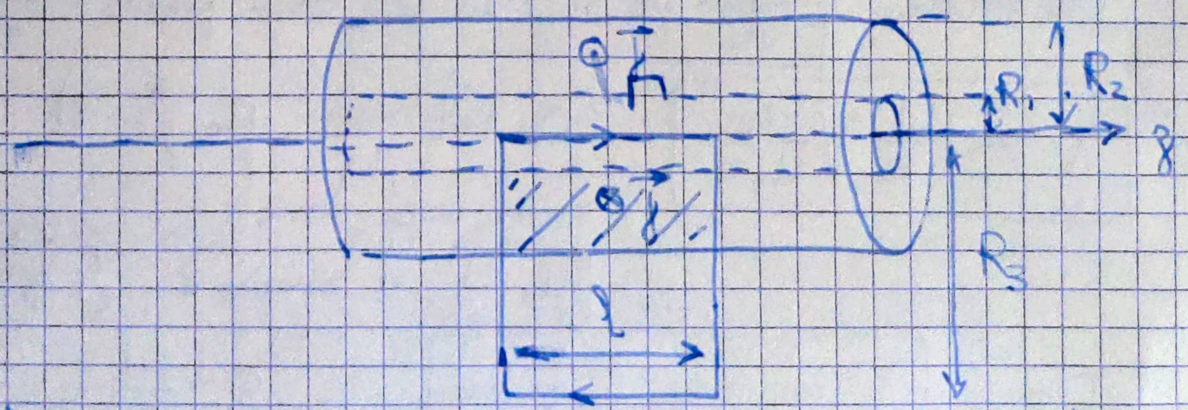
Corrigé - DM 15

I - Création d'un champ permanent intense

1. On a un courant I_0 qui circule dans chaque spire de section a^2 d'où $\|\vec{j}\| = \frac{I_0}{a^2}$. De plus le courant circule orthoradialement donc $\boxed{\vec{j} = \frac{I_0}{a^2}\vec{e_\theta}}$

2. On remarque que si M est un point de l'espace alors $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ est un plan de symétrie de la distribution de courants donc $\vec{B}(M)$ est normal à ce plan et $\vec{B} = B(M)\vec{e_z}$.
De plus on a invariance par translation selon $\vec{e_z}$ et par rotation d'angle θ donc $\vec{B} = B(r)\vec{e_z}$.
On considère le contour suivant avec $R_3 \gg R_2$.



On peut supposer $\vec{B}(r=R_3) \simeq \vec{0}$ car on est loin du solénoïde. Alors :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}\cdot\vec{dl} = B(r=0)\times l$$

Et : $I_{enlacé} = \iint \vec{j}\cdot\vec{dS} = \frac{I_0}{a^2}\times \underbrace{l(R_2-R_1)}_{\text{section hachurée où } \vec{j}\neq\vec{0}}$

D'où, par le théorème d'Ampère :

$$\boxed{B(r=0) = \frac{\mu_0 I_0}{a^2}(R_2-R_1)}$$

3. Il faut $I_0 = \dfrac{Ba^2}{\mu_0(R_2-R_1)} = \dfrac{1\times 10^{-6}}{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 15\cdot 10^{-2}} = \dfrac{10^3}{60\times\pi} \simeq \boxed{6\,A}$

Cette intensité est élevée et peut provoquer un échauffement de la bobine par effet Joule.

II - Utilisation d'un matériau supraconducteur

1 - Modélisation du mouvement des électrons

4. L'électron, dans le référentiel du laboratoire, est soumis à :

* son poids $\vec{P} = m_e\vec{g}$ négligeable
* la force électrique $\vec{F} = -e\vec{E}$.

