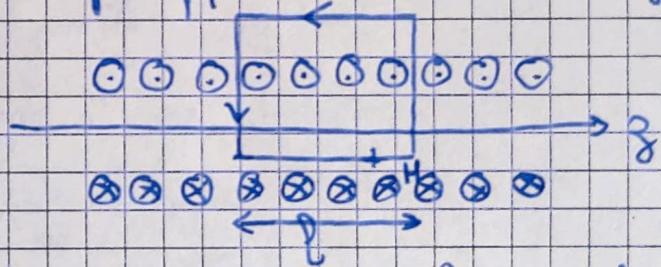


Corrigé - DM 16
Type CCINP

I - Confinement magnétique du plasma

1. Soit M un point de l'espace, on se place dans le repère de coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe (Oz) . Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution de courants, donc $\vec{B}(M)$ est orthogonal à ce plan: $\vec{B} = B(M)\vec{u}_z$. De plus, la distribution de courants est invariante par translation selon z et rotation, d'angle θ donc $\vec{B} = B(r)\vec{u}_z$. On définit le contour Γ suivant:



On a:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = l \times B(M)$$

car \vec{B} est nul à l'extérieur du solénoïde. De plus, le courant enlacé est $I_{\text{enlacé}} = N \times \frac{l}{d} \times i$

Par le théorème d'Ampère: $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$

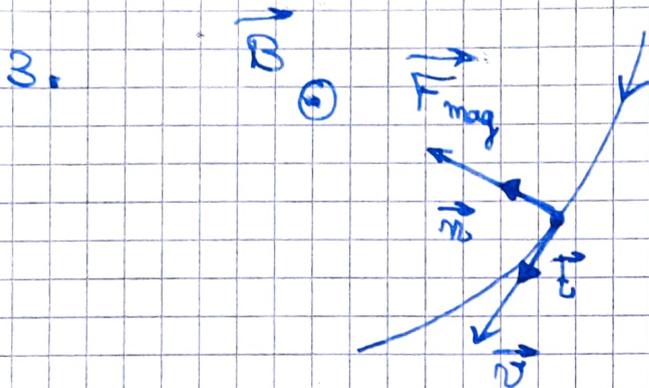
On en déduit: $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$ ou $B_0 = \frac{\mu_0 N I}{d}$

2. La force magnétique est $\vec{F}_{\text{mag}} = e \vec{v} \wedge \vec{B}$ où \vec{v} est la vitesse du cation. On en déduit la puissance de la force:

$$P_{\text{mag}} = \vec{F}_{\text{mag}} \cdot \vec{v} = e (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{par propriété du produit scalaire}$$

Le cation étant soumis uniquement à la force magnétique, on lui applique le théorème de l'énergie cinétique dans le référentiel du solénoïde supposé galiléen: $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = P_{\text{mag}} = 0$.

Son énergie cinétique est donc constante et la norme de la vitesse du cation est constante.



\vec{n}_b et \vec{t} sont les vecteurs unitaires du repère de Frenet.

4. On a $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{t} + \frac{v^2}{r} \vec{n}_b = \frac{v_0^2}{r} \vec{n}_b$ car $v = v_0 = c$ etc

On applique le principe fondamental de la dynamique au cation dans le référentiel du solénoïde supposé galiléen :

$$m \frac{v_0^2}{r} = \|\vec{F}_{\text{mag}}\| = e v_0 B_0$$

On en déduit que le rayon de courbure r est constant, et le mouvement est circulaire uniforme de rayon $r_c = \frac{m v_0}{e B_0} = \frac{v_0}{\omega_c}$

où $\omega_c = \frac{e B_0}{m}$ est la pulsation cyclotron.

5. Le cation, dans ce cas, ne subit aucune force magnétique à l'instant initial. On a à tout instant $\vec{F}_{\text{mag}} \cdot \vec{u}_z = e (\vec{v} \wedge \vec{B}_0) \cdot \vec{u}_z = 0$

Donc le principe fondamental de la dynamique projeté selon \vec{u}_z fournit : $m \frac{dv_z}{dt} = 0$ et la vitesse du cation selon \vec{u}_z est constante. Sa vitesse étant également de norme constante, la vitesse selon \vec{u}_x et \vec{u}_y reste nécessairement nulle, en effet à tout instant :

$$\begin{cases} v_z = v_z(t=0) = v_0 \vec{u}_z \\ \|\vec{v}\|^2 = v_z^2 + v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 \end{cases}$$

D'où $v_x^2 + v_y^2 = 0$ soit $v_x = v_y = 0$

Le cation reste dans la zone de champ magnétique fort, on peut dire qu'il est confiné.

