k}_t$. La seconde loi de Descartes est-elle vérifiée ?
4. On s'intéresse désormais au cas où il y a réflexion totale.
 - (a) Montrer que k_{ty} est imaginaire pur.
 - (b) Comment peut-on caractériser l'onde dans le milieu $y > 0$? Se propage-t-elle dans la direction $\vec{u}_z$? Dans la direction $\vec{u}_y$?
 - (c) Déterminer l'épaisseur caractéristique δ dans laquelle pénètre l'onde électromagnétique.
5. Le milieu diélectrique, d'indice $n > 1$, occupe des domaines $y < 0$ et $y > L$, tandis que l'air, d'indice 1, occupe la zone $0 < y < L$. Une onde plane progressive harmonique se propage dans la zone $y < 0$ et arrive sur la surface de séparation $y = 0$ avec un angle $\theta > \theta_c$. Expliquer qualitativement ce qu'il se passe si L est de l'ordre de δ .

5 Propagation dans un câble coaxial

Considérons un câble coaxial supposé infini, d'axe (Oz) , constitué d'un cylindre conducteur intérieur, de rayon R_1 dit âme, et d'un cylindre conducteur extérieur dit gaine, de rayon intérieur $R_2 > R_1$. L'âme sert à amener un courant électrique et la gaine en assure le retour. L'espace entre l'âme et la gaine est rempli d'un diélectrique que l'on assimilera au vide.

A l'instant t , au point abscisse z , un courant de forme complexe $i(z, t) = I_0(z)e^{j\omega t}$ circule dans l'âme dans le sens des z croissants, le courant opposé circule en sens inverse dans la gaine. On travaille en régime sinusoïdal forcé, ainsi toutes les valeurs moyennes des champs seront supposées nulles.

On admet qu'en raison des symétries du problème, le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E} = \underline{E}(r, z, t)\vec{e}_r \quad (4)$$

1. (a) Montrer que le champ magnétique est de la forme :

$$\vec{B}(M, t) = B_\theta(r, z, t)\vec{e}_\theta + B_z(r, z, t)\vec{e}_z \quad (5)$$

- (b) Déterminer $B_\theta(r, z, t)$ en fonction de $I_0(z)$, r et ω , l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ entre les deux conducteurs.
- (c) Montrer que $B_z(r, z, t) = 0$

2. (a) Déterminer l'expression de $\vec{E}(M, t)$ entre les deux conducteurs en fonction notamment de $\frac{dI_0}{dz}$.
 (b) En déduire l'expression de la tension $u(z, t)$ entre l'âme et la gaine.
3. En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, montrer que l'on peut mettre le courant sous la forme $I_0(z) = I_0 e^{jkz}$ où k est à déterminer. En déduire que le courant qui circule dans le câble a la structure d'une onde progressive. On notera i_0 son amplitude.
4. En déduire les expressions des champs complexes $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$. Commenter la structure de l'onde électromagnétique dans l'espace entre les conducteurs.
5. Exprimer la puissance moyenne transportée par le câble. Pour optimiser le transport de puissance, faut-il choisir une grande ou une petite âme ?

II - Polarisation

6 Rotation d'une polarisation linéaire

On étudie une onde plane progressive monochromatique se propageant selon (Oz) et polarisée rectilignement selon $\vec{e}_x$. On cherche à faire tourner l'axe de polarisation d'un angle θ , en perdant un minimum d'énergie.

1. Écrire l'expression du champ électrique de l'onde avant la traversée de tout polariseur.
2. On place un polariseur avec un angle θ par rapport à $\vec{e}_x$. Déterminer le champ électrique après traversée du polariseur. Quel est le coefficient de transmission du polariseur, défini comme le rapport entre l'éclairement de l'onde sortant du polariseur et celui de l'onde incidente ?
3. On place maintenant sur le trajet de l'onde une suite de N polariseurs. Chaque polariseur forme un angle ψ avec le précédent.
 - (a) Quel est l'éclairement de l'onde transmise après traversée des N polariseurs ?
 - (b) Montrer que si N est suffisamment grand, on peut faire tourner la polarisation d'un angle θ avec une perte d'énergie négligeable.
 - (c) Combien de polariseurs faut-il pour faire tourner la polarisation de 90° avec une perte d'énergie de 1 % ?

