

Corrige - TD 17

I - Ondes planes

1 - Découpe laser

1. \vec{E} : champ électrique en $V \cdot m^{-1}$
 E_0 : amplitude de l'onde
 ω : pulsation (reliée à la fréquence)
 k : vecteur d'onde (relié à la longueur d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$)
 \vec{u}_y : direction de polarisation

2. On a par une onde plane monochromatique :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k}{\omega} E_0 \cos(\omega t - k z) \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z \quad \text{or } \omega = kc$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \left[\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - k z) \vec{u}_y \right]$$

$$3. \vec{R} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - k z) \vec{u}_z \quad \text{avec } \frac{1}{\mu_0} = \epsilon_0 c^2$$

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z = c \times \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \vec{u}_z$$

La puissance du laser correspondant au flux moyen de \vec{R} à travers la section S :

$$\mathcal{P} = S \times \langle \vec{R} \rangle = \frac{S c \epsilon_0 E_0^2}{2}$$

D'où : $E_0 = \sqrt{\frac{2\mathcal{P}}{S c \epsilon_0}} = 7,9 \cdot 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

4. a. Il faut chauffer le métal à T_f puis le faire fondre :

$$\Delta E = \underbrace{\mu \times S \times d}_{\text{volume à chauffer}} \times c (T_f - T_0) + L_f$$

b. L'énergie reçue par le laser pendant Δt est $\Delta E = \mathcal{P} \Delta t$

D'où : $\mathcal{P} \Delta t = \mu \times S \times d \times (c (T_f - T_0) + L_f)$

c. On en déduit :

$$V = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c(T_1 - T_0)}{\mu \lambda (c(T_1 - T_0) + L_f)} = 0,11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{ce qui est très}$$

rapide : pour une épaisseur de 1 m la découpe au point du laser est faite en $\frac{10^{-3}}{0,11} \approx \frac{1}{100}$ s.

2 - Étude de l'onde associée à un laser

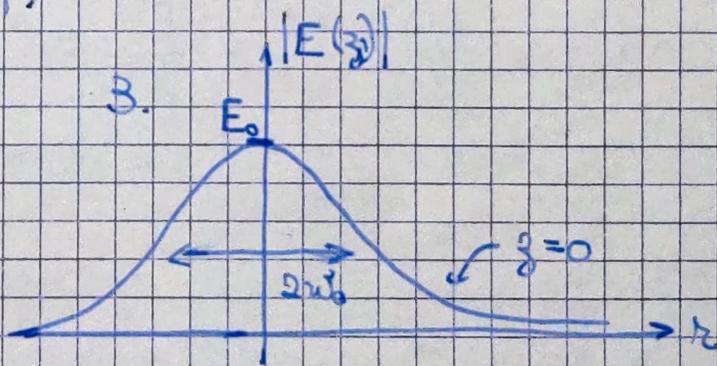
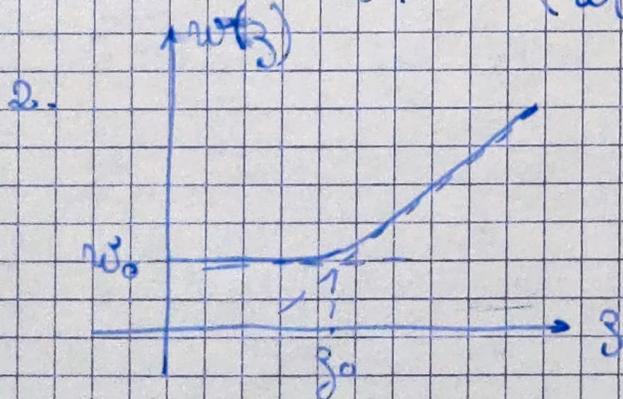
1. On a $\|\vec{E}(z, z_0)\|^2 = \frac{E_0^2 z_0^2}{z^2 + z_0^2} \times \left| e^{-\frac{ikz^2}{2(z+z_0)}} \right|^2$

$$I_0 = \left| e^{-\frac{ikz^2}{2(z+z_0)}} \right|^2 = \left| e^{-\frac{ikz^2(z-i z_0)}{2(z^2+z_0^2)}} \right|^2 = e^{-\frac{kz^2 z_0}{z_0^2+z_0^2}}$$

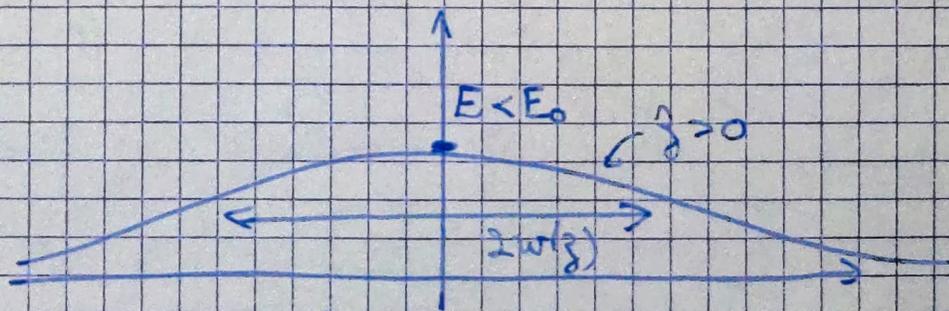
Potentiels $w_0 = \sqrt{\frac{z_0}{k}} = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{2\pi}}$, alors $\frac{kz_0}{z_0^2+z_0^2} = \frac{1}{w_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right)}$

et $\frac{z_0^2}{z^2+z_0^2} = \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2$. D'où :

$$\|\vec{E}(z, z_0)\|^2 = \left(\frac{w_0 E_0}{w(z)}\right)^2 \cdot e^{-\frac{z^2}{w(z)^2}} \quad \text{avec } w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}$$



On a un élargissement de $w(z)$ avec la distance au laser.



$w(z)$ représente le rayon du faisceau laser à l'abscisse z .

4. Pour $z \gg z_0$ on a $w(z) \approx w_0 \frac{z}{z_0}$ et le rayon du faisceau

augmente linéairement avec z donc on a un laser en forme de cône, de demi-angle β tel que $\tan(\beta) = \frac{w_0}{z_0} = \frac{1}{k w_0} = \frac{\lambda}{2\pi w_0}$.

5. On a $\beta = \arctan\left(\frac{\lambda}{2\pi w_0}\right) = 0,02^\circ$ pour le laser YAG

$\beta = 0,2^\circ$ pour le laser CO_2 .

