

I - Génération d'harmoniques dans les gaz

1. L'électron subit une force électrique $\vec{F}_e = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

Cette force a un support qui passe toujours par le point O (position du proton), il s'agit donc d'une force centrale. Par ailleurs la force dérive d'une énergie potentielle: $\vec{F}_e = -\text{grad}(W_p)$ avec

$$W_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{et ainsi} \quad \delta W = \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = -dW_p.$$

2. Sur une orbite circulaire uniforme, en notant v la vitesse de l'électron, on lui applique le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel du proton supposé galiléen:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

Or l'accélération est $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{v^2}{r} \vec{e}_r$ d'où son énergie cinétique:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad \text{et} \quad W_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

On en déduit l'énergie mécanique:

$$W_m = E_c + W_p = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

Le moment cinétique sur la trajectoire est:

$$\vec{L} = (r\vec{e}_r) \wedge m\vec{v} = mrv \vec{e}_\theta. \quad \text{Ainsi} \quad L^2 = m^2 r^2 v^2$$

$$\text{D'où: } (m\hbar)^2 = \frac{mrv^2}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{soit} \quad r = a_0 n^2 \quad \text{où} \quad a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m e^2}$$

Lorsque l'électron est dans son état fondamental W_m est minimal donc r est minimal et on a $n=1$. Alors:

$$W_0 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{m e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} = \frac{m e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} = 13,6 \text{ eV}$$

3. On a autour du proton assimilé à une charge ponctuelle:

$$\|\vec{E}\| = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{D'où, à l'emplacement de l'électron:}$$

$$\|\vec{E}\| = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0^2} \sim 5,8 \cdot 10^{11} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

La puissance de l'impulsion laser est $P = \frac{W_T}{T} = \frac{10^{-3} \text{ J}}{50 \cdot 10^{-15} \text{ s}} = 2 \cdot 10^{10} \text{ W}$ pour un gaz

Or la puissance du laser vaut également $P = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \times \underbrace{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2}_{\text{surface du faisceau}}$

Donc $E_0 = \sqrt{\frac{8P}{\pi\epsilon_0 c D^2}}$ où D est le diamètre du faisceau

norme du vecteur de Poynting

Avant la lentille $E_L = 4,4 \cdot 10^8 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$

Au niveau du foyer image le diamètre du faisceau est réduit et,

on a: $\tan(\alpha) = \frac{D}{2f} = \frac{\lambda_0}{\pi R_0}$ d'où $R_0 = \frac{2\lambda_0 f}{\pi D}$

soit un diamètre $D_0 = 2R_0 = \frac{4\lambda_0 f}{\pi D} = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}$

Ainsi: $E_f = \sqrt{\frac{8P}{\pi\epsilon_0 c D_0^2}} = 4,4 \cdot 10^{10} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$

On a $E_f \gg E_L$ car le faisceau est focalisé et $E_c > E_f$ donc le champ électrique n'est pas tout à fait suffisant pour ioniser un atome d'hydrogène mais il peut ioniser des atomes dans un état excité (typiquement pour $n^2 \geq 10$).

4. La taille de l'atome $a_0 \sim 10^{-10} \text{ m}$ est très petite devant la longueur d'onde $\lambda \sim 8 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ ainsi:

$$k_0 z = 2\pi \times \frac{a_0}{\lambda_0} \ll 1 \quad \text{et on peut donc négliger ce terme.}$$

5. On a: $W_f = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$. Sans autre correspond bien à

la figure II.a.

6. La force de Lorentz ressentie est $\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ où \vec{v} est la vitesse de l'électron.

Pour une onde plane $\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$ où \vec{u} est le vecteur unitaire dans la direction de propagation. Ainsi $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$ et donc $\|\vec{v} \wedge \vec{B}\| \leq \frac{\|\vec{v}\|}{c} \|\vec{E}\|$.

La force magnétique est négligeable si $\|\vec{v}\| \ll c$ donc si l'électron est non relativiste ; sous cette condition la force est conservative et s'écrit $\vec{F} = -\text{grad}(W_{\text{plax}}) = -e E_y \cos(\omega_0 t) \hat{u}_x$.

