

D'où : $\int \vec{g} \cdot d\vec{t} = -\frac{mG}{r}$

Corrigé - DS 1

1 - Étude d'un oscillateur

1. $\vec{f}$ modélise les forces de frottement : qui s'exercent sur les branches du diapason (typiquement les frottements de l'air).

La puissance de $\vec{f}$ est $P = \vec{f} \cdot \vec{v} = -\lambda \vec{v}^2$.

Or les frottements consomment de l'énergie, il faut donc que $P < 0$ soit $\boxed{\lambda > 0}$

2. On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On travaille sur le système constitué de la masselotte, soumise à :

* la force de rappel du ressort :

$$\vec{F}_{\text{rappel}} = -k(l-l_0)\vec{e}_z = -kz\vec{e}_z$$

* la force de frottement $\vec{f} = -\lambda \vec{v} = -\lambda \dot{z}\vec{e}_z$

On applique le PFD à Σ : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -kz\vec{e}_z - \lambda \dot{z}\vec{e}_z$

On projette sur $\vec{e}_z$:

$$\boxed{m\ddot{z} + \lambda\dot{z} + kz = 0}$$

3. On définit $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, alors :

$$\ddot{z} + \frac{\lambda}{m}\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

On définit également Q tel que $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m}$

soit $Q = \frac{m\omega_0}{\lambda}$

$$\text{soit } \boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}}$$

Alors $\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$ et on a bien un

système d'ordre 2 de pulsation propre ω_0 et facteur de qualité Q .

4. On écrit $z(t) = z_0 e^{\underline{r}t}$

Alors $\underline{r}^2 + \frac{\omega_0}{Q} \underline{r} + \omega_0^2 = 0$

$\underline{r}$ est solution du polynôme caractéristique de l'équation

Discriminant $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$
 $= -4\omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)$

(on suppose Q suffisamment grand pour avoir des oscillations, $Q > \frac{1}{2}$)

Alors: $\underline{r} = \frac{1}{2} \left[-\frac{\omega_0}{Q} \pm j\sqrt{\Delta} \right]$
 $= \frac{1}{2} \left[-\frac{\omega_0}{Q} \pm 2j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \right]$

Et:

$$z(t) = z_0 \cdot e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left[A e^{j\omega t} + B e^{-j\omega t} \right]$$

où on a posé $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$
 $= \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4km}}$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\lambda^2}{4m^2}}$$

la pulsation
des oscillations

On note aussi que $\frac{\omega_0}{2Q} = \frac{\lambda}{2m}$

En passant en réel et en notant $\varphi = \arg(z_0)$:

$$z(t) = z_0 e^{-\frac{\lambda}{2m}t} \cos(\omega t + \varphi)$$

où φ et z_0 sont des constantes d'intégration.

5. La fréquence propre est $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$

D'où $k = (2\pi f_0)^2 \times m$

A.N : $k \approx 3,0 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ pour le diapason

En TP on a typiquement une force de 1N pour un allongement de 10 cm $\Rightarrow k \sim 10 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$

Le diapason a donc une raideur beaucoup plus importante.

6. L'atténuation des oscillations est proportionnelle à $e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$.

On entend les oscillations environ jusqu'à $\frac{\omega_0}{2Q} t_{\max} \approx 3$ soit

$$Q \approx \frac{\omega_0 t_{\max}}{6} \approx \underbrace{\frac{2\pi}{6}}_{\approx 1} \cdot f_0 \cdot t_{\max}$$

A.N : $t_{\max} = 30 \text{ s}$ $f_0 = 500 \text{ Hz} \Rightarrow \boxed{Q \approx 1,5 \cdot 10^4}$

Cette valeur est très élevée, en TP en général on n'observe que quelques oscillations et Q est d'ordre 1.

7. On a vu que les oscillations ne se font pas exactement à la pulsation ω_0 mais $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

D'où $f = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \approx f_0 \left(1 - \frac{1}{8Q^2}\right)$ développement limité

