

Corrigé - DS 1

I - Se libérer de l'attraction terrestre

1 - L'attraction gravitationnelle terrestre

1. Un référentiel est dit galiléen si le principe d'inertie (1^{re} loi de Newton) y est vérifié. On peut supposer le référentiel terrestre galiléen si le temps caractéristique du mouvement étudié est court devant la période de rotation de la Terre sur elle-même.

2.
$$\vec{F}_G = - G \cdot \frac{mM_T}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{où } \vec{e}_r \text{ pointe vers l'extérieur}$$

($\vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{r}$)

Le problème étant à symétrie sphérique, E_p ne dépend que de r et on a $dE_p = \underbrace{-\vec{F}_G \cdot d\vec{s}}_{\text{travail de la force}} = + G \frac{mM_T}{r^2} dr$

D'où
$$\frac{dE_p}{dr} = \frac{GmM_T}{r^2}$$

Or $E_p(r \rightarrow \infty) = 0$ donc

$$E_p = - G \frac{mM_T}{r}$$

3. Le mouvement est dit lié si la trajectoire a un rayon borné, c'est-à-dire que le point M reste sous l'influence gravitationnelle de la Terre. Dans ce cas, son énergie mécanique est négative.

4. Pour que le projectile s'échappe de l'attraction gravitationnelle terrestre, il faut une énergie mécanique positive :

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{mM_T}{R_T} > 0 \quad \leftarrow \text{car } r = R_T \text{ lorsqu'on lance le projectile}$$

Cette condition est équivalente à $v > v_{\text{lim}}^2$ avec $v_{\text{lim}}^2 = \frac{\sqrt{2GM_T}}{R_T}$

2 - Tir d'un boulet de canon

5. La force $\vec{F}_f$ s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

Donc l'unité de γ est : $\frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$

γ est donc homogène à une masse divisée par une longueur, on peut donc écrire $\gamma = \frac{m}{l_f}$ où l_f est une longueur.

6. Dans le référentiel terrestre, l'énergie mécanique du boulet s'écrit

$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + m g z$. Or $\frac{1}{2} m v^2 \geq 0$ et l'énergie mécanique ne peut que décroître car les frottements sont dissipatifs,

ainsi : $m g z \leq E_m \leq E_m(t=0)$ donc z est borné par une constante : le boulet va atteindre une altitude maximale.

7. Le boulet est assimilé à un point matériel auquel on applique le PFD dans le référentiel terrestre, il est soumis à son poids et à la force de frottement :

$$m \ddot{z} \vec{u}_z = -m g \vec{u}_z - \frac{m}{l_f} v \vec{v}$$

On projette et on obtient :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{l_f} + m g = 0 & \text{phase ascendante} \\ \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{l_f} - m g = 0 & \text{phase descendante} \end{cases}$$

8. Lors de la phase descendante, aux temps longs il existe une solution pour laquelle $\frac{dv}{dt} = 0$, et on a alors $\frac{v^2}{l_f} = m g$

d'où $v_{\text{lim}} = \sqrt{m g l_f}$

Cette vitesse limite n'existe pas lors de la phase ascendante, qui

prend fin dès que la vitesse devient nulle. L'équation $\frac{dv}{dt} = 0$ n'a pas de solution pour la phase ascendante.

10. Pour la phase descendante : $\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{l_g} = +g$

* Aux courts instants, $v \ll v_{lim}$, alors $\frac{dv}{dt} \approx -g$ et donc $v \approx +gt$: la vitesse croît linéairement. C'est le régime transitoire.