On en déduit : $W_{\text{plax}} = e E_y x \cos(\omega_0 t)$ en prenant la constante d'intégration nulle ($W_{\text{plax}} = 0$ si $E_y = 0$).

On a donc :

$$W_{\text{plax}} = e E_y x \cos(\omega_0 t) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 x}$$

Sur la figure II.b. $E_y \cos(\omega_0 t) < 0$ donc le champ électrique est orienté selon $-\hat{u}_x$.

7. La traversée de la barrière de potentiel est la plus facile lorsque celle-ci est la plus basse, ce qui se produit pour $\cos(\omega_0 t) = +1$ ou $\cos(\omega_0 t) = -1$ (dans ce cas le maximum local de potentiel se trouve soit pour $x > 0$ soit pour $x < 0$).

Supposons $\cos(\omega_0 t) = -1$, alors $W_{\text{plax}} = -e(E_y x + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 x})$

$$\frac{dW_{\text{plax}}}{dx} = 0 \Leftrightarrow E_y - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 x^2} = 0 \Leftrightarrow x_0 = \sqrt{\frac{e}{4\pi\epsilon_0 E_y}}$$

Pour que l'atome puisse s'ioniser il faut que le maximum de potentiel soit $-W_0$ c'est-à-dire :

$$-W_0 = W_{\text{plax}}(x_0) = -e \left(E_y \sqrt{\frac{e}{4\pi\epsilon_0 E_y}} + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\frac{e}{4\pi\epsilon_0 E_y}}} \right) = -e \sqrt{\frac{e E_y}{4\pi\epsilon_0}}$$

Il faut donc: $E_{fi} = \frac{4\pi\epsilon_0 W_0^2}{e^3} \approx 1,3 \cdot 10^{11} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

Nous avons vu $E_f = 4,4 \cdot 10^{10} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ en Q3, et $E_{fi} > E_f$ donc les conditions ne permettent pas l'ionisation.

8. On applique le principe fondamental de la dynamique à l'électron dans le référentiel du noyau; l'électron est soumis à la seule force électrique du laser: $m \ddot{x} = -e E_f \cos(\omega_0 t)$.

D'où: $\ddot{x} = -\frac{e E_f}{m \omega_0} \sin(\omega_0 t) + c^{ste}$

Où $x(t=t_i) = 0$ donc $\dot{x} = \frac{e E_f}{m \omega_0} (\sin(\omega_0 t_i) - \sin(\omega_0 t))$.

Enfin $x(t) = \frac{e E_f}{m \omega_0} \left(\sin(\omega_0 t_i) \cdot t + \frac{1}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) + c^{ste} \right)$.

Mais $x(t=t_i) = 0$ donc:

$$x(t) = \frac{e E_f}{m \omega_0} \left(\sin(\omega_0 t_i)(t-t_i) + \frac{1}{\omega_0} (\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t_i)) \right)$$

x_0 sera bien négligeable si l'électron s'éloigne beaucoup du puits de potentiel donc si $|x| \gg a_0$ soit: $\frac{e E_f}{m \omega_0^2} \gg a_0$

9. On a donc:

$$W_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{e^2 E_f^2}{2 m \omega_0^2} \left[\sin^2(\omega_0 t_i) + \sin^2(\omega_0 t) + 2 \sin(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t_i) \right]$$

D'où: $\langle W_c \rangle = \frac{e^2 E_f^2}{4 m \omega_0^2} \left[1 + 2 \sin^2(\omega_0 t_i) \right]$ car $\langle \sin^2 \omega_0 t \rangle = \frac{1}{2}$
 $\langle \sin \omega_0 t \rangle = 0$

Où on sait qu'à l'ionisation $\cos(\omega_0 t_i) = \pm 1$ (Q7) donc t_i est tel que $\sin(\omega_0 t_i) = 0$ et:

$$\langle W_c \rangle = \frac{e^2 E_f^2}{4 m \omega_0^2}$$

L'étendue du spectre est telle que $h \cdot \Delta\nu = W_{g, \max} = 3,2 \langle W \rangle$

Donc $\Delta\nu = 3,2 \cdot \frac{\langle W \rangle}{h}$

Or on sait que pour un train d'ondes de durée δT on a $\Delta\nu \delta T \approx 1$

Donc $\delta T \approx \frac{h}{3,2 \langle W \rangle} \approx \boxed{2 \cdot 10^{-17} \text{ s}}$

