

Lycée Baimbridge, MP 2025-2026

à rendre pour le 5 mars 2026

Physique Chimie

DM 17

Loi de Wiedemann-Franz (Mines MP 2020)

En 1853 les physiciens allemands Gustav Wiedemann et Rudolf Franz remarquèrent expérimentalement que le rapport de la conductivité thermique d'un métal par sa conductivité électrique semblait constant pour tous les métaux. Une vingtaine d'années plus tard, en 1872, le physicien danois Ludvig Lorenz découvrit qu'en fait ce rapport dépendait linéairement de la température selon la relation

$$\frac{\lambda}{\gamma} = \kappa T \quad (1)$$

Cette relation est désormais connue sous le nom de loi de Wiedemann-Franz et la constante κ , appelée coefficient de Lorenz, est indépendante du métal considéré.

Après sa découverte expérimentale, cette relation est restée pendant longtemps un grand mystère pour les physiciens et questionnait sur le problème du transport de l'électricité et de la chaleur dans les métaux. Elle résista à la modélisation pendant un demi-siècle. Avec la découverte de l'électron et de ses propriétés en 1897 par le physicien anglais Joseph Thompson des modèles furent envisageables. L'un des tout premiers est établi par le physicien allemand Paul Drude en 1900, il permet d'interpréter le transport des électrons dans les métaux dans le cadre d'un modèle classique. Ce modèle permet de justifier certains traits de la loi de Wiedemann-Franz mais n'apporte pas toute satisfaction. Il sera repris une trentaine d'années plus tard dans un contexte quantique par les physiciens allemands Arnold Sommerfeld et Hans Bethe. L'analyse microscopique fine des solides devenait possible : elle fut à l'origine de très grandes avancées technologiques qui jalonnèrent le xx e siècle et reste encore tout à fait d'actualité.

Nous proposons dans ce sujet de démontrer la loi de Wiedemann-Franz dans un modèle statistique simple.

1 Conductivité électrique dans le modèle de Drude

On considère un fil de cuivre rectiligne d'axe Ox , homogène et comportant n électrons de conduction par unité de volume. Lorsqu'un champ électrique uniforme et permanent $\vec{E}$ est appliqué à ce matériau, chaque électron de vitesse $\vec{v}$ et de masse m est soumis à la force de Coulomb $\vec{f}_c$ imposée par ce champ et à une force de frottement fluide $\vec{f}_D = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$ qui modélise macroscopiquement l'interaction de l'électron avec le matériau.

□ 1 – En écrivant le principe fondamental de la dynamique à cet électron, déterminer sa vitesse limite dans ce modèle. En déduire l'expression de la conductivité électrique du matériau.

2 Interprétation de la durée τ

On peut s'interroger sur le sens physique de la durée τ . On adopte pour cela le modèle suivant : Soit un ensemble de N électrons de conduction. On désigne par $\vec{v}_i(t)$ la vitesse, à l'instant t , du i -ème électron de cet ensemble. On note $\vec{p}(t)$ la quantité de mouvement à l'instant t moyennée sur l'ensemble des porteurs de charge, soit

$$\vec{p}(t) = \sum_{i=1}^N m\vec{v}_i(t) \quad (2)$$

Lors de son déplacement, un électron subit diverses collisions ; on note $\vec{p}_{i,0}^+$ la quantité de mouvement du i -ème électron après l'une de ces collisions. Un électron pris au hasard subit une collision entre les instants t et $t + dt$ avec une probabilité dt/θ où θ est une constante positive. On rappelle qu'en l'absence de collision il est uniquement soumis à $\vec{f}_C$.

□ 2 – Justifier la relation $\vec{p}_i(t + dt) = \frac{dt}{\theta} \vec{p}_{i,0}^+ + \left(1 - \frac{dt}{\theta}\right) \vec{p}_i(t) + \vec{f}_C dt$

□ 3 – Déduire de l'équation précédente une relation entre $\frac{d\vec{p}}{dt}$, $\vec{p}(t)$, $\vec{f}_C$ et θ dans la limite $dt \rightarrow 0$. Commenter l'expression obtenue et relier θ à la durée τ .