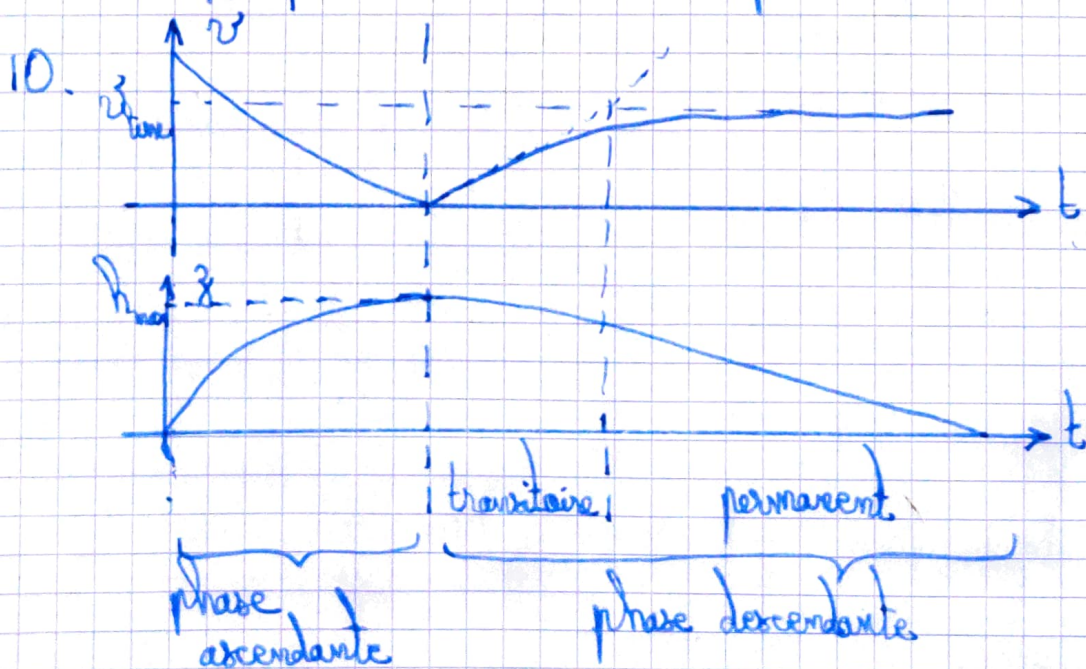
* Aux longs instants, $\frac{dv}{dt} \approx 0$ et $v = v_{lim}$, c'est le régime permanent.

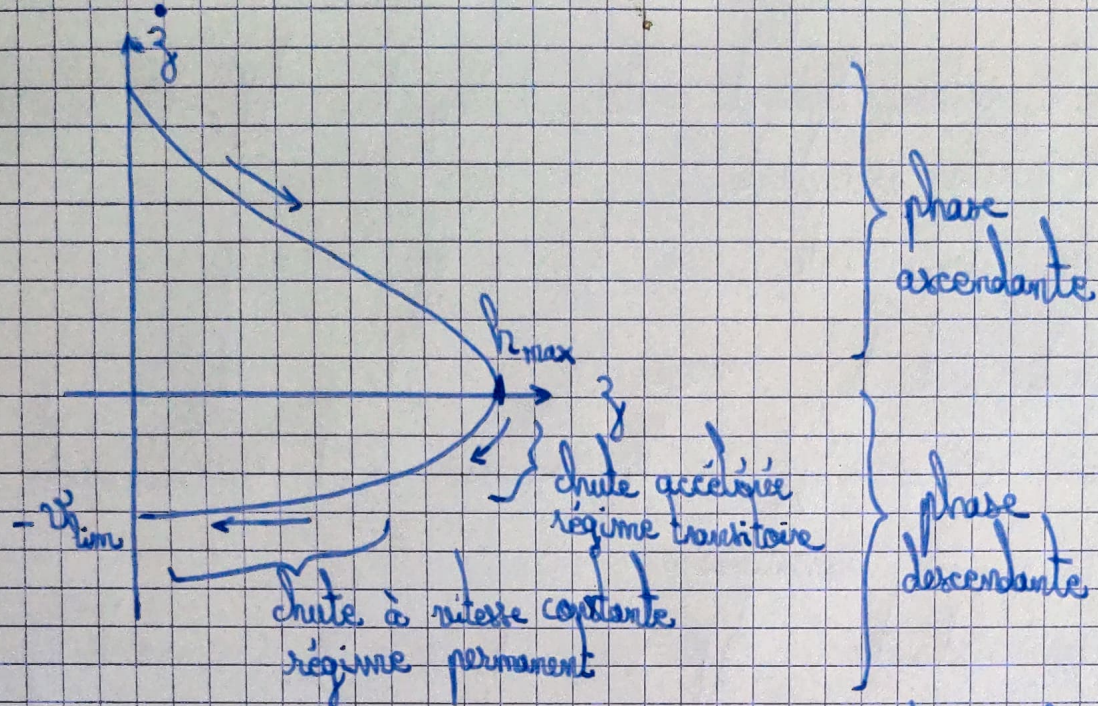
Le temps caractéristique τ est tel que $\frac{dv}{dt} \approx \frac{v^2}{l_g}$.
En ordre de grandeur $\frac{dv}{dt} \approx \frac{v_{lim}}{\tau}$ et $\frac{v^2}{l_g} \approx \frac{v_{lim}^2}{l_g}$.