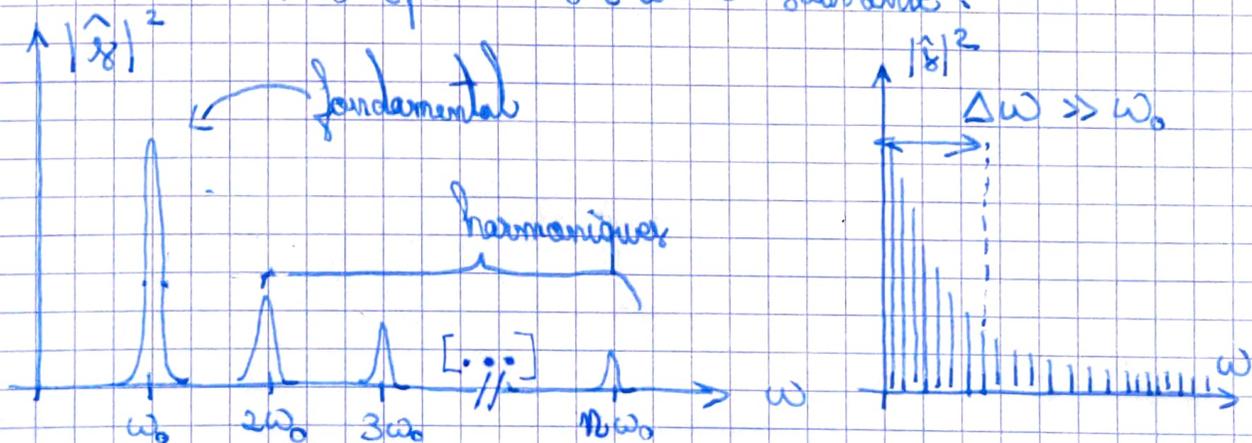
10. La fonction x_0 étant T_0 -périodique, il est possible de la décomposer en série de Fourier: $x_0(u) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(2\pi n \frac{u}{T_0} + \varphi_n)$

L'équation de d'Alembert pour la propagation du champ étant linéaire, il suffit de se ramener à l'étude d'une fonction sinusoidale. Les solutions de ces équations étant des ondes progressives:

$$\begin{cases} x_+(x, t) = x_+(0, t - \frac{x}{c}) = x_0(t - \frac{x}{c}) \\ x_-(x, t) = x_-(0, t - \frac{x}{c}) = -x_0(t - \frac{T_0}{2} - \frac{x}{c}) \end{cases}$$

Le signal est d'amplitude maximale pour le mode fondamental donc pour $\omega = \omega_0$, ce qui correspond à la fréquence du fondamental du train d'impulsions, avec un écart en fréquence

$\Delta\omega = \Delta\nu \times 2\pi$. Le spectre a l'allure suivante:



ω_0 correspond à la pulsation du laser ($\sim 10^{14} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$)

$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\delta T}$ est lié à la durée des impulsions ($\delta\omega \sim 10^{17} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$) et correspond à la largeur totale du spectre.

II - Génération d'harmoniques sur un miroir plasma

11. La densité volumique de charges est la somme de deux contributions:

$$* \rho_{\text{électrons}} = -n \times e \quad \text{pour} \quad -\frac{L}{2} + X(t) \leq x \leq \frac{L}{2} + X(t)$$

$$* \rho_{\text{ions}} = +n \times e \quad \text{pour} \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$$

On en déduit:

$$\rho = \begin{cases} +ne & \text{pour} \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq -\frac{L}{2} + X(t) \\ -ne & \text{pour} \quad \frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} + X(t) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Le problème étant unidimensionnel $\text{div}(\vec{E}) = \frac{dE_x}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

On en déduit, en supposant le champ électrique nul loin du plasma, (équation de Maxwell - Gauss) que:

$$\vec{E}(x) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si} \quad x < -\frac{L}{2} \\ \frac{ne}{\epsilon_0} \left(x + \frac{L}{2}\right) \hat{u}_x & \text{si} \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq -\frac{L}{2} + X(t) \\ \frac{ne}{\epsilon_0} X(t) \hat{u}_x & \text{si} \quad -\frac{L}{2} + X(t) \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{ne}{\epsilon_0} \left(X(t) + \frac{L}{2} - x\right) \hat{u}_x & \text{si} \quad \frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} + X(t) \\ \vec{0} & \text{si} \quad x > \frac{L}{2} + X(t) \end{cases}$$

