

I - Conduction électrique

1 - Paramètres

1  $j(r)$  est une densité volumique de courant en  $A \cdot m^{-2}$ .

On a par ailleurs, en raison de l'invariance du problème par rotation autour de l'axe de la foudre, que  $j$  ne dépend pas de  $\varphi$ . L'énoncé suggère que  $j$  ne dépend pas non plus de  $z$ , donc:

$$I = \int_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 2\pi r_0^2 j(r)$$

où  $\mathcal{V}$  est la demi-sphère de rayon  $r_0$  pour  $z < 0$ . On en déduit que:

$$j(r) = \frac{I}{2\pi r_0^2}$$

2 Par la loi d'Ohm, on a dans le métal  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ . On en déduit, comme  $\vec{j} = j(r) \vec{e}_r$ , que:

$$\vec{E} = \frac{I}{2\pi r_0^2 \gamma_m} \vec{e}_r$$

3 La différence de potentiel aux bornes de la résistance métallique vaut:  $V_a - V_b = - \int_{r_b}^{r_a} \vec{E} \cdot d\vec{l}$  car  $\vec{E} = - \text{grad } V$  et par théorème du gradient

$$= - \int_{r_b}^{r_a} \frac{I}{2\pi r_0^2 \gamma_m} dr$$
$$= \frac{I}{2\pi \gamma_m} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

On retrouve la loi d'Ohm macroscopique avec  $V_a - V_b = R_m I$

$$R_m = \frac{1}{2\pi \gamma_m} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

4 On peut faire le même raisonnement pour la résistance du sol.

en remplaçant  $r_a$  par  $r_b$  (limite intérieure) et  $r_b$  par  $+\infty$  (limite extérieure), on trouve alors:

$$R_b = \frac{1}{2\pi\gamma r_b}$$

5. Les deux résistances sont traversées par un même courant donc en série, on en déduit:  $R_{\text{serie}} = R_m + R_b = \frac{1}{2\pi\gamma} \left( \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_m} \right)$

6. Après conversion en unités SI on trouve  $R_{\text{serie}} = 7,7 \Omega$  ce qui est conforme aux règles de sécurité. Si ce n'était pas le cas, on pourrait augmenter le rayon  $r_b$  ce qui permet de diminuer la résistance.

## 2 - Étude d'un conducteur ohmique torique

1. Il s'agit de la permittivité diélectrique du vide qui se mesure en  $F \cdot m^{-1}$ .

2. La conservation de la charge impose  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$ .

Or  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ , en supposant  $\gamma$  uniforme on a donc:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\gamma \text{div}(\vec{E}) = -\frac{\gamma}{\epsilon_0} \times \rho$$

On constate que  $\rho$  s'atténue exponentiellement en fonction du temps avec un temps caractéristique  $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma} = 8,85 \cdot 10^{-20} \text{ s}$ .

Tant que la période  $T$  de variation des champs vérifie  $T \gg \tau$  (ce qui n'est pas très restrictif) on peut donc supposer  $\rho \approx 0$ .

3. On a par l'équation de Maxwell-Ampère:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{B}) &= \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \gamma \left( \vec{E} + \frac{\epsilon_0}{\gamma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ &= \mu_0 \gamma \left( \vec{E} + \tau \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Or  $\left\| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| \approx \frac{\|\vec{E}\|}{T}$  donc  $\left\| \tau \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| \ll \|\vec{E}\|$  et on peut négliger

le courant de déplacement dans l'équation de Maxwell-Ampère: c'est l'approximation des régimes quasi stationnaires.

4. On a  $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \approx 0$  par l'équation de Maxwell-Gauss et Q2.

De plus dans le cadre de l'ARQS on peut écrire  $\vec{E} = -\text{grad}(V)$  donc  $\text{div}(\text{grad}(V)) = 0$  soit:  $\Delta V = 0$ .

5. On a alors en utilisant l'expression du Laplacien en coordonnées cylindriques:  $\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = 0$  d'où  $V(\vartheta) = A \cdot \vartheta + B$  où A et B sont des constantes; les conditions aux limites fournissent:

$$V(\vartheta) = U \left(1 - \frac{\vartheta}{\alpha}\right)$$

On a alors  $\vec{E} = -\text{grad} V = -\frac{1}{r} \frac{dV}{d\vartheta} \vec{e}_\vartheta = +\frac{U}{\alpha r} \vec{e}_\vartheta$

Et  $\vec{j} = \gamma \vec{E} = \frac{\gamma U}{\alpha r} \vec{e}_\vartheta$  par la loi d'Ohm.

6. L'intensité totale traversant une telle section S est le flux de  $\vec{j}$  à travers S qui se calcule sur des tranches élémentaires entre  $r=a$  et  $r=b$ .

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_a^b \underbrace{c dr}_{\text{surface de la tranche}} \times \vec{j}(r) \cdot \vec{e}_\vartheta = \frac{\gamma U c}{\alpha} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\gamma U c}{\alpha} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Or  $U = RI$  donc:  $R = \frac{\alpha}{\gamma c \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

7. Pour un conducteur filiforme on a  $R = \frac{L}{\gamma S}$ . Ceci est cohérent avec la formule pour le tore, en effet si  $b-a \ll a$  alors  $\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln\left(1 + \frac{b-a}{a}\right) \approx \frac{b-a}{a}$  et on en déduit que  $R = \frac{\alpha \cdot a}{\gamma c (b-a)} = \frac{L}{\gamma S}$  avec  $\begin{cases} L = \alpha a \\ S = c(b-a) \end{cases}$

### B - Effet Hall dans un semiconducteur

a. Dans le référentiel du matériau, supposé galiléen, on applique le PFD à un électron soumis à son poids négligeable, la force de Coulomb  $\vec{F}_c = -e\vec{E}$  et la force de frottement:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha\vec{v} - e\vec{E}$$

b. Si  $\vec{E} = \vec{0}$  alors  $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = \vec{0}$  avec  $\tau = \frac{m}{\alpha}$ .

On en déduit  $\vec{v}(t) = \vec{v}(t=0)e^{-t/\tau}$ :  $\tau$  est le temps caractéristique de décroissance de la vitesse de l'électron.

En régime stationnaire le résultat de 1a devient:  $\vec{v} = -\frac{e}{\alpha}\vec{E}$ .