Plus λ est grande et plus l'angle d'ouverture est élevé, on peut faire une analogie avec le phénomène de diffraction par un trou.

6. Dans ce cas $w(z) \approx w_0$ et on peut supposer que le faisceau est parallèle.

3 - Superposition de deux ondes

1. Il s'agit d'une OPPH donc elle vérifie la relation de dispersion $\omega = k_1 c$ soit $k_1 = \frac{\omega}{c} = k$

$$\text{On a } \vec{B}_1 = \frac{\vec{k}_1 \wedge \vec{E}_1}{\omega} = \frac{E_1}{c} \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}) \times (\cos \alpha \vec{e}_z + \sin \alpha \vec{e}_y) \wedge \vec{e}_y$$

$$= \frac{E_1}{c} \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}) (\cos \alpha \vec{e}_z - \sin \alpha \vec{e}_x)$$

2.a. La 2^e onde est la même que la première avec $\alpha' = -\alpha$:

$$\vec{E}_2 = E_1 \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}) \vec{e}_y \quad \text{avec } \vec{k}_2 = \cos \alpha \vec{e}_z - \sin \alpha \vec{e}_y$$

$$\vec{B}_2 = \frac{E_1}{c} \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}) (\cos \alpha \vec{e}_z + \sin \alpha \vec{e}_x)$$

On a alors:

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_1 \vec{e}_y \left[\cos(\omega t - \cos(\alpha) k z - \sin(\alpha) k y) + \cos(\omega t - \cos(\alpha) k z + \sin(\alpha) k y) \right]$$

$$\vec{E}_{\text{tot}} = 2E_1 \cos(\omega t - \cos(\alpha) k z) \cos(\sin(\alpha) k y) \vec{e}_y$$

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \frac{E_1}{c} \left[\cos \alpha \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}) + \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}) \cos \alpha \right] \vec{e}_z + \sin \alpha \left[\cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}) - \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}) \right] \vec{e}_x$$

$$\vec{B} = \frac{2E_1}{c} \left[\begin{array}{l} \cos(\alpha) \cos(\omega t - k \cos(\alpha) x) \cos(\sin(\alpha) k z) \vec{e}_z \\ - \sin(\alpha) \sin(\omega t - k \cos(\alpha) x) \sin(\sin(\alpha) k z) \vec{e}_x \end{array} \right]$$

b. Cette onde se propage selon \vec{e}_x uniquement, et elle est stationnaire selon \vec{e}_z car

- les variables t et x restent couplées
- les variables t et z sont découplées

On a alors $k_{\text{eff}} = k \cos(\alpha) \vec{e}_x$ et $v_{\text{eff}} = \frac{\omega}{k_{\text{eff}}} = \frac{\omega}{k \cos(\alpha)}$

soit : $v_{\text{eff}} = \frac{c}{\cos(\alpha)}$ Cette vitesse de phase est supérieure à c .

c. $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \wedge \vec{B})$

$$= \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{4E_1^2}{c} \left[\begin{array}{l} \cos^2(\omega t - \cos(\alpha) k x) \cos^2(\sin(\alpha) k z) \times \cos(\alpha) \vec{e}_x \\ + \cos(\omega t - \cos(\alpha) k x) \sin(\omega t - \cos(\alpha) k x) \cos(\sin(\alpha) k z) \sin(\sin(\alpha) k z) \vec{e}_z \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sin(2\omega t - 2\cos(\alpha) k x)$$

Et donc :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{4E_1^2}{c} \cdot \frac{1}{2} \cos^2(\sin(\alpha) k z) \cdot \cos(\alpha) \vec{e}_x$$

$$= 2E_1^2 c \epsilon_0 \cos^2(\sin(\alpha) k z) \cos(\alpha) \vec{e}_x$$

L'énergie n'est transmise que selon \vec{e}_x .

d. Si la surface est grande devant λ on peut moyenniser sur z et :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle \approx E_1^2 c \epsilon_0 \cos(\alpha) \vec{e}_x$$

D'où : $P_{\text{moy}} \approx Lb \times E_1^2 c \epsilon_0 \cos(\alpha)$.

e. La densité volumique d'énergie électromagnétique moyenne est :

$$\langle W_{\text{em}} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \langle \vec{E}^2 \rangle + \frac{\langle \vec{B}^2 \rangle}{2\mu_0}$$

$$\langle W_{\text{em}} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \times 4E_1^2 \langle \cos^2(\omega t - k \cos(\alpha) x) \rangle \cdot \cos^2(\sin(\alpha) k z)$$

$$= \epsilon_0 E_1^2 \cos^2(\sin(\alpha) k z)$$

$$\langle \vec{u}_{em} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \times \frac{4E_1^2}{c^2} \times \left[\cos^2 \alpha \langle \cos^2(\omega t - k \cos(\alpha) x) \rangle \cos^2(\sin(\alpha) k z) + \sin^2 \alpha \langle \sin^2(\omega t - k \cos(\alpha) x) \rangle \sin^2(\sin(\alpha) k z) \right]$$

$$= \epsilon_0 E_1^2 \left[\cos^2 \alpha \cos^2(\sin(\alpha) k z) + \sin^2 \alpha \sin^2(\sin(\alpha) k z) \right]$$

ainsi en moyennant dans l'espace $\langle \cos^2(\sin(\alpha) k z) \rangle = \langle \sin^2(\sin(\alpha) k z) \rangle = \frac{1}{2}$:

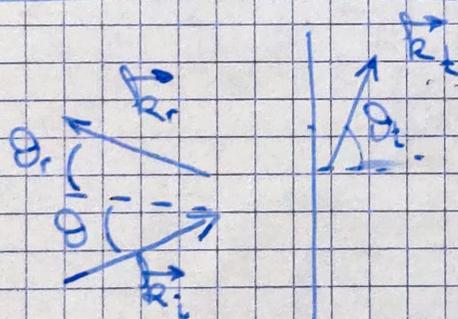
$$\langle u_{em} \rangle = \epsilon_0 E_1^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right) = \epsilon_0 E_1^2$$

$$\text{Mais } \langle \vec{\Pi} \rangle = \epsilon_0 E_1^2 \times c \cos(\alpha) \vec{e}_x$$

vitesse de propagation de l'énergie

L'énergie se propage selon \vec{e}_x à la vitesse $c \cos \alpha < c$: cette vitesse est bien inférieure à la vitesse de groupe pour une onde plane.