Ainsi on conclut que dans le plasma: $\vec{E}(t) = \frac{ne}{\epsilon_0} X(t) \hat{u}_x$

Un électron du plasma est soumis à une force $\vec{F}_0 = -e\vec{E}$, en lui appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel du solide on trouve: $m\ddot{X} = -eE(t) = -\frac{ne^2}{\epsilon_0} X(t)$

On obtient une équation d'oscillateur harmonique $\ddot{X} + \omega_p^2 X = 0$,

et le plasma va osciller à la pulsation $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$

12. Les équations de Maxwell sont:

13. La réflexion se produit à l'abscisse x telle que $\omega = \omega_p(x)$ (la propagation n'est alors plus possible), et on a $n(x) = n_c$ soit :

$$n_{\max} e^{\frac{x}{L}} = n_c \Leftrightarrow x = L \ln\left(\frac{n_c}{n_{\max}}\right)$$

Ainsi :

$$x_c = L \ln\left(\frac{n_c \epsilon_0 \omega^2}{n_{\max} \epsilon^2}\right)$$

14. On doit avoir continuité du champ électrique à l'interface, donc :

$$\vec{E}(x=0^+) = \vec{E}(x=0^-)$$

D'où $\vec{E}_0 \cos(\omega t - k_{xy}^+ y) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k_{xy}^- y)$

où k_{xy}^+ et k_{xy}^- sont les composantes de \vec{k} selon y pour $x < 0$ et $x > 0$.

Cette égalité n'est possible que si $k_{xy}^+ = k_{xy}^-$.

On a réflexion lorsque $k_x = 0$ soit $\omega^2 = \omega_p^2 + k_{xy}^2 c^2$, c'est-à-dire :

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \omega^2 \sin^2 \beta \quad \text{car } k_{xy} = \frac{\omega}{c} \sin \beta$$

D'où : $\omega^2 (1 - \sin^2 \beta) = \omega^2 \cos^2 \beta = \omega_p^2$

Le calcul précédent reste le même mais on remplace désormais ω^2 par $\omega^2 \cos^2 \beta$, ainsi :

$$x_x = L \ln\left(\frac{n_c \epsilon_0 \omega^2 \cos^2 \beta}{n_{\max} \epsilon^2}\right)$$

D'où :

$$x_s = x_c + L \ln(\cos^2 \beta)$$

On constate que $x_s < x_c$ (car $\ln(\cos^2 \beta) < 0$) et donc la réflexion se produit plus faiblement en incidence oblique.

15. Le paquet avance à vitesse constante v et passe en $x = -3L$ à $t = 0$ donc :

$$t_0(x) = \frac{1}{v}(x + 3L)$$

On a par ailleurs des ondes qui sont excitées au passage du paquet, avec $\phi(x, t) = \omega_p(x) \times (t - t_0(x))$

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \end{cases}$$

Les électrons du plasma sont soumis à la force de Lorentz, avec $\vec{F} = -e\vec{E}$ s'ils sont non relativistes (Q6). On en déduit, en leur appliquant le principe fondamental de la dynamique comme vers Q11:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = -e\vec{E}$$

Or $\vec{j} = -ne\vec{v}$ donc $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} \vec{E}$.

On prend le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) &= -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot}(\vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ &= -\frac{1}{c^2} \left(\frac{ne^2}{\epsilon_0 m} \vec{E} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right) \quad \text{car } \frac{1}{\mu_0} = \epsilon_0 c^2 \end{aligned}$$

Or $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$ et $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$

dans le plasma donc on conclut que:

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \omega_p^2 \vec{E} \right)$$

En introduisant l'expression complexe du champ électromagnétique:

$$-\vec{k}^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} (\omega_p^2 - \omega^2) \vec{E}$$

D'où: $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$

La propagation n'est possible que si $\omega > \omega_p$ soit $\omega^2 > \frac{ne^2}{m\epsilon_0}$