On en déduit la densité volumique de courant  $\vec{j} = -ne\vec{v} = \frac{ne^2}{\alpha}\vec{E}$

On retrouve la loi d'Ohm locale avec  $\gamma = \frac{ne^2}{\alpha}$

c. On a  $\alpha = \frac{m}{\tau}$  donc  $\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}$

On a:  $\tau = \frac{m\gamma}{ne^2} = 0,06 \frac{m_e\gamma}{m_e e^2} = 2,1 \cdot 10^{-16} \text{ s}$

a. Soit  $M$  un point de l'espace, le plan  $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$  est un plan de symétrie de la distribution de courants donc  $\vec{B}(M)$  est normal à ce plan:  $\vec{B} = B(M)\vec{e}_z$ .

De plus on a invariance par translation selon  $x$  et  $y$  donc on a

$$\vec{B} = B(z)\vec{e}_z$$

Enfin  $(Oxy)$  est un plan de symétrie de la distribution de courants, donc  $\vec{B}(z=0)$  est orthogonal à ce plan, ce qui n'est possible que si  $\vec{B}(z=0) = \vec{0}$  (car  $\vec{B}(z=0) = B(z=0)\vec{e}_z$ ).

b. La forme locale du théorème d'Ampère (en régime stationnaire) s'écrit  $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$ . Or  $\text{rot}(\vec{B}) = -\frac{\partial B_z}{\partial z} \vec{e}_x = -\frac{dB_z}{dz} \vec{e}_x$ .  
Dans la nappe  $\vec{j}$  est uniforme et vaut  $\vec{j} = J\vec{e}_x$ . On a donc

$\frac{dB}{dz} = -\mu_0 J$  et  $B(z=0) = 0$  d'où  $B(z) = -\mu_0 J z$  dans le matériau.  
 À l'extérieur du matériau  $J = \vec{0}$  donc  $\frac{dB}{dz} = 0$  et  $\vec{B}$  est uniforme.

Ainsi:

$$\vec{B}(z) = \begin{cases} +\mu_0 J \frac{a}{2} \vec{e}_x & \text{si } z < -\frac{a}{2} \\ -\mu_0 J z \vec{e}_x & \text{si } -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2} \\ -\mu_0 J \frac{a}{2} \vec{e}_x & \text{si } z > \frac{a}{2} \end{cases}$$

On a comme champ maximal  $\|\vec{B}\|_{\max} = \frac{\mu_0 J a}{2} = \boxed{0,3 \cdot 10^{-6} \text{ T}}$

4. a. L'électron est désormais soumis à la force magnétique de Lorentz  $\vec{F}_m = -e \vec{v} \wedge \vec{B}$  et à la force de frottement, en reprenant la 01a on trouve  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{v} \wedge \vec{B} - \alpha \vec{v}$ .

Où encore:  $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{eB}{m} \vec{v} \wedge \vec{u}_z$

b. Si  $\tau \rightarrow \infty$  on aura  $\frac{1}{\tau} \rightarrow 0$  et  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{eB}{m} \vec{u}_z \wedge \vec{v}$ .

On obtient donc, en posant  $\omega_c = \frac{eB}{m}$  une équation de rotation  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \omega_c \vec{u}_z \wedge \vec{v}$  soit  $\begin{cases} \dot{v}_x = -\omega_c v_y \\ \dot{v}_y = +\omega_c v_x \end{cases}$

D'où  $\ddot{v}_x + \omega_c^2 v_x = 0$  et  $\ddot{v}_y + \omega_c^2 v_y = 0$

$\Rightarrow v_x = v_0 \cos(\omega_c t + \varphi_0)$  et  $v_y = v_0 \sin(\omega_c t + \varphi_0)$ .

$\vec{v}$  est bien un vecteur tournant de vecteur rotation  $\omega_c \vec{u}_z$ .

On a  $\omega_c = \frac{eB}{m} \approx 2,9 \cdot 10^{12} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  pour  $B = 1 \text{ T}$

5. On a désormais une force électrique qui s'ajoute au champ magnétique si bien que:  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha \vec{v} - e \vec{v} \wedge \vec{B} - e \vec{E}$

En régime stationnaire:  $\alpha \vec{v} + e \vec{v} \wedge \vec{B} = -e \vec{E}$

Où encore:  $\vec{E} = -\frac{\alpha}{e} \vec{v} - \vec{v} \wedge \vec{B}$

Or  $\vec{J} = -ne\vec{v}$  d'où  $\vec{v} = -\frac{1}{ne}\vec{J}$  et:

$$\vec{E} = \frac{\alpha}{ne^2}\vec{J} + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{ne} \quad \text{avec } \gamma = \frac{ne^2}{\alpha} \text{ et } \vec{B} = B\vec{e}_y$$

On projette:

$$\begin{cases} E_x = \frac{1}{\gamma} J_x + \frac{B}{ne} J_y \\ E_y = \frac{1}{\gamma} J_y - \frac{B}{ne} J_x \end{cases}$$

On trouve bien l'équation matricielle à démanteler.

6. Pour trouver la résistance de l'échantillon selon  $\vec{e}_x$ , on utilise la formule donnant la résistance en fonction de l'épaisseur et de la section:

$$R = \frac{L}{\gamma \cdot ab} \quad \text{Or en présence de champ } \vec{B} \text{ on a:}$$

$$E_x = \frac{1}{\gamma} J_x + \frac{B}{ne} J_y \quad \text{d'où la différence de potentiel}$$

$$U = \int_0^L E_x dx = \frac{L}{\gamma} J_x + \frac{BL}{ne} J_y$$

De plus on sait que  $\vec{E} = E\vec{e}_x$  donc  $E_y = -\frac{B}{ne} J_x + \frac{1}{\gamma} J_y = 0$

$$\text{Ainsi } J_y = \frac{\gamma B}{ne} J_x \text{ et } U = \left( \frac{L}{\gamma} + \frac{\gamma B^2}{(ne)^2} \right) J_x \cdot \frac{Em}{ab}$$

$$\text{utilisant } J_x = \frac{I}{ab} \text{ on trouve finalement } R = \frac{L}{\gamma ab} \left( 1 + \left( \frac{\gamma B}{ne} \right)^2 \right)$$