4 - Réflexion totale et onde évanescente



$n > 1$ $y < 0$ | $y > 0$ $n = 1$

1. On note θ_1 l'angle entre \vec{k}_i et la normale, alors:

* \vec{k}_i , \vec{k}_r et \vec{k}_t sont dans le même plan

* $\theta_r = -\theta$

* $n_1 \sin(\theta) = \sin(\theta_2)$ Il y a réflexion totale si $\theta > \theta_c = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$

2. On utilise la relation de structure $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$:

$$\begin{cases} \vec{B}_i = \frac{E_0}{\omega} e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \vec{k}_i \wedge \vec{e}_z \\ \vec{B}_r = \frac{E_0}{\omega} e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \vec{k}_r \wedge \vec{e}_z \\ \vec{B}_t = \frac{E_0}{\omega} e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} \vec{k}_t \wedge \vec{e}_z \end{cases}$$

3. a. On utilise la relation de dispersion $\begin{cases} k = \frac{\omega}{c} & \text{dans le vide} \\ k = \frac{n\omega}{c} & \text{hors du vide} \end{cases}$

Dans : $\begin{cases} \|\vec{k}_2\| = \|\vec{k}_1\| \\ \|\vec{k}_2\| = \frac{1}{n} \|\vec{k}_1\|. \end{cases}$

b. En $z_f = 0$ on peut écrire :

$$\begin{cases} \vec{E}(y=0^-) = E_0 \exp(i\omega t - k_{1xy} z) \vec{u}_x + E_{0r} \exp(i(\omega t - k_{1yz} z)) \vec{u}_x \\ \vec{E}(y=0^+) = E_{0t} \exp(i(\omega t - k_{2yz} z)) \vec{u}_x \end{cases}$$

Pour que ces deux valeurs soient égales pour tout z , les périodes spatiales doivent être les mêmes donc :

$$k_{1yz} = k_{2yz} = k_{tzy} = \frac{n\omega}{c} \sin(\theta) = \beta$$

c. On a alors $k_{1xy} = \pm \sqrt{k_1^2 - k_{1yz}^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{n\omega}{c}\right)^2 - \beta^2} = \pm \alpha$

On a $k_{1xy} = -\alpha$ car l'onde réfléchie se propage dans le sens des y décroissant.

Et $k_{2xy} = \sqrt{k_2^2 - k_{2yz}^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \beta^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta}$

D'où : $\begin{cases} \vec{k}_{1r} = (-\cos(\theta) \vec{u}_y + \sin(\theta) \vec{u}_z) \times \frac{n\omega}{c} \\ \vec{k}_t = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta} \vec{u}_y + \sin(\theta) \cdot \frac{n\omega}{c} \vec{u}_z \end{cases}$

L'angle θ_t vérifie alors :

$$\sin(\theta_t) = \frac{k_{tzy}}{\|\vec{k}_t\|} = \frac{\sin(\theta) \cdot \frac{n\omega}{c}}{\frac{\omega}{c}} = n \sin(\theta)$$

On retrouve la 2^e loi de Descartes.

4. a. Dans ce cas on a $k_{xy}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 - n^2 \sin^2 \theta) < 0$

Donc : $k_{tzy} = \pm i \frac{\omega}{c} \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1} \in i\mathbb{R}$.

4. b. Dans le milieu $n > 1$ on a alors :

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - \beta z)} \cdot e^{-\frac{\gamma}{\delta} z} \vec{u}_x$$

L'exponentielle ne peut pas être croissante (l'énergie serait infinie) donc il s'agit d'une onde décroissante selon z .

Notons d'ailleurs dans une onde :

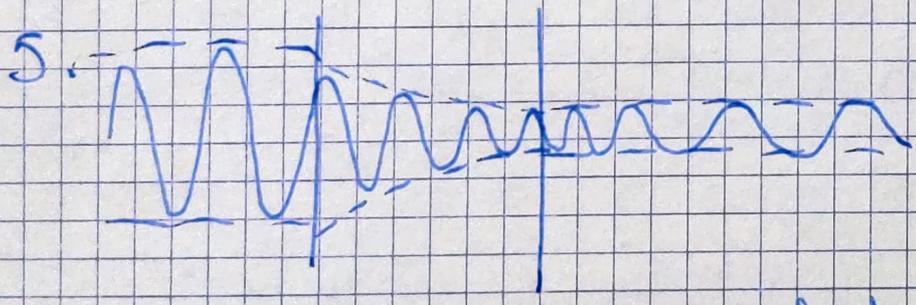
- * propagative selon z , dans le sens des z croissant
- * évanescente selon z , (pas de propagation)

c. On a $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - \beta z)} e^{-\frac{\gamma}{\delta} z} \vec{u}_x$

où $\delta = \frac{c}{\omega \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}}$ or $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$ d'où :

$$\delta = \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}}$$

δ est de l'ordre de la longueur d'onde.



Dans ce cas, une partie de l'énergie de l'onde sera transmise à travers le milieu, on parle de réflexion interne frustrée.

L'amplitude de l'onde transmise est réduite d'un facteur de l'ordre de $e^{-1/8}$.

5 - Propagation dans un câble coaxial

1 a. $\vec{B}(M, t)$ peut être calculé par théorème d'Ampère (généralisé via l'équation de Maxwell - Ampère). La distribution de courant étant invariante par rotation autour de (Oz) .

on en déduit que les composantes de \vec{B} ne dépendent que de r et z .
 De plus si M est un point de l'espace, le plan $(M, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courants donc $\vec{B}(M)$ est dans ce plan et:

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r, z) \vec{e}_\theta + B_z(r, z) \vec{e}_z$$

b. On applique le théorème d'Ampère sous sa forme dépendante du temps, pour un contour circulaire d'axe (Oz) et de rayon r orienté selon \vec{e}_θ :

$$\oint_r \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} + \iint_S \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

où S est la surface délimitée par le contour.

Or: $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial E(r, z, t)}{\partial t} \vec{e}_r$ et $d\vec{S} \parallel \vec{e}_z$ donc la dernière

intégrale est nulle. De plus $I_{\text{enc}} = I_0(z)$. D'où:

$$2\pi r B_\theta(r, z) = \mu_0 I_0(z)$$

$$\text{Et: } \vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 I_0(z)}{2\pi r} \vec{e}_\theta + B_z(r, z) \vec{e}_z$$

c. On utilise l'équation de Maxwell-Faraday:

$$\text{rot}(\vec{E}) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ avec } \vec{E} = E(r, z, t) \vec{e}_r$$

On la projette sur \vec{e}_z et on trouve $0 = - \frac{\partial B_z}{\partial t}$.