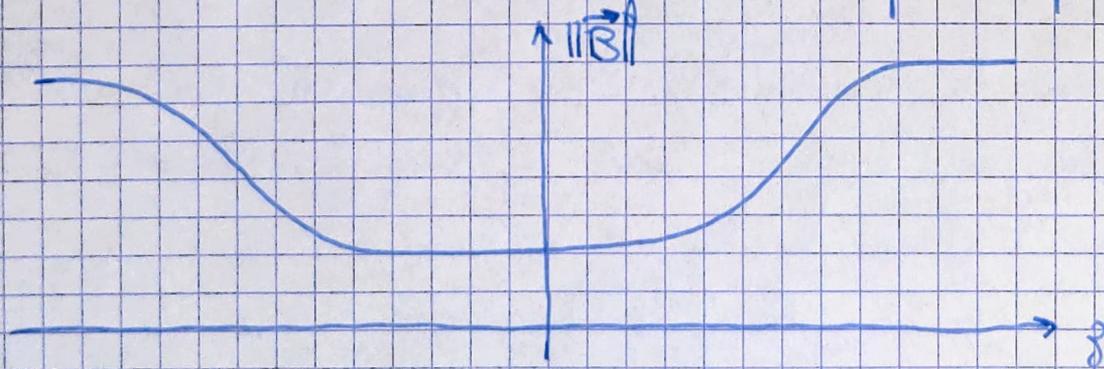
6. La forme toroidale:

- * minimise les effets de bord et les fuites de champ magnétique
- * permet aux cations de faire des tours complets donc de rester toujours confinés dans le même anneau où se trouve le champ magnétique intense.

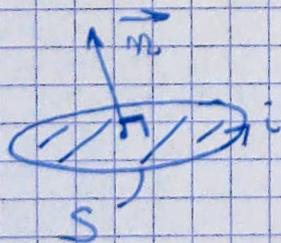
7. On a un $r_L = \frac{m v_0}{e B_0} = \frac{6,6 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^5}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 12} = 1,0 \text{ mm}$

On constate que $r_L \ll a$, ainsi le rayon choisi pour les bobines est largement suffisant pour assurer un confinement magnétique des ions.

8. Le champ magnétique est à flux conservatif (équation de Maxwell-Thomson) ainsi le flux de \vec{B} est le même à travers le solénoïde à l'entrée et au centre de la bouteille qui est un tube de champ. Le champ magnétique est donc plus intense en entrée et sortie de bouteille où les lignes de champ sont plus serrées:



9.



Le moment magnétique de la boucle de courant délimitant une surface S de normale orientée \vec{n} est: $\vec{\mu} = i S \vec{n}$

10. Le cation, de charge $q = +e$, parcourt une boucle de périmètre $L = 2\pi r_L$ en un temps $T = \frac{2\pi}{\omega_c}$. Ceci correspond à un courant $i = \frac{dq}{dt} = \frac{q}{T} = \frac{e \omega_c}{2\pi}$

La surface de la bouteille est $S = \pi r_2^2$ et la normale est orientée dans le sens opposé au champ magnétique (cf schéma Q3) donc $\vec{n}_0 = -\vec{u}_y$. Ainsi: $\vec{\mu} = \frac{e\omega_c}{2\hbar} \cdot \pi r_2^2 = \vec{u}_y$

Or $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$ et $r_2 = \frac{m v_{\perp}}{eB_0}$ d'où $\boxed{\vec{\mu} = -\frac{m v_{\perp}^2}{2B_0} \vec{u}_y}$

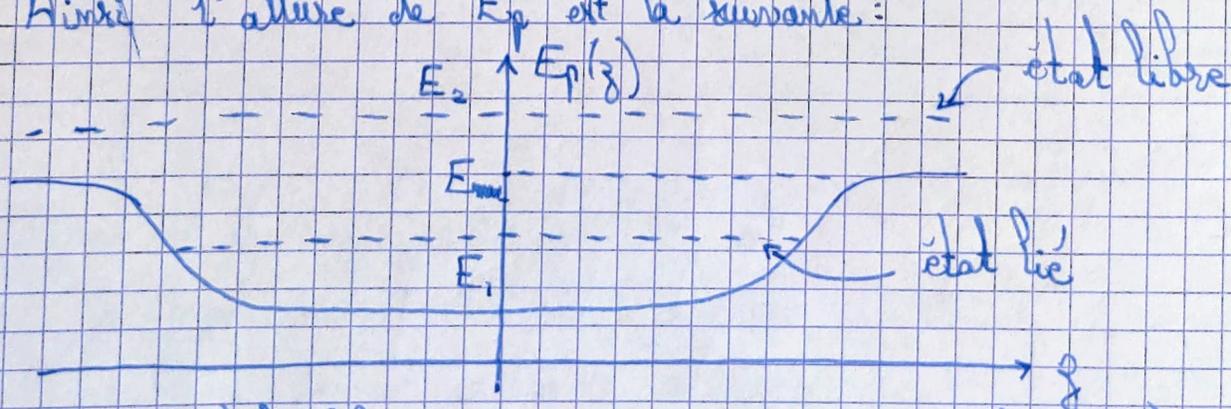
11. Le cation est soumis à son poids que l'on néglige, et à la force magnétique qui ne travaille pas. On peut lui appliquer le théorème de l'énergie cinétique: $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) = c$

Or: $\frac{1}{2} m v_{\perp}^2 = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ d'après Q10.