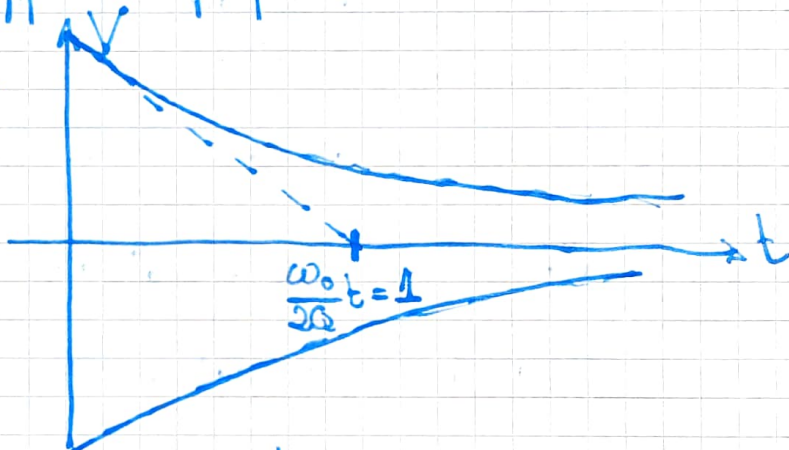
Or $\frac{1}{8Q^2} \sim \frac{1}{8 \times (1,5 \cdot 10^4)^2} \sim 5 \cdot 10^{-10}$ ce qui est totalement négligeable devant 1. En pratique on a bien $\boxed{f \approx f_0}$

8. Comme on a vu $f \approx f_0$ on mesure la période des oscillations.
On mesure 22 périodes (quasi exactement) en 0,05 s
donc $22 \times T = 22 \times \frac{1}{f_0} = 0,05 \text{ s}$

D'où $f_0 = \frac{22}{0,05} = \boxed{440 \text{ Hz}}$ (C'est la fréquence du La en musique)

Et on sait que l'enveloppe est proportionnelle à $e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$

On mesure sur la figure:



On trouve $\frac{\omega_0}{2Q}t = 1$ pour $t = 2,1 \text{ s}$

Or $\omega_0 = 2\pi f_0$ donc $Q = \pi f_0 t$ avec $f_0 = 440 \text{ Hz}$
 $t = 2,1 \text{ s}$

A.N. : $\boxed{Q = 2,9 \cdot 10^3}$

On constate que ce facteur de qualité est beaucoup plus faible lorsqu'on a une caisse de résonance : c'est parce que la caisse fait perdre de l'énergie au diapason en émettant des ondes sonores.

2 - Étude du mouvement d'un satellite

9. Le référentiel géocentrique est un référentiel dont l'origine est le centre de la Terre et dont les axes pointent vers

des étoiles lointaines.

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel tout corps soumis à des forces qui se compensent est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

10. En utilisant le repère défini en figure 3:

$$\vec{F}_g = -G \frac{mM_T}{r^2} \vec{e}_r$$

11. On travaille dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.

O est un point fixe dans ce référentiel.

On définit comme système le mobile de masse m.

Il est soumis uniquement à $\vec{F}_g$ qui est une force centrale et a un moment nul en O.

Par le théorème du moment cinétique: $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{r} \wedge (\vec{F}_{ext}) = \vec{0}$

Donc $\vec{L}_O$ est un vecteur constant.

$$\text{Or } \vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v} \perp \vec{OM}.$$

Donc M reste dans le plan passant par O et normal à $\vec{L}_O$ et le mouvement est plan.

12. Le travail de la force gravitationnelle le long d'un chemin Γ est:

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F}_g \cdot d\vec{l}$$

$$\text{Or } d\vec{l} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{F}_g = -G \frac{mM_T}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\text{Donc } W = \int_{\Gamma} -GmM_T \frac{dr}{r^2} = GmM_T \left(\frac{1}{r_{\text{final}}} - \frac{1}{r_{\text{initial}}} \right)$$

W ne dépend pas du chemin suivi donc $\vec{F}_g$ dérive d'une

énergie potentielle E_p telle que $W = -\Delta E_p$.

Ainsi :

$$\boxed{E_p = -G \frac{m M_T}{r}}$$

en prenant $E_p = 0$ à l'infini

13. On est toujours dans le référentiel géocentrique galiléen et on a comme système le mobile.

Il n'est soumis à aucune force non conservative. Par le théorème de l'énergie mécanique : $\frac{dE_m}{dt} = 0 \Leftrightarrow E_m = \text{cte}$

$$\text{Or } E_m = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + E_p$$

$$\text{Avec } \vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$$

$$\begin{aligned} \text{Par ailleurs on a vu que } \vec{L}_0 &= \vec{OM} \wedge m \vec{v} \\ &= m r \vec{e}_r (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \\ &= m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

$$\text{est constant, et } L_0 = m r^2 \dot{\theta} \text{ soit } \dot{\theta} = \frac{L_0}{m r^2}.$$

$$\text{On obtient ainsi : } \vec{v}^2 = \dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{m^2 r^2}$$