Par le principe fondamental de la dynamique : $m_e\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$

5. Or $\vec{j} = -ne\vec{v}$ donc : $m_e\dfrac{\partial\vec{j}}{\partial t} = ne^2\vec{E}$

Ou encore $\boxed{\dfrac{\partial\vec{j}}{\partial t}\times\mu_0\lambda^2 = \vec{E}}$ où $\mu_0\lambda^2 = \dfrac{m_e}{ne^2}$ soit

$\boxed{\lambda = \dfrac{1}{e}\sqrt{\dfrac{m_e}{\mu_0 n}}}$ On sait que $\mu_0\vec{j}$ et $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ ont même unité donc :

$\dfrac{1}{\lambda^2}\vec{E} = \mu_0\dfrac{\partial\vec{j}}{\partial t}$ est homogène à $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

Donc $\boxed{\lambda \text{ est une distance}}$ et $\lambda \sim \dfrac{1}{1{,}6\cdot 10^{-19}}\sqrt{\dfrac{9{,}1\cdot 10^{-31}}{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10^{28}}}$

Soit $\boxed{\lambda \simeq 53\text{ nm}}$

6. On a alors, dans l'ARQS : $\vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0\vec{j}$

D'où : $\dfrac{\partial\,\vec{rot}\,\vec{B}}{\partial t} = \mu_0\dfrac{\partial\vec{j}}{\partial t} = \dfrac{1}{\lambda^2}\vec{E}$

On compose par le rotationnel et on permute $\vec{rot}$ et $\dfrac{\partial}{\partial t}$:

$\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\vec{rot}\,\vec{rot}\,\vec{B}\right) = \dfrac{1}{\lambda^2}\vec{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{1}{\lambda^2}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

Ainsi : $\boxed{\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} + \dfrac{1}{\lambda^2}\vec{B}\right) = \vec{0}}$

2 - Effet Meissner

7. Soit M un point de l'espace, alors $(M, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ est un plan d'antisymétrie de $\vec{B}_{ext}$ donc c'est aussi un plan d'antisymétrie de $\vec{B}_{int}$ et $\vec{B}$ est normal à ce plan : $\vec{B}(M) = B(M)\vec{e_z}$.
Or on a invariance par translation selon $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$ donc :

$$\boxed{\vec{B} = B(x)\,\vec{e_z}}$$

8. On a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{B}) - \vec{\Delta}\vec{B}$

Or $\text{div}\,\vec{B} = 0$ (équation de Maxwell-Thomson)

Donc : $\vec{\Delta}(\vec{B}) = \dfrac{1}{\lambda^2}\vec{B}$

Mais $\vec{\Delta}(\vec{B}) = \Delta B_z \times \vec{e_z} = B''(x)\,\vec{e_z}$ donc :

$$B''(x) - \frac{1}{\lambda^2}B(x) = 0 \Rightarrow B(x) = A\,\text{ch}\left(\frac{x}{\lambda}\right) + B\,\text{sh}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

Or on sait que $B(x = \pm d) = B_{ext}$ par continuité

Donc : $\begin{cases} A\,\text{ch}\left(\frac{d}{\lambda}\right) + B\,\text{sh}\left(\frac{d}{\lambda}\right) = B_{ext} \\ A\,\text{ch}\left(\frac{d}{\lambda}\right) - B\,\text{sh}\left(\frac{d}{\lambda}\right) = B_{ext} \end{cases}$

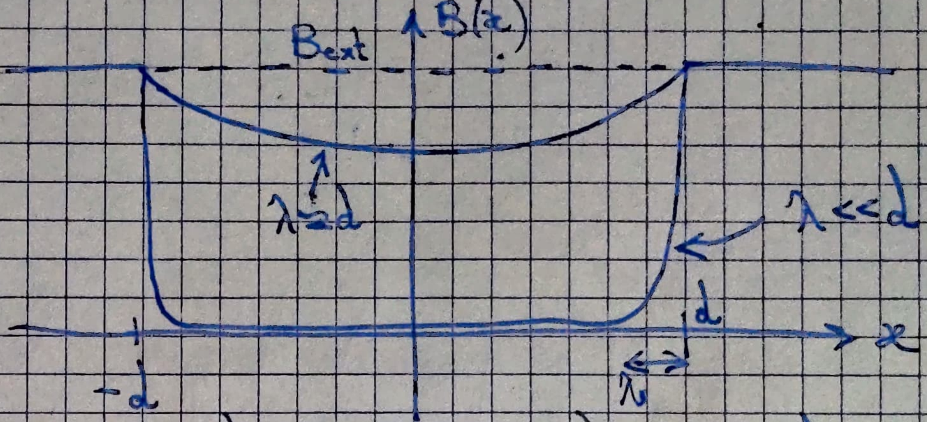
Soit $A = \dfrac{B_{ext}}{\text{ch}\left(\frac{d}{\lambda}\right)}$ et : $\boxed{B(x) = B_{ext}\cdot\dfrac{\text{ch}\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\text{ch}\left(\frac{d}{\lambda}\right)}}$

λ est la distance caractéristique à laquelle pénètre B_{ext} dans le supraconducteur.