On note $\Pi(t)$ la probabilité qu'un électron n'ait pas subi de collision entre un instant initial $t = 0$ et l'instant t . L'instant initial est choisi tel que l'électron a subi sa dernière collision à l'instant $t = 0$, c'est-à-dire juste avant l'instant initial.

□ 4 – Par une approche semblable à celle de la question 2, établir l'équation différentielle vérifiée par $\Pi(t)$ pour $t > 0$. Intégrer cette équation pour obtenir l'expression de $\Pi(t)$ en fonction de τ , puis calculer la moyenne temporelle de la durée entre deux collisions subies par un électron. En déduire une interprétation physique de la durée τ .

3 Conductivité thermique

Pour obtenir l'expression de la conductivité thermique, on adopte un modèle unidimensionnel de type gaz parfait. On note v la vitesse quadratique moyenne des électrons et on considère qu'ils se déplacent de façon équiprobable selon $+\vec{u}_x$ ou $-\vec{u}_x$ à la vitesse v . Dans ce modèle, l'énergie thermique est véhiculée globalement par les électrons le long de l'axe Ox , au gré des chocs. On se place également en régime stationnaire. On note $\mathcal{E}(T(x))$ l'énergie cinétique moyenne d'un électron situé en x (à la température $T(x)$).

□ 5 – A l'aide d'un bilan sur une section droite de métal située à l'abscisse x , montrer que le flux thermique j_q par unité de surface s'écrit :

$$j_q = \frac{1}{2}nv [\mathcal{E}(T(x - v\tau/2)) - \mathcal{E}(T(x + v\tau/2))] \quad (3)$$

□ 6 – En précisant les différentes hypothèses de votre calcul, exprimer j_q en fonction de $v, \tau, n, \frac{dT}{dx}$ et de la chaleur spécifique d'un électron $C_V = \frac{d\mathcal{E}}{dT}$. En retrouvant la loi de Fourier dans cette relation, déduire l'expression de la conductivité thermique du gaz d'électrons.

□ 7 – Dans le cadre du modèle du gaz parfait classique monodimensionnel exprimer finalement en fonction de n, T, k_B, τ et de la masse m de l'électron.

4 Loi de Wiedemann-Franz

□ 8 – Exprimer le rapport $\frac{\lambda}{\gamma T}$ en fonction de e et k_B dans le modèle classique monodimensionnel étudié jusqu'à présent. Comment se généralise cette relation dans le cas tridimensionnel ? On justifiera sa réponse. Cette relation donne le coefficient de Lorenz dans le modèle classique de Drude.

En fait le gaz formé par les électrons libres contenus dans un métal ne peut absolument pas être décrit dans un contexte classique même à température ambiante. Un modèle quantique tridimensionnel proposé par Arnold Sommerfeld en 1926 donne les résultats suivants :

$$C_V = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right) k_B \quad \text{avec} \quad \epsilon_F = \frac{1}{2} m v_F^2 \quad (4)$$

où ϵ_F et v_F sont respectivement l'énergie de Fermi et la vitesse de Fermi du gaz d'électrons. Dans ce modèle quantique la vitesse des électrons est donnée par leur vitesse de Fermi.

On admet enfin que les expressions de la conductivité thermique obtenue à la question 6 révisée à la question 8 et celle de la conductivité électrique de la question 1 restent valides dans un contexte quantique.

□ **9** — Exprimer le coefficient de Lorenz κ en fonction de e et k_B dans le modèle quantique proposé par Sommerfeld. Cette relation constitue la loi de Wiedemann-Franz dans le modèle de Drude-Sommerfeld.

□ **10** — Comparer les valeurs du coefficient de Lorenz dans les cas classique et quantique. Pour les métaux conducteurs l'énergie de Fermi des électrons est de l'ordre de l'électron-volt et on rappelle qu'à température ambiante $k_B T \approx \frac{1}{40}$ eV. Que peut-on dire du modèle classique ?