Donc $\tau \approx \frac{l_g}{v_{lim}}$ soit $\tau \approx \sqrt{\frac{l_g}{g}}$

Rq: on peut aussi trouver le résultat par analyse dimensionnelle.

Lors du régime permanent, le mouvement est rectiligne uniforme vers le bas à la vitesse v_{lim} ; les forces qui s'appliquent au boulet se compensent.





11. Si on note $\tilde{v} = \frac{v}{v_{lim}}$ et $\tilde{t} = \frac{t}{\tau}$ alors :

$$\frac{dv}{dt} = \underbrace{\frac{v_{lim}}{\tau}}_{=g} \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} \quad \text{et} \quad \frac{v^2}{\tau} = \frac{v_{lim}^2}{\tau} \tilde{v}^2 = g \tilde{v}^2$$

Donc on a en phase ascendante $\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} + \tilde{v}^2 = -g\tau$

Ou encore $\frac{d\tilde{v}}{1+\tilde{v}^2} = -d\tilde{t}$

On intègre entre $\tilde{t}=0$ et $\tilde{t}$: $[\arctan(\tilde{v})]_{\tilde{v}_0}^{\tilde{v}} = -\tilde{t}$

D'où : $\arctan(\tilde{v}) - \arctan(\tilde{v}_0) = -\tilde{t}$

Et : $\tilde{v} = \tan(-\tilde{t} + \arctan(\tilde{v}_0))$

Ainsi : $\boxed{v_+ = v_{lim} \times \tan\left(\arctan\left(\frac{v_0}{v_{lim}}\right) - \frac{t}{\tau}\right)}$

Pour la phase descendante : $\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} + \tilde{v}^2 = 1$

Donc $\frac{d\tilde{v}}{1-\tilde{v}^2} = d\tilde{t}$ et on intègre entre $\tilde{t}=\tilde{t}_0$ et $\tilde{t}$

avec $\tilde{t}_0$ l'instant pour lequel la phase descendante commence :

$$[\operatorname{arctgh}(\tilde{v})]_{\tilde{v}}^{\tilde{v}_0} = \tilde{t} - \tilde{t}_0$$

Or $\tilde{t}_0$ est tel que $v_+ = 0$ donc $\tilde{t}_0 = \arctan\left(\frac{v_0}{v_{lim}}\right)$
 De plus on peut reproduire la substitution $v = v_{lim} \times \tilde{v}$ et $t = \tilde{c} \times \tilde{t}$
 pour trouver : $\tilde{v} = \tanh\left(\tilde{t} - \tilde{t}_0 + \underbrace{\arctan(0)}_{=0}\right)$

Puis :
$$v_- = v_{lim} \times \tanh\left(\frac{t}{\tilde{c}} - \arctan\left(\frac{v_0}{v_{lim}}\right)\right)$$

12. Lors de la phase ascendante, on constate que $v_+(t=0) = v_0$
 et v_+ est strictement décroissante jusqu'à atteindre $v_+ = 0$.
 Lors de la phase descendante, on a bien une première phase
 pendant laquelle $v_-(t)$ est croissante, puis $\lim_{t \rightarrow +\infty} v_-(t) = v_{lim}$
 donc on atteint le régime permanent.

13. On lit $v_0 = 680 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $t_0 = 22 \text{ s}$ et $v_{lim} = 180 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 sur la figure 4. On en déduit :

$$t_0/\tilde{c} = \arctan\left(\frac{v_0}{v_{lim}}\right) \text{ donc } \tilde{c} = \frac{t_0}{\arctan\left(\frac{v_0}{v_{lim}}\right)} = 17 \text{ s}$$

$$\text{Et } l_f = \frac{v_{lim}^2}{g} = 3,2 \text{ km.}$$

Alors $\sqrt{\frac{l_f}{g}} = 18 \text{ s} \approx \tilde{c}$: on retrouve bien la relation attendue.