Donc $B_z = c^{\text{ste}}$, or on travaille en régime sinusoïdal forcé, donc $B_z = 0$.

2.a. On utilise l'équation de Maxwell-Ampère dans une région vide de courants:

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{Or } \text{rot}(\vec{B}) = - \frac{\partial B_\theta}{\partial z} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta) \vec{e}_z$$

$$= 0 \text{ car } B_\theta(r) \propto \frac{1}{r}$$

$$= - \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{dI_0}{dz} \vec{e}_r$$

et $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega \vec{E}$ en notation complexe. D'où:

$$\vec{E} = j \cdot \frac{1}{2\pi r \epsilon_0 \omega} \frac{dI_0}{dz} \vec{e}_z$$

2. On a $u(z,t) = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{j}{2\pi \epsilon_0 \omega} \frac{dI_0}{dz} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

3. L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Donc, en utilisant le formulaire:

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial E_{\theta}}{\partial z} \vec{e}_\theta = j \cdot \frac{1}{2\pi r \epsilon_0 \omega} \frac{d^2 I_0}{dz^2} \vec{e}_\theta$$

$$\text{Or } -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\omega \vec{B} = -j\omega \cdot \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

Soit: $\frac{d^2 I_0}{dz^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} I_0 = \frac{d^2 I_0}{dz^2} + k^2 I_0 = 0$ car $k = \frac{\omega}{c}$

Ainsi $I_0(z) = I_0 e^{-jkz}$ et $i(z,t) = I_0 e^{j(\omega t - kz)}$

avec $k = \frac{\omega}{c}$: on a une structure d'onde plane.

4. On en déduit, en réinjectant: $\vec{E}(z,t) = \frac{j}{2\pi r \epsilon_0 \omega} \times jk I_0 \vec{e}_z$

soit $\vec{E} = \frac{I_0}{2\pi r \epsilon_0 c} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_z$

et $\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_\theta$

avec $\vec{k} = k \vec{e}_z$

On constate que l'onde est monochromatique, mais \vec{E} et \vec{B} varient en intensité dans le plan perpendiculaire à \vec{k} . L'onde est plane car les surfaces de phase constante sont des plans.

L'onde est polarisée rectilignement selon \vec{e}_z en un point du cable.

5. $\vec{T} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{I_0^2}{4\pi^2 r^2 \epsilon_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_z$

Le flux de \vec{T} moyen à travers le câble est :

$$\Phi = \int_{\text{câble}} \langle \vec{T} \rangle \cdot \vec{S} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=R_1}^{R_2} \frac{I_0^2}{4\pi^2 r^2 \epsilon_0 c} \times \frac{1}{2} \times r dr d\theta$$

moyenne du \cos^2

élément de surface

$$= \frac{I_0^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \times \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \times 2\pi = \boxed{\frac{I_0^2}{4\pi \epsilon_0 c} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

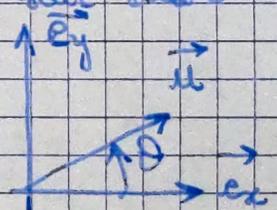
On a intérêt à maximiser $\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$ donc choisir une petite âme.

II - Polarisation

6 - Rotation d'une polarisation linéaire

1. $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_z$, car l'onde se propage selon Oz et polarisée selon \vec{e}_z

2. le polariseur projette le champ dans sa direction, soit selon le vecteur $\vec{u} = \cos\theta \vec{e}_z + \sin\theta \vec{e}_y$



On a ainsi :

$$\vec{E}' = (\vec{E} \cdot \vec{u}) \vec{u} = E_0 \cos(\theta) \cos(\omega t - kz) \vec{u}$$

La puissance et l'éclairement étant proportionnels à E^2 on a un coefficient de transmission en énergie : $\frac{E'^2}{E^2} = \boxed{\cos^2(\theta)}$

On retrouve la loi de Malus.

3. a. On a, d'après le résultat précédent :

$$E_{\text{tot}} = E(N) \cos(\psi) = \boxed{E \cos^2(\psi)}$$

b. On place les polariseurs inclinés chacun de $\psi = \frac{\theta}{N}$ par rapport au précédent, alors : $E = E \cos^2\left(\frac{\theta}{N}\right)^{2N}$

ou encore :

$$E = \exp\left(2N \ln \cos\left(\frac{\theta}{N}\right)\right) \stackrel{DL1}{=} \exp\left(2N \ln\left(1 - \frac{\theta^2}{2N^2}\right)\right)$$

$$\stackrel{DL2}{=} \exp\left(2N \times \left(-\frac{\theta^2}{2N^2}\right)\right) = \exp\left(-\frac{\theta^2}{N}\right) \quad \begin{matrix} \approx \\ N \gg 1 \end{matrix} \quad \boxed{1 - \frac{\theta^2}{N}}$$

Si N est assez grand on peut avoir un coefficient de transmission proche de 1.

Car pour cela, il faut $\frac{1}{N} \cdot \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{1}{100}$ soit $N = 25 \cdot 11^2 \approx 250$ polariseurs

7 - Polarisation circulaire

1. On projette l'équation de propagation:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -\gamma \frac{\partial E_y}{\partial t} & (1) \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \gamma \frac{\partial E_x}{\partial t} & (2) \end{cases}$$

On est en régime sinusoïdal forcé donc $\frac{\partial}{\partial t} \Leftrightarrow j\omega$ et $\frac{\partial}{\partial z} \Leftrightarrow jk$

$$\text{D'où: } \begin{cases} \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_x = -j\omega\gamma E_y & (1) \\ \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_y = +j\omega\gamma E_x & (2) \end{cases}$$

$$j\omega\gamma (1) \text{ donne: } \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)^2 E_y = \omega^2\gamma^2 E_y$$

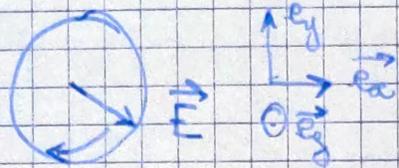
De même, $j\omega\gamma (2)$ donne la même équation. On conclut ainsi que $\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)^2 = \omega^2\gamma^2$ soit $k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = \pm \gamma\omega$

On encaie: $k = k_+$ ou $k = k_-$ avec $k_{\pm} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 \pm \frac{\gamma c^2}{\omega}}$

2. Si $k = k_+$ donc $k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = \gamma\omega$ et: $\gamma\omega E_x = -j\omega\gamma E_y$

$$\text{D'où } \frac{E_x}{\omega E_y} = -j \text{ et } \vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - k_+ z)} (\vec{e}_x + j\vec{e}_y)$$

$$\vec{E} = E_0 (\cos(\omega t - k_z z) \vec{e}_x - \sin(\omega t - k_z z) \vec{e}_y) \quad \text{car } \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$$



Il s'agit d'une polarisation circulaire droite.