Le champ magnétique augmente la résistance de l'échantillon avec une modification relative:  $\frac{\Delta R}{R} = \left( \frac{\gamma B}{ne} \right)^2 \approx 3,9 \cdot 10^{-7}$

7. a. La nouvelle géométrie du conducteur impose  $\vec{J} = J\vec{e}_x$  comme indiqué par l'énoncé, ce qui impose  $J_y = 0$  et:

$$\begin{cases} E_x = \frac{1}{\gamma} J \\ E_y = -\frac{B}{ne} J \end{cases}$$

On a donc une composante  $E_y$  non nulle.

$$\text{b. On a donc } V_H = V(y=l) - V(y=0) = - \int_0^l E_y \cdot dy = \frac{Bl}{ne} J$$

Or on a toujours  $J = \frac{I}{a \cdot b}$  donc.

$$V_H = \frac{B}{n e a} \cdot I$$

On trouve numériquement  $V_H = 0,62 \text{ mV}$ . Ce dispositif permet de mesurer le champ magnétique, c'est le principe de fonctionnement du teslamètre.

8. a. On a alors une résistance transverse:

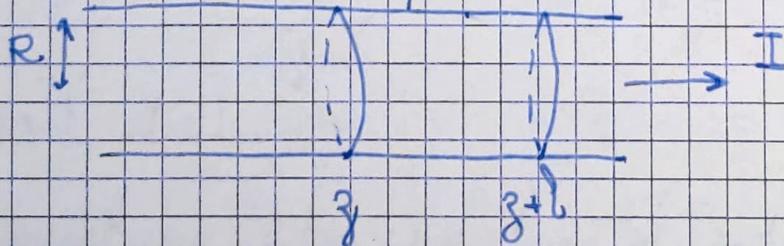
$$R_T = \frac{V_H}{I} = \frac{B}{n e a} = \frac{B}{e a} \times \frac{a b}{\mu e B} = \frac{h}{\mu e^2} = \frac{R_K}{\mu}$$

$$\text{avec } R_K = \frac{h}{e^2} = 25,8 \text{ k}\Omega.$$

b. Cette résistance ne dépend que de constantes fondamentales et n'est donc pas sensible à un défaut de construction ou de montage expérimental, elle est ainsi idéale pour l'étalonnage.

## II - Bilan énergétique dans un conducteur

### 4 - Bilan sur un fil électrique



1. On étudie une portion de conducteur entre  $z$  et  $z+l$ . Dans le conducteur, par la loi d'Ohm:  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ .

Or la puissance volumique dissipée est  $p_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\gamma}$ .

On en déduit la puissance totale dissipée  $P_{\text{Totale}} = \frac{j^2}{\gamma} \times \underbrace{\mu R^2 l}_{\text{volume de conducteur}}$ .

2. On cherche le champ magnétique  $\vec{B}$  associé à cette situation. Le problème est invariant par rotation autour de  $(O_z)$  et translation.

selon z. De plus si M est un point de l'espace  $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$  est un plan de symétrie de la distribution de courants donc  $\vec{B}(M)$  est normal à ce plan, ainsi  $\vec{B} = B(r) \vec{e}_z$ .

Par ailleurs on est en régime stationnaire donc on peut appliquer le théorème d'Ampère, on prend pour contour un cercle d'axe  $(Oz)$  et de rayon  $r$ :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{\text{enc}} = \underbrace{\mu_0 j r^2}_{(si r \leq R)}$$

D'où  $B(r) = \frac{\mu_0 j r}{2}$  pour  $r \leq R$ .

Et  $\vec{E} = \frac{1}{\sigma} \vec{j}$ .

On en déduit le vecteur de Poynting:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} j \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_z = - \frac{j^2 r}{2\sigma} \vec{e}_r$$

Le flux de  $\vec{\Pi}$  à travers la surface latérale en  $r = R$  correspond à la puissance sortant du fil:

$$P_{\text{sortante}} = \int_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \underbrace{2\pi R L}_{\text{surface}} \times \frac{j^2 R}{2\sigma} = - \pi R^2 L \frac{j^2}{\sigma}$$

D'où  $P_{\text{sortante}} = - P_{\text{ Joule }}$ ; ainsi toute l'énergie dissipée par effet Joule dans le conducteur entre sous forme de rayonnement par la face latérale du fil.

## 5 - Fonctionnement d'un fusible

1. D'après la loi de Fourier, la densité de flux thermique s'écrit  $\vec{j}_{th} = - \lambda \text{grad}(T)$  lorsque les gradients de température ne sont pas trop forts.  $T$  est la température du milieu.  $j_{th}$  se mesure en  $W \cdot m^{-2}$ ;  $T$  en K et  $\lambda$  en  $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ .

2. On réalise un bilan sur une tranche de fil métallique entre  $x$  et  $x+dx$ .



On applique le premier principe à la tranche :  $dU = \delta W + \delta Q$

Ici  $dU = \underbrace{\mu S dx}_{\text{capacité thermique de la tranche}} \times c \times (T(x, t+dt) - T(x, t)).$

De plus  $\delta W = 0$  car la tranche est indéformable.

Enfin :  $\delta Q = \underbrace{j_{th}(x) S dt}_{\text{flux entrant en } x} - \underbrace{j_{th}(x+dx) S dt}_{\text{flux sortant en } x+dx} + \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{E} \cdot S dx dt}_{\text{production d'énergie thermique par effet Joule}}$

Or  $\vec{j} = \frac{I}{S} \vec{e}_x$  et  $\vec{E} = \frac{1}{\sigma} \vec{j}$  par la loi d'Ohm donc

$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{I^2}{\sigma S^2}$  et  $\delta Q = \left( - \frac{\partial j_{th}}{\partial x} + \frac{I^2}{\sigma S^2} \right) S dx dt$

On conclut que  $\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial j_{th}}{\partial x} + \frac{I^2}{\sigma S^2}$

ou encore, en utilisant la loi de Fourier :  $j_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ , on a :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{I^2}{\sigma S^2}$$

3. En régime stationnaire  $\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{I^2}{\sigma S^2} = 0$

D'où  $\frac{d^2 T}{dx^2} = - \frac{I^2}{\lambda \sigma S^2}$  et  $T(x) = A + Bx - \frac{I^2 x^2}{2 \lambda \sigma S^2}$

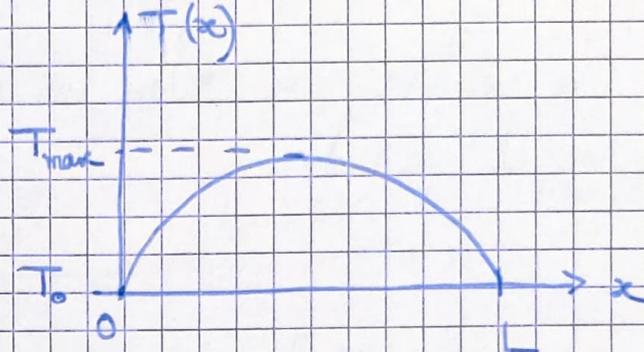
où  $A, B$  sont des constantes d'intégration.