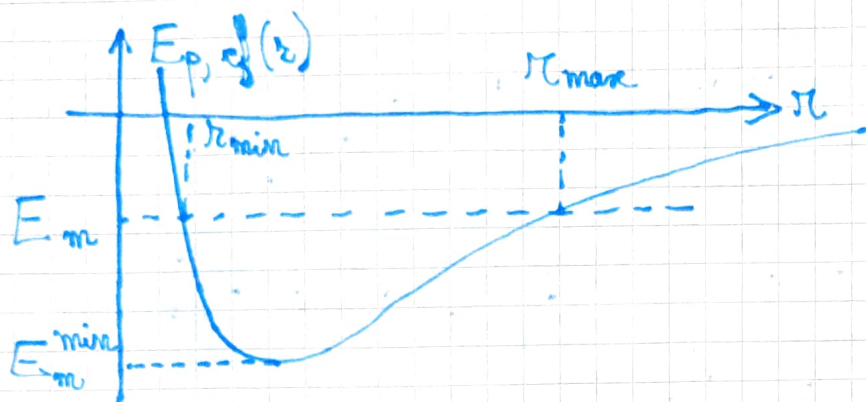
$$\text{D'où } E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{L_0^2}{m r^2}$$

$$\text{On définit : } \boxed{E_{p, \text{eff}}(r) = \frac{1}{2} \frac{L_0^2}{m r^2} - G \frac{m M_T}{r}}$$

$$\text{Alors : } E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p, \text{eff}}(r)$$

$$14. \text{ On a } \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \geq 0 \text{ donc } E_m \geq E_{p, \text{eff}}(r).$$

15. Pour un état lié, on ne peut pas avoir $r \rightarrow \infty$ donc on a $E_m < 0$:



Dans un état lié
l'orbite est confinée
entre r_{min} et r_{max} .

16. On a $E_{p,eff} = E_m$ lorsque $\dot{r} = 0$ soit au minimum r_{min} et au maximum r_{max} de r , qui correspondent au périgée et à l'apogée de l'orbite.

Dans le cas où $E_m = E_m^{min}$ alors $r_{min} = r_{max}$ et r est une constante : l'orbite est circulaire.

17. Comme l'orbite est circulaire, on a, en supposant le mouvement rectiligne uniforme, une accélération centripète :

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R} \vec{e}_r$$

Toujours dans le référentiel géocentrique galiléen, le principe fondamental de la dynamique appliqué au mobile donne :

$$m\vec{a} = \vec{F}_g \Leftrightarrow -m \frac{v^2}{R} = -G \frac{mM_T}{R^2}$$

$$\text{Soit } v^2 = \frac{GM_T}{R}$$

$$\text{D'où l'énergie cinétique } E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{G m M_T}{2R}$$

$$\text{De plus on a vu } E_p = -\frac{G m M_T}{R}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{E_m = E_c + E_p = -\frac{G m M_T}{2R}}$$

Autre méthode possible :

Lorsque l'orbite est circulaire on a :
$$\begin{cases} E_m = E_{p,eff}(r) \\ E_{p,eff}'(r) = 0 \end{cases}$$

La 2^e équation donne :
$$-\frac{L_0^2}{m r^3} + G \frac{m M_T}{r^2} = 0$$

D'où
$$\frac{L_0^2}{m r^2} = \frac{G m M_T}{r}$$

En réinjectant dans la première on trouve le résultat.

18. Pour une orbite circulaire $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}$ où T est la période de l'orbite. Ainsi $L_0 = m R^2 \dot{\theta} = \frac{2\pi m R^2}{T}$.

Or on a vu $E_m = -\frac{G m M_T}{2R} = E_{p,eff}(R)$

On en déduit :

$$-\frac{G m M_T}{2R} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m R^2} \cdot \left(\frac{2\pi m R^2}{T} \right)^2 - \frac{G m M_T}{R}$$

Soit :
$$G M_T = 4\pi^2 \cdot \frac{R^3}{T^2}$$

On en déduit :
$$\boxed{\frac{R^3}{T^2} = \frac{G M_T}{4\pi^2}} \quad 3^e \text{ loi de Kepler}$$

Rq : peut aussi se démontrer avec le PFD.