Si $k = -k$, alors on a une polarisation circulaire gauche (calcul similaire).

3. On écrit:
$$\vec{e}_x = \frac{1}{2} \left(\underbrace{(\vec{e}_x + i\vec{e}_y)}_{\text{onde avec } k=k_+} + \underbrace{(\vec{e}_x - i\vec{e}_y)}_{\text{onde avec } k=k_-} \right)$$

Alors:
$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{2} E_0 \left[e^{i(\omega t - k_+ z)} (\vec{e}_x + i\vec{e}_y) + e^{i(\omega t - k_- z)} (\vec{e}_x - i\vec{e}_y) \right] \\ &= E_0 e^{i(\omega t - k_m z)} \left[\frac{e^{i\frac{\Delta k}{2} z} + e^{-i\frac{\Delta k}{2} z}}{2} \vec{e}_x + \frac{e^{i\frac{\Delta k}{2} z} - e^{-i\frac{\Delta k}{2} z}}{2i} \vec{e}_y \right] \\ &= E_0 e^{i(\omega t - k_m z)} \left[\cos\left(\frac{\Delta k z}{2}\right) \vec{e}_x + \sin\left(\frac{\Delta k z}{2}\right) \vec{e}_y \right] \end{aligned}$$

vecteur unitaire \vec{u} incliné d'un angle $\frac{\Delta k z}{2}$ par rapport à \vec{e}_x

L'onde est polarisée rectilignement, mais elle a tourné d'un angle $\theta = \frac{\Delta k z}{2}$: on dit que le milieu a un pouvoir rotatoire.

III - Plasmas

8 - Ionosphère

1. La force exercée sur les électrons est $\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$
 Or $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$ pour une onde plane progressive monochromatique.

Donc $\|\vec{F}_{\text{rot}}\| = -e \|\vec{v} \wedge \vec{B}\| \approx e \cdot \frac{v}{c} \|\vec{E}\| \sim \frac{v}{c} \|\vec{F}_{\text{élec}}\|$

Si les électrons sont non relativistes, $v \ll c$ et $\|\vec{F}_{\text{mag}}\| \ll \|\vec{F}_{\text{elec}}\|$

On applique le principe fondamental de la dynamique à un électron dans le référentiel terrestre supposé galiléen:

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E} \quad \text{Or } \vec{j} = -n_e e \vec{v}$$

↑ champ densité de courant
↑ vitesse des électrons

D'où: $-m_e \times \frac{d\vec{j}}{dt} = -n_e e \vec{E}$ soit: $\boxed{\frac{m_e}{n_e e^2} \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{E}}$

2. On utilise les équations de Maxwell - Faraday et Maxwell-Ampère:

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

D'où: $-\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = + \frac{\partial \text{rot}(\vec{B})}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\mu_0 n_e^2}{m_e} \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Or: $\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = \text{grad}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E}$
 = 0 dans une région vide de charges

Ainsi: $\boxed{\Delta(\vec{E}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0} \vec{E}}$ avec $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$

On peut alors écrire $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ et:

$$-k^2 = \frac{1}{c^2} \left(\omega^2 + \frac{1}{m_e n_e \epsilon_0} \right) = \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}$$

avec $\boxed{\omega_p = e \sqrt{\frac{n}{\epsilon_0 m_e}}}$ la pulsation plasma

3. Une onde peut se propager si $k^2 > 0$ soit $\omega > \omega_p$.

Or $\omega_p = 1,6 \cdot 10^{13} \cdot \sqrt{\frac{10^{12}}{10^{-30} \cdot 10^{-11}}} \sim 1,6 \cdot 10^{13} \sqrt{10^{53}} \sim 5 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Et $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} \approx 9 \cdot 10^6 \text{ Hz} \sim 9 \text{ MHz}$. La première onde ne

peut pas se propager mais la seconde oui.

4. a. Les ondes incidente et réfléchi sont dans l'air: $k = \frac{\omega}{c}$

L'onde transmise est dans le plasma et $k' = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$.

b. On écrit la continuité de \vec{E} en $z=0$ et à $t=0$:

$$E_0 + E_{0r} = E_{0t} \quad (*)$$

Par ailleurs: $\vec{B} = \vec{k} \wedge \vec{E}$ donc:

$$\vec{B}_i = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_y \quad \vec{B}_r = -\frac{E_{0r}}{c} e^{j(\omega t + kx)} \vec{u}_y$$

$$\vec{B}_t = \frac{k' E_{0t}}{\omega} e^{j(\omega t - k'z)} \vec{u}_y = \frac{E_{0t}}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} e^{j(\omega t - k'z)} \vec{u}_y$$

À $t=0$ et en $z=0$ on trouve:

$$E_0 - E_{0r} = E_{0t} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad (**)$$

Pour trouver E_{0r} , on fait $\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \times (*) - (**)$:

$$\left(\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} - 1\right) E_0 + \left(\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} + 1\right) E_{0r} = 0$$

$$\text{Soit: } \frac{E_{0r}}{E_0} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \quad \text{et } R = \left|\frac{E_{0r}}{E_0}\right|^2 = \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right)^2}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\right)^2}$$

9 - Fonctionnement du GPS

1. Pour un plasma: $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$ soit $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$

La vitesse de groupe est:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2c^2 k}{2\sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2}} = \frac{c^2 k}{\omega}$$

$$\text{Soit: } v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad \omega \gg \omega_p \quad \approx c \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

Les trains d'onde se propagent à la vitesse v_g , donc ils parcourent l'ionosphère en $t_{\text{plasma}} = \frac{H}{v_g}$, d'où $\Delta t = \Delta\left(\frac{H}{v_g}\right) \approx \frac{H}{v_g^2} \Delta v_g$

avec $v_g \approx c$ et $\Delta v_g = \frac{c}{2} \Delta\left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = \frac{c}{2} \omega_p^2 \times \frac{2\Delta\omega}{\omega^3}$

$$= \frac{c \omega_p^2}{\omega^3} \Delta f$$

D'où : $\Delta t \approx \frac{H \omega_p^2}{c \omega^3} \Delta f$ $\Delta t \propto f_p^2$ donc on peut utiliser

cette propriété pour corriger la propagation dans le plasma.