3 - Non uniformité du champ de pesanteur

14. Le champ de gravitation produit par la Terre est :

$$\vec{G}_{T \rightarrow} = -G \frac{M_T}{r^2} \vec{u}_r.$$

Selon la verticale : $r = R_T + z$ et $\vec{u}_r = \vec{u}_z$
 Alors :

$$\vec{g}_T = -g_T(z) \vec{u}_z \quad \text{où} \quad g_T(z) = G \frac{M_T}{(R_T + z)^2}$$

$$g_T(z) = \frac{GM_T}{R_T^2} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2} \approx \frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - 2 \frac{z}{R_T}\right)$$

↑
développement limité

15. Pour le boulet de canon on lit $z_{\max} \approx 4000 \text{ m}$

Alors :

$$\frac{|g_T(z_{\max}) - g_T(z=0)|}{g_T(z=0)} = 2 \cdot \frac{z_{\max}}{R_T} \approx 0,1\%$$

écart relatif du champ de gravitation

Cet écart est très faible donc on peut effectivement considérer le champ de gravitation comme uniforme.

II - Méthodes de mesure du champ de pesanteur

1 - Mesures à partir de pendules

16. Un pendule oscille à la fréquence $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$ où L est la longueur du fil. La mesure de la fréquence des oscillations et de L permet donc de déterminer g .

17. On a $T_{\text{Paris}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g_{\text{Paris}}}}$ et $T_{\text{Cayenne}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g_{\text{Cayenne}}}}$

Donc :

$$g_{\text{Cayenne}} = g_{\text{Paris}} \times \left(\frac{T_{\text{Paris}}}{T_{\text{Cayenne}}}\right)^2$$

Or :

$$\frac{T_{\text{Paris}}}{T_{\text{Cayenne}}} = \frac{1 \text{ jour}}{1 \text{ jour et } 2 \text{ min } 28 \text{ s}} = \frac{86400 \text{ s}}{86548 \text{ s}} \quad \text{donc :}$$

$$g_{\text{Cayenne}} = 9,78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Cette valeur est plus faible car la Terre est bombée à l'équateur donc Cayenne est plus loin du centre de la Terre ; et il y a une pseudo-force centrifuge en plus car Cayenne est à l'équateur.

18. On a : $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ donc $\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}$
par différentielle logarithmique. Ainsi il faut une précision :

$$\Delta T = \frac{T}{2} \cdot \frac{\Delta g}{g} = \frac{18}{2} \times \frac{1 \mu\text{gal}}{981 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^{-8}}{9,81}$$

D'où une précision $\Delta T = 0,5 \text{ ns}$ d'où l'intérêt de faire une mesure sur un très grand nombre de périodes (une journée complète).

19. Un ressort de lycée s'étire usuellement de quelques centimètres pour une masse de $10 \text{ g} = m$: $k \underbrace{(L - L_0)}_{5 \text{ cm}} = \underbrace{m}_{10 \text{ g}} \underbrace{g}_{10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$

On en déduit $k \sim 2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$

Si g varie de $10 \mu\text{gal} = \Delta g$, alors l'élongation variera de ΔL tel que : $k (L + \Delta L - L_0) = m (g + \Delta g)$

Donc $k \Delta L = m \Delta g$ et $\Delta L = \frac{m}{k} \Delta g = 5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

soit la taille de quelques molécules seulement !

20. Ceci permet de maximiser le rapport $\frac{\Delta L}{L}$ et donc la précision relative sur la mesure de l'élongation du ressort.

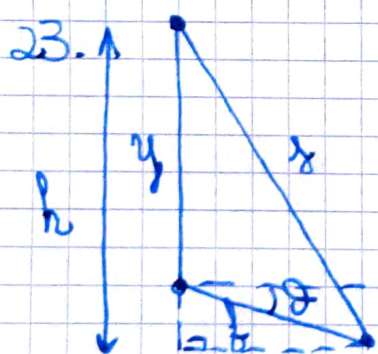
2 - Gravimètre à filin de La Cotte et Romberg

21. L'angle θ à l'équilibre du filin s'ajuste pour qu'il y ait compensation entre les moments des deux forces en jeu : la force de gravité et la force de rappel du ressort. On s'attend donc à ce que l'angle à l'équilibre dépende de g , ce qui permettra de mesurer g .
- On peut aussi supposer que la période des oscillations autour de la position d'équilibre dépend de g .

22. La tige ayant une masse nulle, l'énergie potentielle est la somme de :

- * L'énergie potentielle de pesanteur de la masse $E_{pp} = -mga \sin \theta$
- * L'énergie potentielle élastique $E_{pe} = \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 = \frac{1}{2} k x^2$

D'où :
$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 - mga \sin \theta$$



On note h la longueur indiquée sur le schéma.