9. $B(x=0) = \dfrac{B_{ext}}{\text{ch}\left(\frac{d}{\lambda}\right)}$. Si $\lambda \simeq d$ alors $B(x=0) \lesssim B_{ext}$

Si $\lambda \ll d$ alors $B(x=0) \ll B_{ext}$.

D'où l'allure suivante :

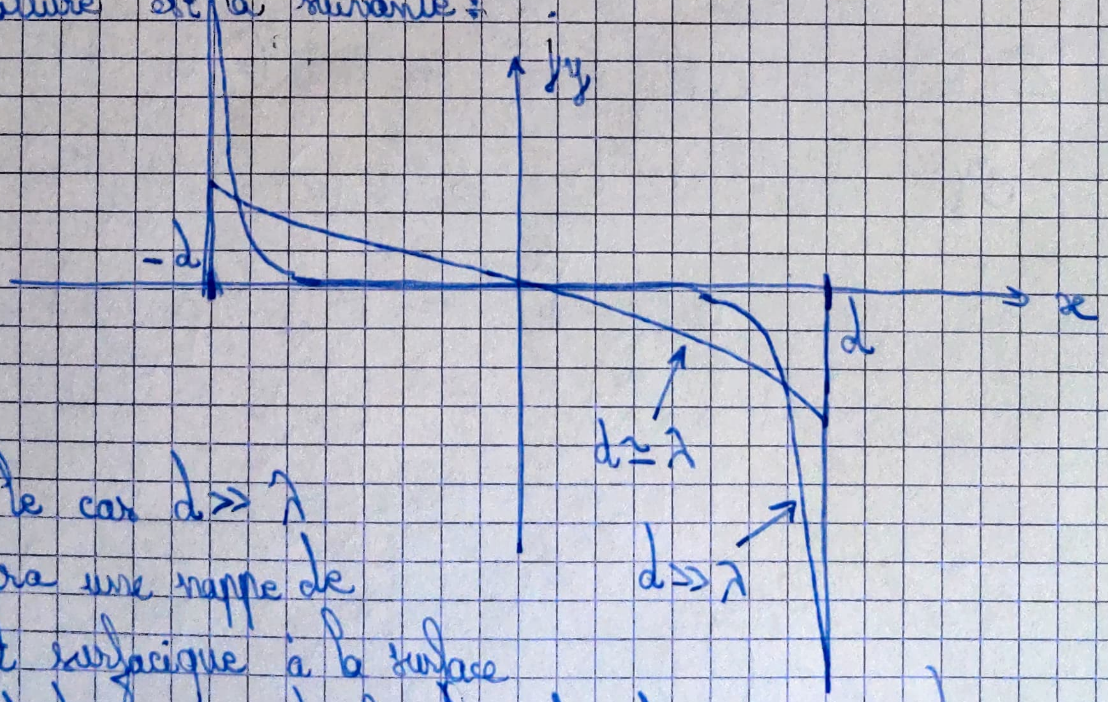


Dès que $ch\left(\frac{d}{\lambda}\right) \gg 1$ (soit $\boxed{d \gtrsim 3\lambda}$) on peut considérer que $B(x=0) \ll B_{ext}$ et on a un effet Meissner.

10. On a $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$. Or $\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = -\frac{\partial B_z}{\partial x}\vec{e_y}$

D'où $\vec{j} = -\frac{1}{\mu_0}B'(x)\,\vec{u_y} = \boxed{-\frac{1}{\mu_0\lambda}B_{ext}\cdot\frac{sh\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{ch\left(\frac{d}{\lambda}\right)}\vec{u_y}}$

L'allure est la suivante :



Dans le cas $d \gg \lambda$
on aura une nappe de
courant surfacique à la surface
du conducteur qui vient l'isoler du champ magnétique.