2. L'écart de temps de propagation entre ionosphère et vide est donné par :

$$t_{\text{plasma}} - t_{\text{vide}} = \frac{H}{v_g} - \frac{H}{c} = \frac{H}{v_g c} (c - v_g) \approx \frac{H}{c^2} (c - v_g)$$

car $v_g \approx c$ à l'ordre 0

$$= \frac{H}{c} \cdot \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \approx \frac{H \omega_p^2}{2c \omega^2}$$

L'erreur de position associée est :

$$\Delta x = c(t_{\text{plasma}} - t_{\text{vide}}) = \frac{H \omega_p^2}{2 \omega^2} \approx \frac{10^6 \times (10^7)^2}{2 \times (1.5 \cdot 10^9)^2} \approx \frac{10^{20}}{4 \cdot 10^{18}}$$

Soit $\Delta x \approx 25 \text{ m}$. Pour une localisation précise, il faut corriger cette erreur et donc utiliser deux fréquences.

10 - Effet Faraday

1. On a $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, soit en complexes et

en notant $\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})})$, $\vec{B} = \vec{B}_0 + \text{Re}(\vec{B}_1 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})})$

$$-j\vec{k} \wedge \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} j\omega \vec{E}_0 \quad (1)$$

De plus en appliquant le PFD à un électron on a :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}_0 - e\vec{E}$$

ou encore en passant en complexes et avec $\vec{j} = -ne\vec{v}$:

$$m_e \times i\omega \vec{j} = -e\vec{j} \wedge \vec{B}_0 + ne^2 \vec{E}_0 \quad (2)$$

On réinjecte dans (1) :

$$-i\vec{E} \wedge \vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{m_e i\omega} \left(-e\vec{j} \wedge \vec{B}_0 + ne^2 \vec{E}_0 \right) + \frac{1}{c^2} j\omega \vec{E}_0$$

On obtient :

$$\left(\frac{ne^2 \mu_0}{i\omega m_e} + \frac{i\omega}{c^2} \right) \vec{E}_0 = \underbrace{\frac{\mu_0 e}{i\omega m_e} \vec{j} \wedge \vec{B}_0}_{\perp \vec{u}_z \text{ car } \vec{B}_0 // \vec{u}_z} - \underbrace{i\vec{E} \wedge \vec{B}_1}_{\perp \vec{u}_z \text{ car } \vec{E} // \vec{u}_z}$$

On conclut que $\vec{E}_0 \perp \vec{u}_z$: l'onde électromagnétique est transverse.

2. On considère une onde polarisée circulairement :

$$\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} (\vec{u}_x + i\epsilon \vec{u}_y)$$

avec $\epsilon = 1$ pour une polarisation circulaire droite / -1 si gauche

On a alors via l'équation de Maxwell-Faraday la relation de structure :

$$\vec{B}_1 = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

↙ perturbation de \vec{B} uniforme

$$\text{D'où : } \vec{k} \wedge \vec{B}_1 = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) = -\frac{k^2}{\omega} \vec{E} \quad (3)$$

Par ailleurs en injectant $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ dans (2) on trouve :

$$\sigma \vec{E} \times i\omega m_e = -e\sigma \vec{E}_0 \wedge \vec{B}_0 + ne^2 \vec{E}_0$$

$$\begin{aligned} \text{Mais } \vec{E}_0 \wedge \vec{B}_0 &= E_0 (\vec{u}_x + i\epsilon \vec{u}_y) \wedge B_0 \vec{u}_z \\ &= E_0 (-\vec{u}_y + i\epsilon \vec{u}_x) B_0 \\ &= E_0 ((i\epsilon) \vec{u}_y + i\epsilon \vec{u}_x) B_0 \text{ car } (i\epsilon)^2 = -1 \end{aligned}$$

D'où $\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_0 = i \epsilon B_0 \vec{E}_0$

On conduit que :

$$\underline{\sigma} \times i\omega m_e = -e i \epsilon \underline{\sigma} B_0 + m_e^2$$

$$= -i \epsilon \omega_c m_e \underline{\sigma} + m_e^2$$

ou encore $i \underline{\sigma} m_e (\omega + \epsilon \omega_c) = m_e^2$

Soit :
$$\underline{\sigma} = \frac{m_e}{m_e} \cdot \frac{1}{i(\omega + \epsilon \omega_c)}$$

3. On réinjecte (3) dans (1) :

$$j \frac{k^2}{\omega} \vec{E} = \mu_0 \underline{\sigma} \vec{E} + \frac{1}{c^2} j \omega \vec{E}$$

Soit : $k^2 = \frac{\mu_0 \underline{\sigma} \omega}{j} + \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 m_e^2 \omega}{m_e (\omega + \epsilon \omega_c)}$

$$= \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \times \frac{\omega}{\omega + \epsilon \omega_c}$$

ou encore :
$$k^2 c^2 = \omega^2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \epsilon \omega_c)} \right)$$

(4) La relation de dispersion dépend du sens de la polarisation circulaire.

4. Il faut que $\omega_p^2 \leq \omega(\omega + \epsilon \omega_c)$

Soit $\omega^2 + \epsilon \omega \omega_c - \omega_p^2 \geq 0$

$$\Delta = (\epsilon \omega_c)^2 + 4 \omega_p^2 = \omega_c^2 + 4 \omega_p^2 > 0$$

Les racines sont $\omega_{\pm} = \frac{1}{\epsilon} \left[-\epsilon \omega_c \pm \sqrt{\omega_c^2 + 4 \omega_p^2} \right]$

Seule ω_+ est positive et il faut donc :

$$\omega \geq \frac{1}{\epsilon} \left(\sqrt{\omega_c^2 + 4 \omega_p^2} - \epsilon \omega_c \right)$$

La condition est plus contraignante si $\epsilon < 0$ (polarisation gauche).

5. On a $v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \epsilon \omega_c)}}$

n_p dépend du sens de la polarisation circulaire, ($\epsilon = \pm 1$ selon les cas) donc les ondes de polarisation gauche et droite auront une longueur d'onde différente pour une même fréquence. On parle d'anisotropie circulaire.