On a $h = y + b \sin \theta$

Et par le théorème de Pythagore $x^2 = b^2 + b^2 \cos^2 \theta$

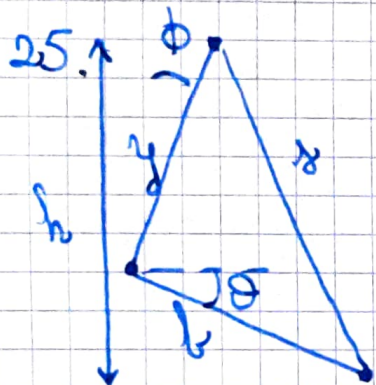
D'où :
$$x^2 = (y + b \sin \theta)^2 + b^2 \cos^2 \theta$$

On encore
$$x = \sqrt{y^2 + b^2 + 2yb \sin \theta}$$

Alors :
$$E_p = \frac{1}{2} k (y^2 + b^2 + 2yb \sin \theta) - mga \sin \theta$$

$$E_p = \frac{1}{2} k (y^2 + b^2) + (k y b - m g a) \sin \theta$$

24. Lorsque le ressort n'est pas incliné, on a un maximum d'énergie potentielle donc l'équilibre est instable et donc ne peut pas être mesuré précisément.
Lorsque le ressort est incliné, on a un équilibre stable, il est beaucoup plus facile de mesurer la position d'équilibre.



On a désormais
$$\begin{cases} h = y \cos \phi + b \sin \theta \\ x^2 = h^2 + (b \cos \theta - y \sin \phi)^2 \end{cases}$$

Donc
$$\begin{aligned} x^2 &= (y \cos \phi + b \sin \theta)^2 + (b \cos \theta - y \sin \phi)^2 \\ &= y^2 + b^2 + 2yb(\sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi) \\ &= y^2 + b^2 + 2yb \sin(\theta - \phi) \end{aligned}$$

Ainsi :
$$E_p = \frac{1}{2}k(y^2 + b^2) + k y b \sin(\theta - \phi) - m g a \sin \theta$$

26. On a alors :

$$\Gamma' = -k y b \underbrace{\cos(\theta - \phi)}_{\cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi} + m g a \cos \theta$$

$$\Gamma' = (m g a - k y b \cos \phi) \cos \theta - k y b \sin \theta \sin \phi$$

27. On applique le théorème du moment cinétique à l'ensemble {tige + masse} autour de l'axe (O_z) , dans le référentiel terrestre supposé galiléen. L'ensemble est soumis :

- * à son poids
 - * à la force de rappel du ressort
 - * à la réaction au niveau de la liaison pivot, de moment nul
- } couple résultant Γ'

Alors :
$$J \ddot{\theta} = \Gamma' = (m g a - k y b \cos \phi) \cos \theta - k y b \sin \theta \sin \phi$$

où on a réalisé l'approximation des petits angles.

28. La pulsation propre des oscillations ω_0 et l'angle d'équilibre ϑ_0 sont tels que :

$$\ddot{\vartheta} + \omega_0^2 (\vartheta - \vartheta_0) = 0$$

Par identification :

$$\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{kylb}{J}} \sin \phi \\ \vartheta_0 = \frac{mga}{kylb \sin \phi} - \cot \phi \end{cases}$$

29. On a alors $\omega_0^2 = \frac{kylb}{ma^2} \sin \phi = \left(\frac{2\pi}{T_0} \right)^2$ période des oscillations

Donc : $\sin \phi = \frac{4\pi^2 m a^2}{kylb T_0^2}$

Or $\vartheta_0 = 0$ donc $mga = kylb \cos \phi \Rightarrow kylb = \frac{mga}{\cos \phi}$

D'où : $\tan \phi = \frac{4\pi^2 a}{g_0 T_0^2}$ et $\phi = \arctan \left(\frac{4\pi^2 a}{g_0 T_0^2} \right) = 9,9 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$

30. On a désormais $\vartheta_0' = \frac{m \Delta g a}{kylb \sin \phi} = \frac{m \Delta g a'}{\sin \phi} \times \frac{\cos \phi}{m g_0 a'}$

Ainsi : $\vartheta_0' = \frac{\Delta g}{g_0 \tan \phi}$

31. On a désormais $\vartheta_0' = \frac{10 \cdot 10^{-8}}{10 \times 10^{-4}} \approx 10^{-4} \text{ rad}$

ce qui correspond à un déplacement du bout du filéau

de $a \sin \vartheta_0' \approx 1 \mu\text{m}$. Cette quantité est beaucoup plus grande que celle obtenue avec le ressort de laboratoire et est bien mesurable avec des outils suffisamment précis.