19. On sait que en $r=R$ et $r=R_c$: $E_m = E_{p,eff}(r)$

Ainsi :
$$\begin{cases} E_m = \frac{1}{2} \frac{L_0^2}{m R^2} - G \frac{m M_T}{R} \quad (*_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_m = \frac{1}{2} \frac{L_0^2}{m R_c^2} - G \frac{m M_T}{R_c} \quad (*_2) \end{cases}$$

$R^2(*_1) - R_c^2(*_2)$ donne : $(R^2 - R_c^2) E_m = -G m M_T (R - R_c)$

D'où : $E_m = -G m M_T \cdot \frac{R - R_c}{R^2 - R_c^2}$

Or $R^2 - R_c^2 = (R - R_c)(R + R_c)$

D'où $E_{m,br} = -\frac{G m M_T}{R + R_c}$

20. On a $\Delta E_m = E_{m,br} - E_{m,alt}$
 $= -\frac{G m M_T}{R + R_c} + \frac{G m M_T}{2R}$
 $= G m M_T \left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{R + R_c} \right)$

On a $R_c < R$ donc $\Delta E_m < 0$: c'est logique puisque sur l'orbite de transfert le satellite est plus près de la Terre.

21. Comme l'orbite cimetière est aussi plus près de la Terre on a $E_{m,cimetière} < E_{m,alt}$ donc il faut freiner le satellite pour le transfert.

3 - Formation des étoiles

22. La force gravitationnelle tend à favoriser la formation de l'étoile (le gaz est attiré par l'étoile) donc l'opérateur récupère de l'énergie en déplaçant le gaz vers l'étoile.

et : $W_g < 0$

$E_l = -W_g$ est l'énergie libérée lorsque l'on rassemble le

gaz pour former l'étoile, c'est donc l'énergie de liaison de l'étoile.

23. Accroissement de r à $r+dr$: on augmente la masse de l'étoile.

On a : $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ car elle est uniforme

Lors de l'accroissement on ajoute une coquille sphérique de surface $4\pi r^2$ et d'épaisseur dr , sa masse est :

$$dm = 4\pi r^2 dr \cdot \rho = \boxed{3M \frac{r^2 dr}{R^3}}$$

$$\text{Et } m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \boxed{M \cdot \frac{r^3}{R^3}}$$

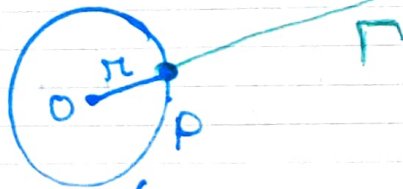
24. Le champ correspond au champ créé par une masse ponctuelle placée en O :

$$\boxed{\vec{g} = -G \cdot \frac{m}{r^2} \vec{e}_r}$$

(On remplace avec $m = M \frac{r^3}{R^3}$:

$$\boxed{\vec{g} = -MG \cdot \frac{r}{R^3} \vec{e}_r} \quad (\text{uniquement à la surface de l'étoile})$$

25. On suppose le potentiel nul loin de l'étoile. On intègre alors le champ $\vec{g}$ le long d'un contour partant de la surface de l'étoile et allant à l'infini selon $\vec{e}_r$:



$$\int_{\Gamma} \vec{g} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma} \vec{g} \cdot \vec{e}_r dr = \int_{R}^{\infty} -\frac{MG}{r^2} dr = \left[\frac{MG}{r} \right]_{R}^{\infty}$$

$$\text{D'où : } \int_r \vec{E}_g \cdot d\vec{l} = - \frac{mG}{r}$$

$$\text{Or } \vec{E}_g = - \text{grad } \phi.$$

Par le théorème du gradient :

$$\int_r \vec{E}_g \cdot d\vec{l} = - \int_r \text{grad}(\phi) \cdot d\vec{l} = - (\overbrace{\phi(\infty)}^{=0} - \phi(r)) = \phi(r)$$

$$\text{D'où : } \boxed{\phi(r) = - \frac{Gm}{r}}$$

26. Lors de l'accroissement, une partie du gaz (la masse dm) est prise à l'infini où $\phi = 0$ et est transportée vers r avec $\phi(r) = - \frac{Gm}{r}$. Son énergie potentielle est donnée par $E_p = \phi \times dm$ par définition de ϕ .

On a donc une contribution $dW_g = dE_p = dm \times (\phi(r) - \phi(\infty))$
 d'où $\boxed{dW_g = - \frac{Gm dm}{r}}$

L'énergie totale est atteinte lorsqu'on a ajouté toute la masse :

$$W_g = \int dW_g = - G \int_0^M \frac{m dm}{r}$$

$$\text{Or : } \begin{cases} dm = \frac{3M}{R^3} \cdot r^2 dr \\ m = \frac{M}{R^3} \cdot r^3 \end{cases} \quad (\text{question 23})$$

$$\text{Donc : } W_g = - \frac{3GM^2}{R^6} \int_0^R r^4 dr = - \frac{3GM^2}{R^6} \times \frac{R^5}{5}$$

$$\text{Ainsi : } \boxed{W_g = - \frac{3}{5} \cdot \frac{GM^2}{R}}$$