7 Pouvoir rotatoire

Certains milieux cristallins ou certaines solutions modifient l'état de polarisation d'une onde. A partir de considérations sur le couplage quantique entre le moment dipolaire et le moment magnétique à l'échelle microscopique, on peut montrer que dans certains milieux, pour une onde transverse se propageant selon $\vec{e}_z$ (c'est-à-dire telle que $\vec{E} \cdot \vec{e}_z = 0$) la propagation se fait selon l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \gamma \vec{e}_z \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6)$$

On étudie l'effet du milieu sur une onde initialement polarisée rectilignement :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kz)} \quad (7)$$

1. Expliciter les relations vérifiées séparément par E_x et E_y . En déduire l'existence de deux ondes possibles, dont on exprimera les vecteurs d'ondes k_+ et k_- (avec $k_+ > k_-$) en fonction de ω, c et γ .

Dans la suite, on note $k_m = \frac{1}{2}(k_+ + k_-)$ et $\Delta k = k_+ - k_-$.

2. Quel est l'état de polarisation correspondant à chacune des deux solutions k_+ et k_- ?
3. On impose, à l'entrée ($z = 0$) de ce milieu une onde polarisée rectilignement, $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x e^{j\omega t}$ avec $E_0 > 0$. Montrer que, après la traversée d'une épaisseur e de ce milieu, l'onde est polarisée rectilignement selon une direction à préciser.

III - Plasmas

8 Ionosphère

L'ionosphère est considérée comme un plasma dilué neutre contenant une densité d'électrons non relativistes avec $n = 1.0 \times 10^{12} \text{ m}^{-3}$. Les ondes radio peuvent se réfléchir sur l'ionosphère, ce qui affecte les systèmes de télécommunication.

1. Rappeler pourquoi on peut négliger la composante magnétique de la force de Lorentz agissant sur les électrons. Déterminer alors une équation reliant le champ électrique et le vecteur densité de courant.
2. Déterminer l'équation de propagation du champ électrique dans l'ionosphère. En déduire la relation de dispersion. On introduira la pulsation de plasma ω_p .
3. Soit une onde incidente de fréquence 168 kHz. Peut-elle se propager ? Même question pour une onde de 100 MHz.

4. Soit une onde électromagnétique incidente $\vec{E}_i = E_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x$. L'onde réfléchie à l'interface entre l'atmosphère et l'ionosphère en $z = 0$ est notée $\vec{E}_r = E_{0r} e^{j(\omega t + kz)} \vec{e}_x$ et l'onde transmise est notée $\vec{E}_t = E_{0t} e^{j(\omega t - k'z)} \vec{e}_x$.

(a) Donner l'expression de k et k' .

(b) En exploitant la continuité des champs électrique et magnétique, donner les relations entre E_0 , E_{0r} et E_{0t} . En déduire le coefficient de réflexion en puissance.

9 Fonctionnement du GPS

On s'intéresse au fonctionnement du système GPS (Global Positioning System), en particulier si la prise en compte de la dispersion due à la traversée de l'ionosphère est nécessaire pour la détermination d'une position.

L'ionosphère d'épaisseur H peut être modélisée comme un plasma dilué globalement neutre. De plus, le plasma est suffisamment froid pour pouvoir négliger l'effet du champ magnétique d'une onde par rapport à celui de son champ électrique.

On assimile l'espace en dehors de l'ionosphère au vide.

On s'intéresse à une onde électromagnétique plane pseudo progressive harmonique dont le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) \quad (8)$$

On note $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$ la fréquence plasma.

1. On envoie 2 trains d'onde de fréquences f_1 et $f_2 = f_1 + \Delta f$ puis on mesure l'écart Δt entre leurs temps de parcours. Exprimer Δt avec $f_1 \gg f_p$ et $f_1 \gg \Delta f$. Montrer que l'on peut ainsi mesurer la fréquence plasma f_p .
2. Déterminer l'erreur sur la position faite si la dispersion est négligée puis conclure.

Données : La fréquence des ondes utilisées par le GPS est de l'ordre de 1.5 GHz. L'ionosphère est comprise entre 80 et 1000 km d'altitude. Fréquence plasma pour l'ionosphère : $f_p = 10$ MHz.