5. On écrit $\vec{u}_x = \frac{1}{2} \left((\vec{u}_x + i\vec{u}_y) + (\vec{u}_x - i\vec{u}_y) \right)$

D'où :

$$\vec{E} = \left[\underbrace{\frac{E_0}{2} (\vec{u}_x + i\vec{u}_y)}_{\text{polarisation circulaire droite}} + \underbrace{\frac{E_0}{2} (\vec{u}_x - i\vec{u}_y)}_{\text{polarisation circulaire gauche}} \right] e^{i\omega t}$$

7. En sortant du milieu, chaque composante a été déphasée de $k_e \cdot l$ avec k_e calculé selon l'équation (4) :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{E_0}{2} e^{i\omega t} \left[e^{-ik_1 l} (\vec{u}_x + i\vec{u}_y) + e^{-ik_{-1} l} (\vec{u}_x - i\vec{u}_y) \right] \\ &= \frac{E_0}{2} e^{i\omega t} \left[(e^{-ik_1 l} + e^{-ik_{-1} l}) \vec{u}_x + \frac{-e^{-ik_1 l} + e^{-ik_{-1} l}}{i} \vec{u}_y \right] \\ &= E_0 e^{i(\omega t - \frac{k_1 + k_{-1}}{2} l)} \left[\cos((k_1 - k_{-1})l) \vec{u}_x - \sin((k_1 - k_{-1})l) \vec{u}_y \right] \end{aligned}$$

d'après la formule de l'angle moitié et de Moivre

On conclut que \vec{E} est une onde polarisée rectilignement

dans la direction $\cos(\psi) \vec{u}_x + \sin(\psi) \vec{u}_y$ avec $\boxed{\psi = -(k_1 - k_{-1})l}$

où $k_e = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \epsilon\omega_0)}}$ - la direction de polarisation a tourné

d'un angle ψ .

8. Sous ces hypothèses :

$$k_e \approx \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega + \epsilon\omega_0)} \right) \approx \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \cdot \frac{1}{1 + \epsilon\frac{\omega_0}{\omega}} \right)$$

$$\text{soit } k_e \approx \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \left(1 - \frac{\epsilon\omega_c}{\omega} \right) \right)$$

$$\approx \frac{\omega}{c} - \frac{\omega_p^2}{2\omega c} + \frac{\epsilon\omega_p^2\omega_c}{2c\omega^2} \quad \text{et } k_+ - k_- = \frac{\omega_p^2\omega_c}{c\omega^2}$$

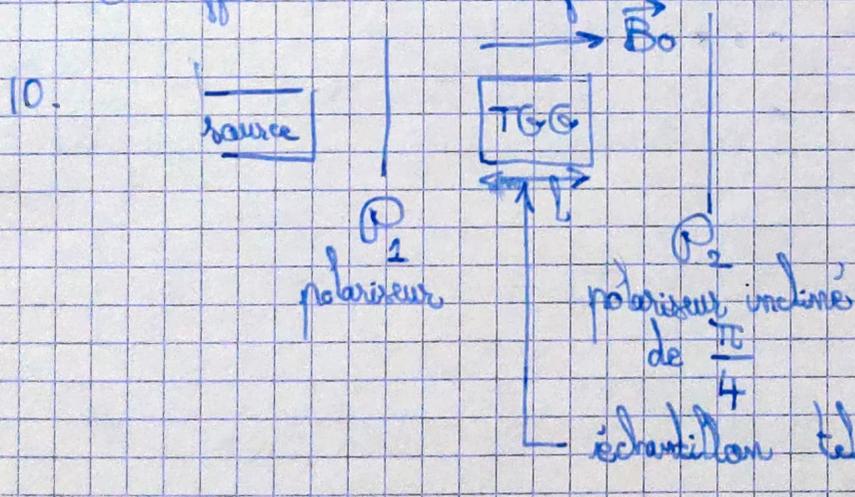
$$\text{D'où: } \psi = - \frac{\hbar\omega_p^2\omega_c}{c\omega^2} = - \frac{\hbar\omega_p^2}{c\omega^2} \cdot \frac{eB_0}{m_e} = \mathcal{V} \cdot \ell \cdot B_0$$

$$\text{avec } \mathcal{V} = - \frac{e\omega_p^2}{c\omega^2 m_e} = \frac{e^3 m_e}{c\omega^2 m_e^2 \epsilon_0}$$

9. On a alors:

$$\psi = \ell B_0 \cdot \frac{e^3 m_e}{c \left(\frac{2\pi c}{\lambda} \right)^2 m_e^2 \epsilon_0} \approx 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Cet effet est relativement faible.



Avec ce dispositif, la lumière réfléchie vers la source fera inclinée de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à celle de la source et ne passera pas à travers P_1 .

échantillon tel que $\psi = \mathcal{V} \ell B_0 = \frac{\pi}{4}$

Au contraire la lumière directe (vers la droite) arrive sur P_2 avec le bon angle et passe à travers sans pertes.

IV - Dispersion

1.1 - Onde de marée

$$1. \text{ On a: } [\gamma] = \frac{[g k \mu]}{[k^3]} = \frac{m \cdot s^{-2} \cdot kg \cdot m^{-3} \cdot m^{-1}}{m^{-3}} = kg \cdot s^{-2}$$

Ce une force s'exprime en $kg \cdot m \cdot s^{-2}$ donc γ est bien homogène à

une force par unité de longueur.

2. Les effets sont du même ordre si: $gk \sim \frac{\gamma k^3}{\mu}$
Avec $k \sim \frac{1}{l_c}$: $g l_c^2 \sim \frac{\gamma}{\mu}$ soit: $l_c \sim \sqrt{\frac{\gamma}{\mu g}}$

3. Si $l \ll l_c$ alors les effets capillaires dominent (ex goutte d'eau)
Si $l \gg l_c$ alors c'est la gravité qui domine (vagues dans la mer).