Il faut donc $n < n_c$ avec $n_c = \frac{m\epsilon_0 \omega^2}{e^2}$

On a alors une onde évanescente dans le plasma pour $n > n_c$, et l'onde propagative est réfléchiée à la surface du plasma.

$$\text{Or } \omega_p(x) = \sqrt{\frac{n(x)e^2}{\epsilon_0 m_e}} = \omega_{\max} \sqrt{\frac{n(x)}{n_{\max}}} = \omega_{\max} e^{\frac{x}{2L}}$$

$$\text{Ainsi: } \boxed{\phi(x, t) = \omega_{\max} \left(t - \frac{x+3L}{v} \right) e^{\frac{x}{2L}}}$$

$$16. \text{ On a } \vec{k}_p \cdot \hat{u}_x = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ = \omega_{\max} \left[\frac{1}{2L} \left(t - \frac{x+3L}{v} \right) - \frac{1}{v} \right] e^{\frac{x}{2L}}$$

$$\text{Ainsi } \vec{k}_p \cdot \hat{u}_x = 0 \Leftrightarrow t - \frac{x+3L}{v} = \frac{2L}{v} \\ \Leftrightarrow t = \frac{x+5L}{v} (> 0 \text{ pour } x > -3L)$$

Il y a donc un instant $t > 0$ pour lequel un rayonnement est émis en un point $x > -3L$. En revanche, si on a une propagation vers les $x < 0$ du paquet d'électrons on aurait $t_0(x) = -\frac{x}{v}$ (en supposant le paquet en $x=0$ à $t=0$) d'où :

$$\phi(x, t) = \omega_{\max} \left(t + \frac{x}{v} \right) e^{\frac{x}{2L}} \quad \vec{k}_p \cdot \hat{u}_x = \omega_{\max} \left[\frac{1}{2L} \left(t + \frac{x}{v} \right) + \frac{1}{v} \right] e^{\frac{x}{2L}}$$

$$\text{et donc } \vec{k}_p \cdot \hat{u}_x = 0 \Leftrightarrow t + \frac{x}{v} = -\frac{2L}{v} \Leftrightarrow t = -\frac{x+2L}{v} < 0$$

donc il n'y a pas d'instant $t > 0$ qui satisfait la condition d'émission pour $x > -2L$.

17. Le front d'onde arrive en M après avoir parcouru la distance $y \sin(\beta)$ donc à un instant $\boxed{t = \frac{y}{c} \sin \beta}$

On en déduit que l'on doit rajouter ce temps à la propagation selon x et $t_0(x, y) = \frac{x+3L}{v} + \frac{y}{c} \sin \beta$.

$$\text{D'où } \phi(x, y, t) = \omega_{\max} \left(t - \frac{x+3L}{v} - \frac{y}{c} \sin \beta \right) e^{\frac{x}{2L}}$$

On a alors comme condition d'émission :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{1}{2L} \left(t - \frac{x+3L}{v} - \frac{y}{c} \sin \beta \right) - \frac{1}{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{v}{c} \sin(\beta) y = vt - 5L$$

Les points d'émission sont localisés sur une droite formant avec l'onde incidente un angle d'autant plus important que $v \neq c$, comme représenté sur la figure (en face de Q17).

Comme l'émission est cohérente, cette droite forme un front d'onde cohérent et on peut parler d'émission cohérente de sillage. Le spectre de cette ECS couvre toutes les pulsations $\omega < \omega_{\max}$ et dépend de la position sur la droite, on a $\omega = \omega_p(x)$. Une fois dans le plasma l'onde est à $\omega = \omega_p$.

III - Interaction d'une impulsion avec une feuille mince

18. Pour que le plasma puisse être considéré comme un gaz parfait on doit pouvoir négliger les interactions entre les particules chargées devant l'agitation thermique, il faut donc que $\frac{3}{2} k_B \theta_e \gg \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 d}$

où d est la distance entre particules. C'est le cas à haute température.

On a, par le premier principe appliqué au plasma pendant l'expansion:

$$dU = \delta W + \delta Q$$

Or $\delta W = 0$ car l'expansion se fait dans le vide ($P_{\text{ext}} = 0$)

$\delta Q = 0$ car le plasma n'a aucun transfert thermique après avoir été formé par impulsion laser.