Or  $T(x=0) = T_0$  donc  $A = T_0$

$T(x=L) = T_0$  donc  $B = + \frac{I^2 L}{\lambda \sigma S^2}$  et on conclut

que

$$T(x) = T_0 + \frac{I^2 x(L-x)}{\lambda \sigma L^2}$$



4. On aura fusion lorsque  $T_{max} \geq T_f$  soit :

$$T_0 + \frac{I^2 \times \frac{L^2}{4}}{\lambda \sigma L^2} \geq T_f \quad \text{ou encore} \quad I \geq I_{max} \quad \text{avec}$$

$$I_{max} = 2 \sqrt{\lambda \sigma (T_f - T_0)}$$

Si  $I \geq I_{max}$  on aura fusion

au point de température maximale c'est-à-dire en  $x_f = \frac{L}{2}$ .

### III - Réflexion sur un conducteur

#### 6 - Effet de peau

1.  $S = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \gamma \omega}}$  est homogène à une longueur. En effet

on peut écrire  $\gamma = \frac{n^2 \epsilon}{m}$  avec le modèle de Drude donc

$$[\gamma] = \frac{m^{-3} \cdot C^2 \cdot s}{kg} \quad \text{et} \quad \mu_0 = \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \quad \text{avec} \quad \epsilon_0 = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

si bien que  $\mu_0$  est homogène à  $\frac{\epsilon_0 q^2}{c^2 q^2}$  soit :

$$[\mu_0] = \frac{m \cdot J}{m^2 \cdot s^{-2} \cdot C^2} = \frac{m \cdot kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}{m^2 \cdot s^{-2} \cdot C^2} = kg \cdot m \cdot C^{-2}$$

Et  $[\omega] = s^{-1}$  donc  $[S] = \sqrt{\frac{kg}{m^3 \cdot C^2 \cdot s^{-1} \cdot kg \cdot m \cdot C^{-2} \cdot s^{-1}}} = m$

Avec les valeurs numériques de l'énoncé et  $\omega = 2\pi f$  on trouve  $S = 1,1 \text{ mm}$

2. Le courant oscillant produit un champ magnétique variable dans

le conducteur ce qui va générer un champ électrique par induction. Ce champ va produire des courants dans le conducteur et de l'énergie sera dissipée par effet Joule ce qui chauffe le cylindre.

3. Dans le cylindre l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left( \gamma \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \text{ par la}$$

loi d'Ohm. Or :  $\|\gamma \vec{E}\| = \gamma \|\vec{E}\|$

$$\|\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\| \approx \epsilon_0 \cdot \omega \cdot \|\vec{E}\| \approx 2\pi f \epsilon_0 \|\vec{E}\|$$

D'où :  $\frac{\|\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|}{\|\gamma \vec{E}\|} \approx \frac{\epsilon_0 2\pi f}{\gamma} \approx 5 \cdot 10^{-16}$  donc le second terme

est négligeable et on peut écrire  $\boxed{\text{rot} \vec{B} \approx \mu_0 \gamma \vec{E}}$

On prend le rotationnel de cette équation et on utilise l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot} \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \gamma \text{rot} \vec{E} = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Or } \text{rot} \text{rot} \vec{B} = \text{grad} \text{div} \vec{B} - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B} = 0 \text{ (équation de Maxwell-Thomson)}$$

On conclut que :  $\boxed{\Delta \vec{B} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$

4. Soit M un point du cylindre. Le plan contenant M et normal à  $(Oz)$  est un plan de symétrie de la distribution de courants donc  $\vec{B}(M)$  est normal à ce plan. De plus on a invariance par translation selon  $\vec{e}_z$  et rotation autour de  $(Oz)$  donc :  $\boxed{\vec{B} = B(r) \vec{e}_z}$

On en déduit que  $\Delta \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B}{\partial r} \right) \vec{e}_z$

D'où :  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B}{\partial r} \right) = \mu_0 \gamma \frac{\partial B}{\partial t}$

On passe en complexes  $\vec{B} = \underline{B}(r) e^{i\omega t} \vec{e}_\phi$ , donc:

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dB}{dr} \right) = i \mu_0 \gamma \omega B = \frac{\omega}{s^2} B$$

Par ailleurs  $\mu = \frac{\mu_0}{s}$ , alors  $dr = s du$  et on trouve:

$$\frac{d}{du} \left( u \frac{dB}{du} \right) = i u B$$

5. On conclut que  $\underline{B} = \text{ber}\left(\frac{r}{s}\right) + i \text{bei}\left(\frac{r}{s}\right)$

Soit  $\|\vec{B}\|^2 = \text{ber}\left(\frac{r}{s}\right)^2 + \text{bei}\left(\frac{r}{s}\right)^2$ . Le champ magnétique est donc concentré sur les bords du cylindre là où la fonction de Bessel-Kelvin est maximale.

Comme on a vu que  $\text{rot}(\vec{B}) \approx \mu_0 \vec{j}$ , les courants sont aussi localisés là où le champ magnétique est présent donc au bord du cylindre, dans une couche d'épaisseur  $3s$  environ: c'est l'effet de peau.