Ainsi: $E_c = \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 - \vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + E_p = c$ est

Cette équation traduit la conservation de l'énergie cinétique en 3D, et elle peut se voir comme une conservation d'énergie mécanique en 1D avec $\frac{1}{2} m v_{\parallel}^2$ l'énergie cinétique selon \vec{u}_y et $E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ une énergie potentielle effective liée au mouvement du cation selon \vec{u}_y .

12. Au cours du mouvement, si on suppose $\vec{\mu}$ peu variable comme suggéré par l'énoncé, alors $E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = +\|\vec{\mu}\| \cdot B(z) \vec{u}_y$. Ainsi l'allure de E_p est la suivante:



On a un état libre si $E > E_{max}$ et un état lié sinon. Dans le second cas, le mouvement du cation est confiné entre les bords de la bouteille magnétique et le cation fait demi-tour aux bords.

13. La bouteille magnétique n'est pas fermée : le champ magnétique fait ce qui crée des effets de bord difficiles à maîtriser, et il faut dépenser de l'énergie pour produire un champ \vec{B} hors de la région de confinement du plasma.

III - Échauffement du plasma

30. L'énergie potentielle nécessaire pour amener deux noyaux d'hydrogène l'un contre l'autre est :

$$E_p = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(2r_0)} \quad \text{où } r_0 \text{ est le rayon d'un noyau d'hydrogène}$$

Dans ce modèle on a négligé les électrons, qui sont typiquement à une distance $a_0 \approx 10^{-10} \text{ m} \gg r_0$ du noyau et dont l'influence est donc très faible.

La fusion se produit lorsque l'agitation thermique permet de vaincre la barrière de potentiel, soit $k_B T \approx E_p$. La température nécessaire pour la fusion est donc :

$$T_{\text{fus}} = \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 k_B r_0} = 8,4 \cdot 10^9 \text{ K}$$

31. Il s'agit de l'effet tunnel (que nous n'avons pas encore vu en cours) : l'un des noyaux peut traverser la barrière de potentiel liée à la force électrostatique.

32. L'inductance mutuelle M est définie de sorte à ce que le flux de \vec{B}_1 à travers la boucle, noté Φ , soit $\Phi = M i_1$.

$$\text{Or : } \Phi = \underbrace{\pi a_1^2}_{\text{surface où } \vec{B}_1 \neq \vec{0} \text{ dans la boucle de courant}} \times \|\vec{B}_1\| = \pi a_1^2 \times \beta i_1(t).$$

Ainsi : $M = \pi a_1^2 \beta$

D'après les données on a $\beta = \frac{B_{\text{max}}}{i_{1, \text{max}}} = \frac{13}{46 \cdot 10^3} = 2,8 \cdot 10^{-4} \text{ T} \cdot \text{A}^{-1}$

et $M = \mu_0 a^2 B = \boxed{3,6 \text{ mH}}$

33. On a
$$\begin{cases} u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} & (1) \\ u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} & (2) \end{cases}$$

On utilise (1) et la loi des mailles dans la boucle de courant:

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = -M \frac{di_1}{dt} = +M \cdot \frac{I_0}{t_1} \quad \text{car } i_1 = I_0 \left(1 - \frac{t}{t_1}\right)$$

On obtient
$$\left[\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{\tau_2} = \frac{I_0}{\tau_1} \right] \quad \text{ou} \quad \tau_2 = \frac{L_2}{R_2} \quad \text{et} \quad \tau_1 = \frac{L_2}{M} t_1$$

34. On a $i_2(t) = 0$ à $t = 0^+$ car le courant traversant une bobine est continu. La solution tend vers $i_2 = I_0 \frac{\tau_2}{\tau_1}$ pour $t \rightarrow \infty$ et est une exponentielle de temps caractéristique τ_2 , elle s'écrit:

$$i_2(t) = I_0 \frac{\tau_2}{\tau_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$$

Pour $t \ll \tau_2$ on a $e^{-t/\tau_2} \approx 1 - \frac{t}{\tau_2}$ et
$$i_2(t) \approx I_0 \frac{t}{\tau_1}$$

35. La puissance reçue par R_2 est $P_2 = R_2 i_2^2$

Si $t_1 \ll \tau_2$ alors pour $t \leq t_1$ on a $P_2(t) \approx R_2 \cdot \left(I_0 \frac{t}{\tau_1}\right)^2$

Et l'énergie reçue est:

$$E_{\text{reçue}} = \int_0^{t_1} P_2(t) dt = R_2 \cdot \frac{I_0^2}{\tau_1^2} \int_0^{t_1} t^2 dt = \boxed{\frac{R_2 I_0^2 t_1^3}{3 \tau_1^2}}$$

Or on sait que $\tau_1 = \frac{L_2}{M} t_1$, d'où
$$E_{\text{reçue}} = \frac{R_2 I_0^2 M^2 t_1}{3 L_2^2}$$

Cette énergie est dissipée par effet Joule et sert à chauffer le plasma.