10 Effet Faraday (difficile)

Un plasma isolé est un milieu localement neutre, homogène et isotrope. L'isotropie de ce milieu peut cependant être brisée lorsque le plasma est soumis à un champ magnétique extérieur ce qui se manifeste alors par l'apparition d'un pouvoir rotatoire. Cet effet est connu sous le nom d'effet Faraday.

Considérons une onde électromagnétique plane progressive harmonique de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_z$ se propageant dans un plasma peu dense de densité électronique n_e et densité ionique n_i en présence d'un champ magnétique statique $\vec{B}_0 = B_0\vec{u}_z$ suivant l'axe de propagation de l'onde. L'amplitude du champ magnétique statique $\vec{B}_0$ est supposée très grande devant l'amplitude du champ magnétique associé à l'onde. On notera $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$ la pulsation cyclotron avec m_e la masse d'un électron.

1. Montrer que le champ électrique $\vec{E}$ associé à l'onde électromagnétique se propageant dans le plasma est transverse.
2. On CHERCHE $\underline{\sigma}$ tel que le plasma peut se modéliser par la relation $\underline{j} = \underline{\sigma}\underline{E}$ Montrer que pour une onde polarisée circulairement, :

$$\underline{\sigma} = \frac{e^2 n_e}{m_e} \frac{1}{i(\omega + \epsilon \omega_c)} \quad (9)$$

où $\epsilon = -1$ pour une onde polarisée circulairement gauche et $\epsilon = +1$ pour une onde polarisée circulairement droite.

3. En déduire les relations de dispersion des ondes de polarisation circulaire gauche et droite. On introduira la pulsation plasma $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}}$.
4. A quelles conditions sur leur pulsation, les ondes circulaires gauche et droite peuvent-elles se propager dans le plasma?
5. Donner l'expression des vitesses de phase des ondes circulaires gauche et droite. Expliquer pourquoi on parle d'anisotropie circulaire pour l'effet Faraday.

Pour mettre en évidence le pouvoir rotatoire de ce milieu, on considère que le plasma précédent est confiné sur une épaisseur ℓ entre $z = 0$ et $z = \ell$. Une onde électromagnétique se propageant suivant l'axe (Oz) et de polarisation rectiligne suivant $\vec{u}_x$ pénètre dans le plasma en $z = 0$. Le champ électrique associé à cette onde en $z = 0$ s'écrit:

$$\vec{E}(z = 0, t) = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x \quad (10)$$

6. Écrire l'amplitude complexe du champ électrique associé à l'onde électromagnétique en $z = 0$ comme la superposition de deux champs: un champ associé à une onde circulaire gauche et un champ associé à une onde circulaire droite.
7. Montrer que l'onde sortant du plasma en $z = \ell$ est polarisée rectilignement mais que la direction de polarisation a tourné d'un angle ψ par rapport à la polarisation incidente suivant $\vec{u}_x$. Exprimer ψ .

8. Dans le cas où la pulsation de l'onde est telle que $\omega \gg \omega_c$ et $\omega \gg \omega_p$, montrer que l'angle de rotation de polarisation ψ peut s'écrire sous la forme:

$$\psi = \mathcal{V} \ell B_0 \quad (11)$$

où $\mathcal{V}$ est la constante de Verdet que l'on exprimera en fonction des constantes du problème.

9. L'ionosphère se comporte comme un plasma peu dense d'épaisseur $\ell = 1 \text{ km}$ et de densité électronique $n_e = 1 \times 10^{12} \text{ m}^{-3}$. Ce milieu présente un effet Faraday dû au champ magnétique terrestre $\vec{B}_T$ dont l'amplitude est $B_T = 5 \times 10^{-5} \text{ T}$. Calculer l'angle de rotation de la polarisation ψ ainsi que la constante de Verdet $\mathcal{V}$ pour une onde se propageant dans la direction du champ magnétique $\vec{B}_T$ et dont la longueur d'onde dans le vide est $\lambda = 20 \text{ cm}$.

Certains matériaux solides présentent aussi un effet Faraday. Il est possible de fabriquer des matériaux présentant une constante de Verdet bien plus grande que celle du plasma. Un de ces matériaux est le TGG de formule $\text{Tb}_3\text{Ga}_5\text{O}_{12}$ dont la constante de Verdet à 532 nm est $\mathcal{V} = -1.075 \times 10^4 \text{ }^\circ \text{ m}^{-1} \text{ T}^{-1}$.