### 7 - Polarisation par réflexion

1. a. Cette onde obéit à l'équation de d'Alembert:

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

b. On a alors  $\vec{E} = E_0 (\cos(\omega t - kx) \vec{u}_y + \sin(\omega t - kx) \vec{u}_z)$

c. On réinjecte dans l'équation de d'Alembert, on a:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -E_0 \omega^2 (\cos(\omega t - kx) \vec{u}_y + \sin(\omega t - kx) \vec{u}_z)$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= \Delta E_y \vec{u}_y + \Delta E_z \vec{u}_z \\ &= -E_0 k^2 (\cos(\omega t - kx) \vec{u}_y + \sin(\omega t - kx) \vec{u}_z) \end{aligned}$$

On conclut que  $-k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}$  d'où  $\boxed{\omega = kc}$ .

d. On utilise la relation de structure pour une onde plane:

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u}_x \wedge \vec{E} = \frac{E_0}{c} (-\sin(\omega t - kx) \vec{u}_y + \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z)$$

2. a. On a continuité du champ électrique tangentiel et le champ électrique est nul dans le conducteur parfait donc on peut écrire que  $E_y(x=0^-) = E_z(x=0^-) = 0$ .

b. On note l'onde réfléchie  $\vec{E}_r = E_{r2}^y \cos(\omega t + kx + \varphi) \vec{u}_y + E_{r2}^z \cos(\omega t + kx + \varphi) \vec{u}_z$

(forme générale pour une onde plane progressive harmonique).

Alors en  $x = 0^-$  on trouve:

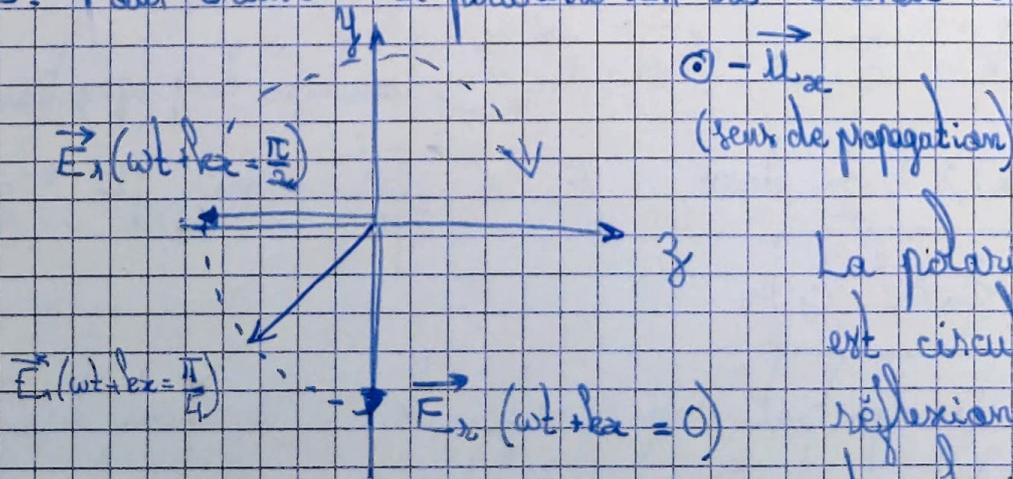
$$\begin{cases} E_0 \cos(\omega t) + E_{r2}^y \cos(\omega t + \varphi) = 0 \\ E_0 \sin(\omega t) + E_{r2}^z \cos(\omega t + \varphi) = 0 \end{cases} \quad \forall t$$

les déphasages  $\varphi$  et  $\varphi$  sont donc tels que  $\begin{cases} \cos(\omega t + \varphi) = -\cos \omega t \\ \cos(\omega t + \varphi) = -\sin \omega t \end{cases}$

et  $E_{r2}^y = E_{r2}^z = E_0$ . Ainsi:

$$\vec{E}_r = -E_0 (\cos(\omega t + kx) \vec{u}_y + \sin(\omega t + kx) \vec{u}_z)$$

c. Pour trouver la polarisation de l'onde on fait un schéma:



La polarisation de l'onde est circulaire droite: la réflexion inverse la direction de polarisation.

d. Le champ magnétique associé à cette onde est donné par la relation de structure:  $\vec{B}_r = \frac{-\vec{u}_x \wedge \vec{E}_r}{c}$  d'où

$$\vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \left( -\sin(\omega t + kx) \vec{u}_y + \cos(\omega t + kx) \vec{u}_z \right)$$

On constate que en  $x=0^-$ :

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{tot}}(x=0^-) &= \vec{B}_i(x=0) + \vec{B}_r(x=0^-) \\ &= \frac{2E_0}{c} \left( -\sin(\omega t) \vec{u}_y + \cos(\omega t) \vec{u}_z \right) \end{aligned}$$

Or  $\vec{B}_{\text{tot}}(x=0^+) = \vec{0}$  car on a un conducteur parfait.

Donc le champ magnétique est discontinu et on aura des courants superficiels à l'interface.

## 8 - Pression de radiation

1. Par définition l'éclairement est la moyenne du vecteur de Poynting. Ici on utilise la définition de  $\vec{\Pi}$  et la relation de structure d'une onde plane:

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c} = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E} \wedge (\vec{e}_x \wedge \vec{E}) \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} \left[ \vec{E}^2 \cdot \vec{e}_x - \underbrace{(\vec{E} \cdot \vec{e}_x)}_{=0} \vec{E} \right] = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{e}_x \end{aligned}$$

D'où l'éclairement  $\mathcal{E} = \langle \vec{\Pi} \cdot \vec{e}_x \rangle$  direction de propagation

$$\text{Or } \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{2} \text{ donc } \mathcal{E} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \text{ mais } \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$$

$$\text{d'où } \boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \cdot c}$$

2. Chaque photon transportant une énergie  $h\nu$ , on peut dire que le nombre de photons traversant la surface par unité de temps correspond à l'énergie traversant cette surface divisée par l'énergie d'un photon:

$$N_0 = \frac{\mathcal{E}}{h\nu}$$

b. Lors d'un choc, le photon qui avait une quantité de mouvement  $\vec{p}_i = \hbar \vec{k} = \hbar k \vec{e}_x$  initialement a une quantité de mouvement finale  $\vec{p}_f = -\hbar k \vec{e}_x$ . Par conservation de la quantité de mouvement :

$$\Delta \vec{p}_{\text{photon}} + \Delta \vec{p}_{\text{paroi}} = \vec{0}$$

Donc 
$$\Delta \vec{p}_{\text{paroi}} = -(\vec{p}_f - \vec{p}_i) = 2\hbar k \vec{e}_x.$$

c. On en déduit que la quantité de mouvement reçue par la paroi pendant  $dt$  est :

$$d\vec{p}_{\text{paroi}} = \underbrace{N_0 S dt}_{\text{nombre de photons incidents}} \times \underbrace{2\hbar k \vec{e}_x}_{\text{quantité de mot. reçue par chaque photon}}$$