• Dans le 1^{er} cas: $\omega^2 = \frac{\gamma}{\mu} k^3 \tanh(kh)$
 \hookrightarrow Si $h \ll \lambda$ alors $kh \ll 1$ et $\tanh(kh) \approx kh$. On a
alors $\omega^2 = \frac{\gamma h}{\mu} k^4$ $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\left(\frac{\mu \omega^2}{\gamma h}\right)^{1/4}}$

$$\text{D'où } v_\phi = \omega^{1/2} \left(\frac{\gamma h}{\mu}\right)^{1/4} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = 2k \sqrt{\frac{\gamma h}{\mu}}$$

$$\text{D'où: } v_g = 2\omega^{1/2} \left(\frac{\gamma h}{\mu}\right)^{1/4} \quad \text{ainsi } v_g = 2v_\phi$$

\hookrightarrow Si $h \gg \lambda$ alors $kh \gg 1$ et $\tanh(kh) \approx 1$, on a:

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{\mu} k^3 \quad \text{et } v_\phi = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{\omega \gamma}{\mu}\right)^{1/3}; \quad v_g = \frac{3}{2} \left(\frac{\omega \gamma}{\mu}\right)^{1/3}$$

• Dans le 2^e cas: $\omega^2 = gk \tanh(kh)$

\hookrightarrow Si $h \ll \lambda$ alors $\omega^2 \approx gh k^2$ et $v_\phi = v_g = \sqrt{gh}$

\hookrightarrow Si $h \gg \lambda$ alors $\omega^2 \approx gk$ et $v_\phi = \frac{g}{\omega}$

$$\text{et } v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{k}} = \frac{g}{2\omega} \quad \text{soit } v_g = \frac{v_\phi}{2}$$

On a dispersion dans tous les cas sauf pour les ondes gravitaires en eau peu profonde, auquel cas $v_\phi = v_g = \sqrt{gh}$.

4. On a $l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\mu g}} \sim 2,7 \text{ mm}$ avec $\mu = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Dans l'océan $\lambda \gg h$ et $\lambda \gg l_c$ donc $v_\phi = v_g = \sqrt{gh}$.

L'application numérique donne $v_g = v_\varphi \approx 221 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Pour la haute: $\lambda \gg l_c$ et $h \gg \lambda$

$$v_\varphi = \frac{g}{\omega} = \frac{g}{\sqrt{gk}} = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}} = 2,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \text{ et } v_g = \frac{1}{2} v_\varphi = 1,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

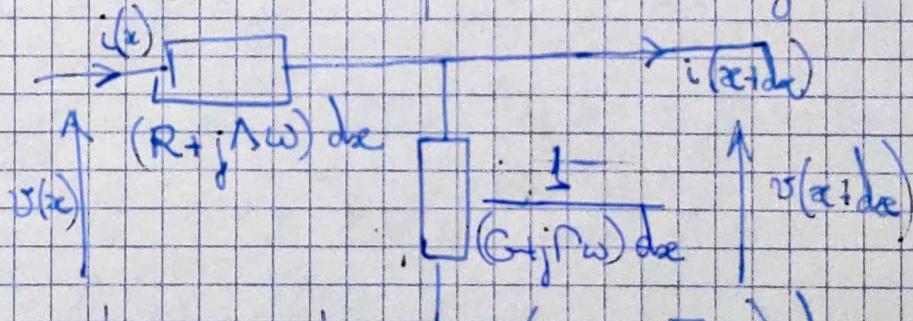
Ces ordres de grandeurs correspondent bien aux observations.

Pour la cuve à ondes on a toujours $\lambda \gg l_c$ et $\lambda \gg h$, donc

$$v_g = v_\varphi = \sqrt{gh} \approx 0,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

12. - Dispersion dans un câble coaxial avec pertes

1. On peut appliquer les lois d'addition d'impédances pour trouver que le schéma est équivalent à (en régime sinusoïdal forcé):



$$\text{avec } \frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{R dx} + \frac{1}{j\Gamma dx} = (G + j\Gamma\omega) dx$$

Alors par la loi des nœuds et en écrivant la loi de dipôle pour Z_{eq} :

$$v(x+dx) \times (G + j\Gamma\omega) dx = i(x) - i(x+dx)$$

De même:

$$i(x) (R + j\Lambda\omega) dx = v(x) - v(x+dx)$$

$$\text{D'où: } \begin{cases} (G + j\Gamma\omega) v = -\frac{\partial i}{\partial x} \\ (R + j\Lambda\omega) i = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (*)$$

Soit: $(G + j\Gamma\omega)(R + j\Lambda\omega) v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ en régime sinusoïdal forcé

On a $\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow j\omega$ donc on obtient l'équation:

$$(G + \Gamma \frac{\partial}{\partial t}) (R + \Lambda \frac{\partial}{\partial t}) v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

On encore
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (R\Gamma + \Lambda G) \frac{\partial v}{\partial t} + RG v$$

(On a établi l'équation en supposant un régime sinusoïdal forcé, mais elle est toujours vraie). On trouve $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}$.

2.a. On réinjecte dans (*) avec $\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -jk$:

$$(G + j\Gamma \omega) (R + j\Lambda \omega) = -k^2$$

b. On a alors $k^2 = (R_1 - jk_2)^2 = k_1^2 - k_2^2 - 2jk_1 k_2$

Il n'y a pas d'atténuation si $k_2 = 0$ auquel cas $k^2 \in \mathbb{R}$

et donc $R\Gamma + \Lambda G = 0$

c. La vitesse de phase ne dépend pas de ω si $k_1 = K \times \omega$ où K est une constante, alors: $k = \frac{\omega}{K} - jk_2(\omega)$.

On a ainsi:
$$-k^2 = -\frac{\omega^2}{K^2} + k_2(\omega)^2 + j \times \frac{2\omega}{K} k_2(\omega)$$

$$= RG - \Lambda \Gamma \omega^2 + j(R\Gamma + \Lambda G)$$

D'où:
$$\begin{cases} \frac{2\omega}{K} k_2(\omega) = R\Gamma + \Lambda G \Rightarrow k_2 \text{ ne dépend pas de } \omega \\ -\frac{\omega^2}{K^2} + k_2^2 = RG - \Lambda \Gamma \omega^2 \Rightarrow \begin{cases} k_2 = \sqrt{RG} \\ K = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}} = c \end{cases} \end{cases}$$

On conclut que $k_2 = \sqrt{RG}$ et $k_1 = \frac{c}{2} (R\Gamma + \Lambda G)$

D'où:
$$\sqrt{RG} = \frac{R\Gamma + \Lambda G}{2\sqrt{\Lambda \Gamma}} \Rightarrow 2RG\Lambda \Gamma = (R\Gamma + \Lambda G)^2$$

$$\Rightarrow 2RG\Lambda \Gamma = R^2 \Gamma^2 + \Lambda^2 G^2 + 2RG\Lambda \Gamma$$

$$\Rightarrow 0 = R^2 \Gamma^2 + \Lambda^2 G^2$$

Donc $R\Gamma = 0$ et $\Lambda G = 0$ or $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}$ est fini donc $R = \Gamma = 0$