36. La résistance R_2 qui modélise le plasma dépend de la température et va donc varier en fonction du temps, ce que nous n'avons pas pris en compte.

37.
$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{équation de Maxwell-Gauss} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{équation de Maxwell-Faraday} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 & \text{équation de Maxwell-Thomson} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) & \text{équation de Maxwell-Ampère} \end{cases}$$

38. L'onde est transversale: \vec{E} est perpendiculaire à \vec{k} . On a en effet $\vec{E} = E_x(z,t) \vec{u}_x + E_y(z,t) \vec{u}_y$
 Ainsi $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ et donc par l'équation de Maxwell-Gauss on a $\rho = 0$.

39. On calcule $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E}))$ grâce aux équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) &= \operatorname{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot}(\vec{B}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Or: $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$
 $= 0$ (Q38)

Donc:
$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

40. Les ions sont bien plus massifs que les électrons et réagissent donc bien plus lentement aux forces électromagnétiques. Les ondes électromagnétiques ayant une fréquence élevée, la contribution des ions est négligeable.

41. L'électron est soumis, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, à la force de Lorentz $\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$
 On supposera $\vec{B} \approx \vec{B}_0$ comme proposé par l'énoncé, alors \vec{F} est linéaire en $\cos(\omega t)$ et on peut utiliser la notation complexe

pour appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'électron:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m i \omega \vec{v} = -e (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}_0 \parallel \vec{z})$$

On projette :

$$\begin{cases} m i \omega v_x = -e (E_0 + v_y B_0) \\ m i \omega v_y = -e (-i E_0 - v_x B_0) \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} v_x = \frac{i e E_0}{m \omega} + \frac{i e B_0}{m \omega} v_y \\ v_y = \frac{e E_0}{m \omega} - \frac{i e B_0}{m \omega} v_x \end{cases}$$

On retrouve les équations à démontrer avec $\omega_c = \frac{e B_0}{m}$ et $\alpha = \frac{e E_0}{m}$

42. Lorsque $\omega = \omega_c$ on constate que $\|\vec{v}\|$ diverge: il y a un phénomène de résonance. La vitesse des électrons, et donc leur énergie cinétique microscopique augmente ce qui augmente l'énergie interne du plasma et donc sa température.

On parle de résonance car on a un maximum de la fonction de transfert $|H| = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{E}\|}$ décrivant la réponse des électrons au champ électromagnétique appliqué.

43. On a $\vec{f} = -n_0 \cdot e \cdot \vec{v} = -i \frac{n_0 e^2}{m_e (\omega - \omega_c)} \vec{E}$.

De plus en complexes, l'équation d'onde établie en Q39 s'écrit:

$$-\underline{k}^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = \mu_0 i \omega \vec{f} = \frac{\mu_0 \omega n_0 e^2}{m_e (\omega - \omega_c)} \vec{E}$$

Ainsi :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 n_0 e^2}{m_e} \times \frac{\omega}{\omega - \omega_c}$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\mu_0 n_0 e^2 c^2}{m_e} \cdot \frac{1}{\omega(\omega - \omega_c)} \right]$$

Où $\mu_0 c^2 = \frac{1}{\epsilon_0}$ et on pose $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}}$ la pulsation plasma.

On en déduit que :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)} \right)$$

44. On a $\omega_p = \sqrt{\frac{10^{20} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{(8,85 \cdot 10^{-12})(9,1 \cdot 10^{31})}} = 5,6 \cdot 10^{11} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

45. On peut avoir propagation lorsque $k^2 > 0$, c'est à dire lorsque $\omega < \omega_c$ ou $\omega > \omega_g$. Dans ces zones, $k \in \mathbb{R}$ et la

solution est une onde plane progressive.

Lorsque $k^2 < 0$, l'onde est telle que $k \in i\mathbb{R}$ et elle est évanescente : il ne peut pas y avoir de propagation.

46. Lorsque $\omega = \omega_c$ on a $\frac{\omega^2}{k^2} = 0$ soit $|k| \rightarrow \infty$

Ainsi la vitesse de phase est $v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{|k|} = 0$ et on a une onde dont les creux et les crêtes ne se propagent pas : il s'agit d'une onde stationnaire.