On conclut que 
$$\frac{d\vec{p}_{\text{paroi}}}{dt} = 2\hbar k N_0 S \vec{e}_x$$

Or la paroi n'est soumise, dans le référentiel terrestre galiléen, qu'à la force de l'onde incidente  $\vec{F}$ , en lui appliquant le principe fondamental de la dynamique on a  $\frac{d\vec{p}_{\text{paroi}}}{dt} = \vec{F}$  et on

conclut que : 
$$\vec{F} = 2\hbar k N_0 S \vec{e}_x$$

d. La pression est la composante normale de la force par unité de surface :

$$p = \frac{\vec{F} \cdot \vec{e}_x}{S} = 2\hbar k N_0 = 2\hbar k \times \frac{E}{h\nu}$$

Or  $k = \frac{\omega}{c}$  (relation de dispersion pour une onde plane)

et  $\frac{\hbar \omega}{h\nu} = \frac{\hbar \omega}{2\pi \hbar \nu} = \frac{1}{\omega}$  donc 
$$p = \frac{2E}{c}, \text{ ou encore :}$$

$$p = \epsilon_0 E_0^2$$

3. a. Si la paroi est parfaitement absorbante il n'y a pas de photon réfléchi et  $\vec{p}_f = \vec{0}$  alors  $\Delta \vec{p}_{\text{paroi}} = \hbar k \vec{e}_x$  et toutes les quantités  $(\vec{F}, p)$  sont divisées par 2 :

$$p = \frac{E}{c} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$$

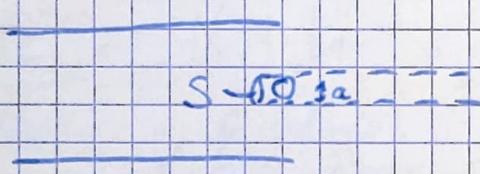
4. Pour ce laser on a  $P = E \times \underbrace{\pi \frac{d^2}{4}}_{\text{surface du faisceau}}$

D'où  $E = \frac{P}{\pi \frac{d^2}{4}} = 5,1 \text{ MW} \cdot \text{m}^{-2}$

Alors  $E_0 = \sqrt{\frac{2E}{\epsilon_0 c}} = 6,2 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

Et  $p = \frac{E_0^2}{c} = \boxed{0,017 \text{ Pa}}$

4.



La sphère subit la pression agissant sur la section  $S = \pi a^2$

D'où  $\vec{F} = \pi a^2 \times p \times \vec{e}_x = \pi a^2 \frac{E}{c} \vec{e}_x$

5. L'éclairement du soleil se répartit sur une surface totale  $\Sigma = 4\pi D^2$  donc  $P_0 = 4\pi D^2 \times E = 4,0 \cdot 10^{26} \text{ W}$

L'éclairement à une distance  $r_0$  du soleil vaut alors  $E(r) = \frac{P_0}{4\pi r_0^2}$

L'objet subit donc une force liée à la pression de radiation:

$\vec{F}_{\text{rad}} = \frac{\pi a^2}{c} E(r) \vec{e}_x = \frac{P_0 a^2}{4c r_0^2} \vec{e}_x$

Il subit également la force de gravitation:

$\vec{F}_g = -G \frac{M_s m_b}{r_0^2} \vec{e}_x = -\frac{4\pi G M_s \mu \pi a^3}{3 r_0^2} \vec{e}_x$

car  $m = \mu \times \frac{4}{3} \pi a^3$

Ainsi:

$\frac{\|\vec{F}_{\text{rad}}\|}{\|\vec{F}_g\|} = \frac{P_0 a^2}{4c r_0^2} \cdot \frac{3r_0^2}{4\pi G M_s \mu a^3}$

$= \frac{3P_0}{16\pi G c M_s \mu a} = \begin{cases} 2 \cdot 10^{-7} & \text{pour la météorite} \\ 0,6 & \text{pour la poussière} \end{cases}$

Cette force est négligeable pour la météorite mais pas pour la

poussière qui subit une force totale plus faible du soleil (60% de l'attraction gravitationnelle est compensée par la pression de radiation).

## IV - Cavité électromagnétique

### 9 - Étude d'une cavité

1. D'après cette relation de passage on a continuité du champ électrique tangentiel, ainsi ici comme  $\vec{E}$  est purement tangentiel (à l'axe  $\vec{E}_z$ ) il s'annule en  $x=0$  et  $x=L$ :

$$E_z(x=0) = E_z(x=L) = 0$$

2. On en déduit  $(E_1 e^{-ika} + E_2 e^{ika}) e^{i\omega t} = 0$  en  $\begin{cases} x=0 \\ x=L \end{cases}$

D'où :

$$\begin{cases} E_1 + E_2 = 0 & (1) \\ E_1 e^{-ikL} + E_2 e^{ikL} = 0 & (2) \end{cases}$$

Ainsi  $E_2 = -E_1$  et (2) devient  $2i E_1 \sin(kL) = 0$ .