L'effet Faraday présente un grand intérêt technologique car le pouvoir rotatoire induit par l'effet Faraday ne dépend que de la direction du champ magnétique extérieur $\vec{B}_0$ et aucunement du sens de propagation de la lumière. Ce qui ne serait pas le cas pour un milieu chiral par exemple.

10. L'effet Faraday dans les cristaux de TGG est utilisé en pratique pour réaliser des isolateurs optiques et ainsi éviter qu'une réflexion parasite ne revienne perturber la source lumineuse. Proposer une réalisation de cet isolateur en utilisant deux polariseurs et un barreau de TGG.

IV - Dispersion

11 Onde de marée

La relation de dispersion d'une onde à la surface d'une eau de profondeur h est donnée par:

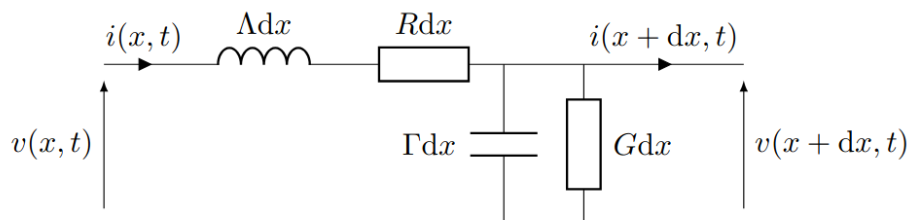
$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\gamma}{\mu} k^3 \right) \tanh(kh) \quad (12)$$

où g est l'accélération de la pesanteur, μ la masse volumique de l'eau et γ la constante de tension superficielle à l'interface eau-air.

1. Montrer que γ est homogène à une force par unité de longueur.¹
2. Déterminer la distance caractéristique ℓ_c , appelée longueur capillaire, qui permet de comparer les effets de la tension superficielle (second terme) et ceux de la pesanteur (premier terme).
3. Comment se simplifie l'équation de dispersion si la longueur d'onde λ est très inférieure à ℓ_c ? Si elle est très supérieure à ℓ_c ? Donner dans chaque cas la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g dans un milieu de faible profondeur ($h \ll \lambda$) puis dans un milieu de grande profondeur ($h \gg \lambda$). Quand a-t-on dispersion ?
4. On donne $\gamma = 7.33 \times 10^{-2} \text{ J m}^{-2}$. Calculer ℓ_c . Calculer v_φ et v_g pour une onde de marée dans l'océan (on prendra $\lambda = 1000 \text{ km}$ et $h = 5 \text{ km}$), une houle de longueur d'onde 5 m dans un océan profond, puis pour une onde dans une cuve à onde ($\lambda = 3 \text{ cm}$ et $h = 1 \text{ mm}$).

12 Dispersion dans un câble coaxial avec pertes

Un câble coaxial est constitué d'un fil central (en haut sur la figure) et d'un enroulement cylindrique tressé (en bas sur la figure). L'espace qui sépare les conducteurs est rempli d'un isolant de matière plastique. Certaines ondes électromagnétiques se propageant le long du câble peuvent être modélisées par un modèle électrocinétique à constantes réparties représenté ci-dessous : où les quatre grandeurs Λ , Γ , R et G sont linéiques ; elles



représentent respectivement l'inductance, la capacité, la résistance et la conductance linéiques du tronçon de longueur dx .

1. Établir l'équation à laquelle la tension $v(x, t)$ obéit (appelée équation des télégraphistes).
La mettre sous la forme :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (R\Gamma + \Lambda G) \frac{\partial v}{\partial t} + RGv \quad (13)$$

¹ γ est appelée tension de surface et correspond en effet à la force de tension exercée au niveau de l'interface eau-air, par unité de longueur d'interface.

2. On cherche des solutions sous la forme d'ondes progressives :

$$\underline{v}(x, t) = v_0 e^{j(\omega t - kx)} \quad (14)$$

- (a) Exprimer la relation de dispersion. On pourra faire apparaître les facteurs $R + j\Lambda\omega$ et $G + j\Gamma\omega$.
- (b) En écrivant $\underline{k} = k_1 - jk_2$, à quelle(s) condition(s) y a-t-il propagation sans atténuation ?
- (c) A quelle condition y a-t-il propagation sans dispersion ?