Or pour un gaz parfait $dU = C_v d\theta_e$ donc $d\theta_e = 0$ et la température du plasma est inchangée.

19. On a conservation du nombre total de particules, ainsi le nombre de particules par unité de surface dans le plasma reste constant:

$$n_{0y} = \int_{-\infty}^{+\infty} n_0(x) dx = c \quad \text{On en déduit que:}$$

$$n_{0,max} \times S = n_{L,max} \times S + 2 \int_0^L n_{L,max} e^{-\frac{x}{L}} dx$$

$$= n_{L,max} \times (S + 2L).$$

D'où :

$$n_{L,max} = \frac{S}{S + 2L} n_{0,max}$$

On en déduit la relation entre les pulsations sachant que $\omega_p \propto \sqrt{n}$:

$$\omega_{L,max} = \sqrt{\frac{S}{S + 2L}} \omega_{0,max}$$

20. Dans le cadre de ce modèle on a $L = \sqrt{\frac{Zk_B \Theta_e}{m_i}}$ et donc :

$$\omega_{L,max} = 18,7 \omega_0 \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{S} \sqrt{\frac{Zk_B \Theta_e}{m_i}} \frac{2\pi}{\omega_0}}}$$

D'où :

$$\omega_0 + \frac{4\pi}{8\omega_0} \sqrt{\frac{Zk_B}{m_i}} \cdot \sqrt{\Theta_e} = \left(\frac{\omega_{L,max}}{18,7 \omega_0} \right)^{-2}$$

On relève les mesures suivantes sur la figure IV.6 :

S [nm]	10	19	28	50	100
$\frac{\omega_{L,max}}{\omega_0}$	13	15	16	17	18

Pour vérifier le modèle on trace $\left(\frac{\omega_{L,max}}{18,7 \omega_0} \right)^2$ en fonction de $\frac{4\pi}{8\omega_0} \sqrt{\frac{Zk_B}{m_i}}$
avec $\frac{4\pi}{8\omega_0} = \frac{2}{8} \times T = \frac{2}{8} \times \frac{\lambda_0}{c}$ et $\lambda_0 = 800 \text{ nm}$ (doc I).

On obtient une droite ($r^2 = 0,9996$) avec une ordonnée à l'origine de 0,94 (au lieu de 1) et une pente $\sqrt{\Theta_e} = 3,0 \cdot 10^8 \text{ K}^{1/2}$

D'où :

$$\Theta_e = 9,0 \cdot 10^8 \text{ K}$$

21. Dans ce cas on doit avoir une énergie cinétique totale qui ne varie pas, or l'énergie cinétique par unité de surface vaut

$$E_{e,v} = \int_{-\infty}^{+\infty} n_0(x) \times \frac{3}{2} k_B \partial_E(x) dx = \frac{3}{2} k_B \partial_e * S n_{0,max}$$

en supposant que $\partial_E(x) = \partial_E$ est uniforme. On trouve alors que

$$\partial_e = \frac{3 k_B E_s}{2 S n_{0,max}} \quad \text{donc } \partial_E \text{ varie comme } \frac{1}{S}$$

Or $L \propto \sqrt{D_e} \propto \frac{1}{\sqrt{S}}$ donc $L = L_0 \sqrt{\frac{S_0}{S}}$ et

en réécrivant Q19 on trouve :

$$\omega_{L,max} = \sqrt{\frac{S}{S + L_0 \sqrt{\frac{S_0}{S}}}} \quad \omega_{0,max} = \frac{\omega_{0,max}}{\sqrt{1 + \frac{L_0 \sqrt{S_0}}{S^{3/2}}}}$$

Dans ce nouveau modèle : $\left(\frac{\omega_{0,max}}{\omega_{L,max}}\right)^2 = 1 + \frac{L_0 \sqrt{S_0}}{S^{3/2}}$

On trace $\left(\frac{\omega_{0,max}}{\omega_{L,max}}\right)^2$ en fonction de $\frac{1}{S^{3/2}}$, on trouve une droite également ($r^2 = 0,991$) et cette fois-ci l'ordonnée à l'origine est de 1,07 (au lieu de 1).

Les deux modèles sont en relativement bon accord avec les observations, il faudrait plus de mesures et une estimation des incertitudes de mesure pour les départager.