Ceci implique qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $kL = n\pi$

Or  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c}$  donc  $\frac{2\pi f L}{c} = n\pi$ . Les

fréquences de la cavité sont donc quantifiées:  $f = n f_1$ ,

avec  $f_1 = \frac{c}{2L}$

3. a. On a alors  $\vec{E}_r(x,t) = E_1 e^{i\omega t} (e^{-ika} - e^{ika}) \vec{e}_z$   
 $= -2i E_1 e^{i\omega t} \sin(kx) \vec{e}_z$   
 $= -2i E_1 e^{i\omega t} \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \vec{e}_z$

b. On a un découplage entre les variables de temps et d'espace, en effet en passant en réels:  $\vec{E}_r = 2E_1 \sin(\omega t) \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \vec{e}_z$

$$c: \text{On a } \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) = 0 \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}, n\pi \frac{x}{L} = p\pi$$

$$\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}, x = \frac{p}{n} \times L$$

$$\Leftrightarrow \exists p \in [0, n], x = \frac{p}{n} L \quad \text{car } x \leq L$$

On a des positions  $x_p = \frac{p}{n} L$  telles que  $\vec{E}_n(x = x_p) = \vec{0}$

Ces positions sont séparées d'une distance  $x_{p+1} - x_p = \frac{L}{n}$

d. Cette onde étant une somme de deux ondes progressives se propageant selon  $+\vec{e}_x$  et  $-\vec{e}_x$  on applique la relation de structure à chacune d'entre elles:

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}_1}{c} + \frac{-\vec{e}_x \wedge \vec{E}_2}{c}$$

$$= -\frac{E_1}{c} e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y + \frac{E_2}{c} e^{i(\omega t + kx)} \vec{e}_y$$

$$= -\frac{E_1}{c} e^{i\omega t} \vec{e}_y \left( e^{-ikx} + e^{ikx} \right) \quad \text{car } E_2 = -E_1$$

$$= -\frac{2E_1}{c} e^{i\omega t} \cos(kx) \vec{e}_y$$

$$\text{D'où } \vec{B}_n = -\frac{2E_1}{c} \cos(\omega t) \cos\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \vec{e}_y$$

$\vec{B}_n$  est constamment nul aux points  $x_p$  tels que  $\cos\left(n\pi \frac{x_p}{L}\right) = 0$

soit  $x_p' = \frac{2p+1}{2n} L$  avec  $p \in [0, n-1]$ .

## 10 - Four à micro-ondes

$$1. \text{ On a } \begin{cases} \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi: } \text{rot } \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B}$$

$$= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad \text{car } \vec{j} = \vec{0} \text{ dans le vide}$$

$$\text{Or } \text{rot } \text{rot } \vec{E} = \text{grad } \text{div } \vec{E} - \Delta \vec{E} \quad \text{et } \text{div } \vec{E} = 0 \text{ dans le vide}$$

Donc :  $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$  avec  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

2. a. Il s'agit d'une onde stationnaire car les variables de temps et d'espace sont découplées. Cela fait sens ici car le champ est confiné dans une cavité et ne peut donc pas se propager selon  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  ou  $\vec{e}_z$ .

b. On réinjecte la première équation de (1) dans l'équation de propagation en utilisant le fait que  $(\Delta \vec{E}) \cdot \vec{e}_x = \Delta E_x$  :

$$-k_x^2 E_x - k_y^2 E_x - k_z^2 E_x = \frac{1}{c^2} \times (-\omega^2 E_x)$$

D'où : 
$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

On retrouve la même équation en projetant sur  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$ .

c. On a continuité du champ électrique tangentiel en  $x=0$ ,  $y=0$  et  $z=0$ , et  $\vec{E}$  est nul dans les conducteurs parfaits.

La continuité de  $E_y$  et  $E_z$  en  $x=0$  implique  $\psi_x = 0$

La continuité de  $E_x$  et  $E_z$  en  $y=0$  implique  $\psi_y = 0$

$E_x$  et  $E_y$  en  $z=0$   $\psi_z = 0$ .

De plus on a continuité de  $E_y$  et  $E_z$  en  $x=l$  donc on a  $\sin(k_x l) = 0$ . De même  $\sin(k_y l) = 0$  et  $\sin(k_z h) = 0$ . Ainsi il existe trois entiers  $n_x, n_y, n_z$  non tous nuls tels que :

$$k_x = \frac{n_x \pi}{l} ; k_y = \frac{n_y \pi}{l} ; k_z = \frac{n_z \pi}{h}$$

(si ces entiers étaient tous nuls on aurait  $\vec{E} = \vec{0}$ , cas inintéressant)

Alors :  $\omega = c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$  soit :

$$\omega = c \pi \sqrt{\frac{n_x^2}{l^2} + \frac{n_y^2}{l^2} + \frac{n_z^2}{h^2}}$$

d. Le premier mode non nul est atteint pour la plus petite valeur de  $\omega$ . Comme  $l > p > h$  cette valeur est atteinte pour  $n_x = n_y = 1$  et  $n_z = 0$  (les solutions avec  $n_x = 1$  et  $n_y = n_z = 0$  ou similaires conduisent à un champ  $\vec{E}$  identiquement nul). On a alors

$$\omega = c \pi \sqrt{\frac{1}{l^2} + \frac{1}{p^2}} \quad \text{et} \quad \vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{p}\right) \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

3. On suppose qu'on a toujours  $n_z = 0$ .

On observe des maxima de puissance là où les copeaux ont fondus, et on sait que la distance entre deux maxima est une demi longueur d'onde donc:  $\lambda_x = 14 \text{ cm}$  et  $\lambda_y = 20 \text{ cm}$ .

$$\text{Ainsi } \omega = c \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = 2\pi c \sqrt{\frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2}}$$

$= 0$  par hypothèse

$$\text{Et } f = \frac{\omega}{2\pi} = c \sqrt{\frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2}} = \boxed{2,6 \text{ GHz}}$$

## II - Guide d'ondes rectangulaire

1. a. Le champ est polarisé rectilignement selon  $\vec{u}_z$  et se propage dans la direction  $+\vec{u}_z$ .

b. On a du vide dans le guide dans  $\vec{E}$  satisfaisant l'équation de d'Alembert:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\text{Ainsi: } f''(y) \cos(\omega t - k_z z) - k_z^2 f(y) \cos(\omega t - k_z z) = -\frac{\omega^2}{c^2} f(y) \cos(\omega t - k_z z)$$

$$\text{D'où: } f''(y) + (k_0^2 - k_z^2) f(y) = 0 \quad \text{avec } k_0 = \frac{\omega}{c}$$

c. Les parois étant parfaitement conductrices, le champ électrique  $y$  est nul par continuité du champ tangentiel on a  $E_x = 0$  en  $y=0$  et  $y=b$  d'où  $f(y=0) = f(y=b) = 0$ .

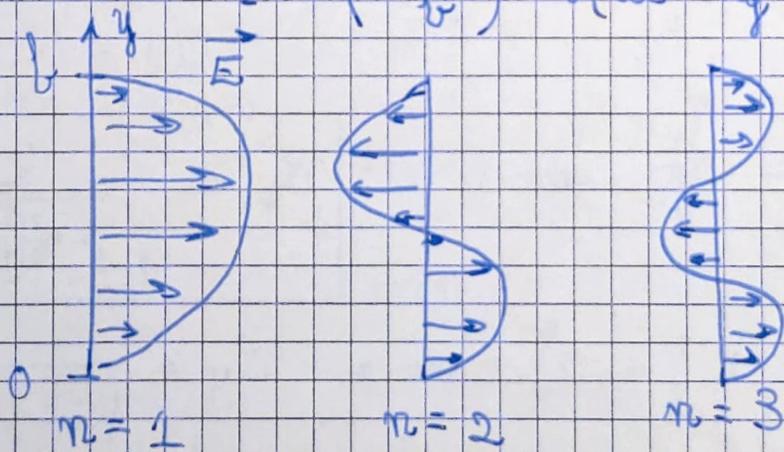
d. On a alors  $f''(y) + K^2 f(y) = 0$

\* Si  $K^2 < 0$  les solutions sont des exponentielles, or  $f(0) = f(b) = 0$  donc on trouve des solutions identiquement nulles ce qui n'est pas intéressant.

\* Si  $K^2 > 0$  alors  $f(y) = A_1 \cos(Ky) + A_2 \sin(Ky)$   
 Or  $f(0) = f(b) = 0$ , et il existe des solutions non identiquement nulles avec  $A_1 = 0$ ;  $A_2 \neq 0$  et  $\sin(Kb) = 0$ , on a alors :  $f(y) = A_2 \sin(Ky)$

e. La condition en  $y = b$  impose  $\sin(Kb) = 0$  donc il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $Kb = n\pi$  soit  $K = \frac{n\pi}{b}$ .

f. On a alors :  $\vec{E} = A_2 \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos(\omega t - k_g z) \vec{u}_x$



g. On peut écrire  $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , d'où :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot}(\vec{E}) = + \frac{\partial E_x}{\partial y} \vec{u}_z - \frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{u}_y$$

$$= A_2 \cdot \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos(\omega t - k_g z) \vec{u}_z - A_2 k_g \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin(\omega t - k_g z) \vec{u}_y$$

On intègre :

$$\vec{B} = \frac{n\pi A_2}{b\omega} \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin(\omega t - k_g z) \vec{u}_z + \frac{A_2 k_g}{\omega} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos(\omega t - k_g z) \vec{u}_y$$

$$h. \text{ On a } k_y^2 = k_0^2 - k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$\text{D'où : } \left(\frac{2\pi}{\lambda_y}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$\text{Ainsi } \lambda_y^2 = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_0^2} - \left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\lambda_y = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n \cdot \lambda_0}{2b}\right)^2}}}$$

i. On peut remarquer que on ne peut avoir propagation que si il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\frac{n \cdot \lambda_0}{2b} < 1$ , il faut donc que  $\lambda_0 < 2b$

$$\text{Or } \lambda_0 = \frac{c}{f} \text{ donc il faut que } f > \boxed{f_c = \frac{c}{2b}}$$

$$\text{Ici on a } b = \frac{c}{2f_c} = 6 \text{ cm.}$$

$$j. \text{ On a } v_\varphi = \frac{\omega}{k_y} = \frac{\lambda_0}{2\pi} \cdot \omega = \frac{\lambda_0 f}{\sqrt{1 - \left(\frac{n \cdot \lambda_0}{2b}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{n \cdot f_0}{2f}\right)^2}}$$

$$\text{Or } \frac{\lambda_0}{2b} = \frac{f_c}{f} \text{ donc : } \boxed{v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - n^2 \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}}$$

$$\text{Pour } n=1 \text{ et } f = 2f_c \text{ on a } v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = 3,5 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Cette vitesse est supérieure à la vitesse de phase des ondes dans le vide.

$$2. a. \vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \wedge \vec{B})$$

$$= \frac{n\pi A_2^2}{b\omega\mu_0} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos(\omega t - k_y z) \sin(\omega t - k_y z) \vec{u}_y$$

$$+ \frac{A_2^2 k_y}{\mu_0 \omega} \sin^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos^2(\omega t - k_y z) \vec{u}_z$$

b. Le premier terme a une moyenne nulle et  $\langle \cos^2(\omega t - k_y z) \rangle = \frac{1}{2}$

$$\text{donc : } \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{A_2^2 k_y}{2\mu_0 \omega} \sin^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \vec{u}_z$$

c. Dans la section droite, on a  $\langle \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) \rangle = \frac{1}{2}$  et la surface de la section est  $S = a \times b$ , ainsi :

$$P_{\text{moy}} = \frac{A_2^2 k_g}{2\mu_0} \times \frac{1}{2} \times ab = \frac{A_2^2 k_g ab}{4\mu_0 \omega} = \frac{E_0^2 k_g ab}{4\mu_0 \omega}$$

où  $E_0 = A_2$  est l'amplitude du champ électrique.

d. On a :  $U_{\text{em}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$ . Comme suggéré par l'énoncé, on admet le résultat.

e. La puissance qui traverse la section est donnée par :

$$P_{\text{moy}} = ab \times v_e \times \underbrace{\langle U_{\text{em}} \rangle}_{\text{moyenne spatiale et temporelle}}$$

$$\text{Or } \langle \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) \rangle = \frac{1}{2} \text{ et } \langle \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \rangle = 0$$

$$\text{Donc } P_{\text{moy}} = ab v_e \times \frac{E_0^2}{4\mu_0 c^2} = \frac{E_0^2 k_g ab}{4\mu_0 \omega} \text{ d'après (2e)}$$

$$\text{Ainsi : } v_e = c^2 \frac{k_g}{\omega} = \frac{c^2}{v_\phi}, \text{ soit :}$$

$$v_e = c \sqrt{1 - n_0^2 \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \text{ d'après (1j)}$$

f. On a vu en (2e) que  $v_\phi \times v_e = c^2$ .

g. Dans ce cas, cela va modifier les conditions aux limites, la relation de dispersion et donc  $v_g$  et  $v_\phi$   
 \* créer une dissipation d'énergie par effet Joule et donc une atténuation de l'onde.