

Corrigé - DS 8 Type X-ENS

I - Cavité résonante de longueur fixée

1. R et T représentent les coefficients de réflexion et de transmission en énergie, en effet les ondes étant planes progressives monochromatiques dans le vide, leur vecteur de Poynting vérifie $\vec{\Pi} \propto \vec{E}^2 \propto E^2$, ainsi :
- $$R = \frac{\|\vec{\Pi}_r\|}{\|\vec{\Pi}_i\|} \quad \text{et} \quad T = \frac{\|\vec{\Pi}_t\|}{\|\vec{\Pi}_i\|}$$

On en conclut que $R^2 + T^2 = 1$ représente la conservation de l'énergie.

2. Dans la région (II) on s'attend à ce que les ondes électromagnétiques se propagent uniquement dans le sens des z croissants, en effet il n'existe pas de source de champ en $z \rightarrow \infty$. Nous pouvons conclure que \vec{E}_{III} est une onde progressive se propageant selon $+\vec{e}_z$.

3. Le champ \vec{E}_+ est le résultat de deux phénomènes en $z=0$:
- * réflexion de l'onde \vec{E}_- avec un coefficient $-\rho$
 - * transmission de l'onde \vec{E}_i avec un coefficient τ

Par principe de superposition:
$$\vec{E}_+ = \tau \vec{E}_i - \rho \vec{E}_- \quad (*)$$

- Le champ \vec{E}_- est le résultat de la réflexion de \vec{E}_+ avec un coefficient $-\rho$. Comme on se trouve en $z=L$:

$$\vec{E}_- e^{i\omega(t + \frac{L}{c})} = -\rho \vec{E}_+ e^{i\omega(t - \frac{L}{c})} \quad \forall t$$

D'où
$$\vec{E}_- = -\rho e^{-\frac{2i\omega L}{c}} \vec{E}_+ \quad (**)$$

• En $z = L$ le champ \vec{E}_t est le résultat de la transmission de \vec{E}_+ :

$$\vec{E}_t e^{i\omega(t - \frac{L}{c})} = \zeta \vec{E}_+ e^{i\omega(t - \frac{L}{c})} \quad \text{D'où } \boxed{\vec{E}_t = \zeta \vec{E}_+} \quad (*)_3$$

4. On réinjecte $(*)_2$ dans $(*)_1$:

$$\zeta \vec{E}_- = \vec{E}_+ \left(\frac{1}{\zeta} - \rho^2 e^{-\frac{2i\omega L}{c}} \right)$$

Posons $\Theta(\omega) = \frac{\zeta^2}{1 - \rho^2 e^{-\frac{2i\omega L}{c}}} = \frac{T}{1 - R e^{-\frac{2i\omega L}{c}}}$, alors :

$$\sqrt{T} \vec{E}_i = \zeta \vec{E}_- = \frac{\vec{E}_+ T}{\Theta(\omega)} \quad \text{d'où } \vec{E}_+ = \frac{\Theta(\omega)}{\sqrt{T}} \vec{E}_i e^{-\frac{2i\omega L}{c}}$$

De plus par $(*)_2$: $\vec{E}_- = -\sqrt{R} \vec{E}_+ e^{-\frac{2i\omega L}{c}} = -\Theta(\omega) \sqrt{\frac{R}{T}} \vec{E}_i e^{-\frac{2i\omega L}{c}}$

Et par $(*)_3$: $\vec{E}_t = \sqrt{T} \vec{E}_+ = \Theta(\omega) \vec{E}_i$

On retrouve les formules de l'énoncé.

5. On a $|\Theta(\omega)|^2 = \Theta(\omega) \Theta(\omega)^* = \frac{T^2}{(1 - R e^{-\frac{2i\omega L}{c}})(1 - R e^{\frac{2i\omega L}{c}})}$

$$|\Theta(\omega)|^2 = \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos\left(\frac{2\omega L}{c}\right)}$$

Or $\cos\left(\frac{2\omega L}{c}\right) = 1 - \left(1 - \cos\left(\frac{2\omega L}{c}\right)\right) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\omega L}{c}\right)$

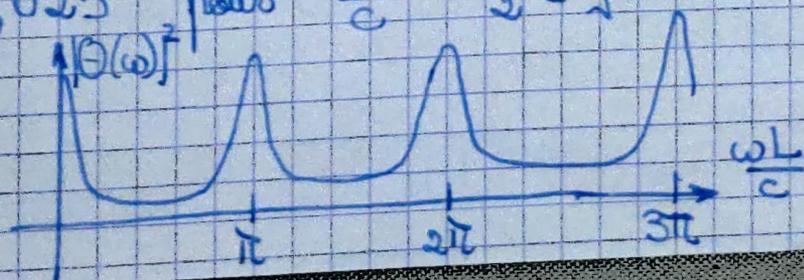
D'où :

$$|\Theta(\omega)|^2 = \frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2\left(\frac{\omega L}{c}\right)} = \frac{T^2}{T^2 + 4R \sin^2\left(\frac{\omega L}{c}\right)}$$

Pour $R = 0,9$ on a $T = 0,1$, alors $|\Theta(\omega)|^2 = 1$ pour $\frac{\omega L}{c} \equiv 0 [\pi]$

et $|\Theta(\omega)|^2 = \frac{T^2}{T^2 + 4} \approx 0,025$ pour $\frac{\omega L}{c} = \frac{\pi}{2} [\pi]$

L'allure est la suivante :



6. $|\Theta(\omega)|^2$ est maximale si $\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0$ donc si :

$$\exists n \in \mathbb{N}, \frac{\omega L}{c} = n\pi \quad \text{d'où} \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$

On a des pulsations qui correspondent aux modes propres de la cavité résonante à une dimension $f_n = \frac{nc}{2L}$.

7. L'intensité est proportionnelle au carré du champ électrique, or :

$$\langle \vec{E}_I^2 \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\vec{E}_I \cdot \vec{E}_I^* \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \vec{E}_I &= \left[\mathcal{E}_+ e^{i\omega(t-z/c)} + \mathcal{E}_- e^{i\omega(t+z/c)} \right] \vec{e}_x \\ &= \mathcal{E}_+ e^{i\omega t} \left[e^{-i\omega z/c} - \sqrt{R} \Theta \right] \vec{e}_x \quad \text{d'après } (*_2) \\ &= \mathcal{E}_+ e^{i\omega(t-\frac{z}{c})} \left[1 - \sqrt{R} e^{\frac{i\omega(z-L)}{c}} \right] \vec{e}_x \quad (Q3) \end{aligned}$$

Alors :

$$\vec{E}_I \cdot \vec{E}_I^* = |\mathcal{E}_+|^2 \left(1 + R - 2\sqrt{R} \cos\left(\frac{2\omega(z-L)}{c}\right) \right)$$

Par conséquent :

$$\mathcal{L}(\omega, z) = \frac{1 + R - 2\sqrt{R} \cos\left(\frac{2\omega(z-L)}{c}\right)}{\left(1 - \sqrt{R}\right)^2 + 4\sqrt{R} \sin^2\left(\frac{\omega(L-z)}{c}\right)}$$

ou encore

Alors :

$$\vec{E}_I \cdot \vec{E}_I^* = |\mathcal{E}_+|^2 \mathcal{L}(\omega, z) = \frac{|\Theta(\omega)|^2}{T} \mathcal{L}(\omega, z) |\mathcal{E}_i|^2 \quad \text{d'après (12)}$$

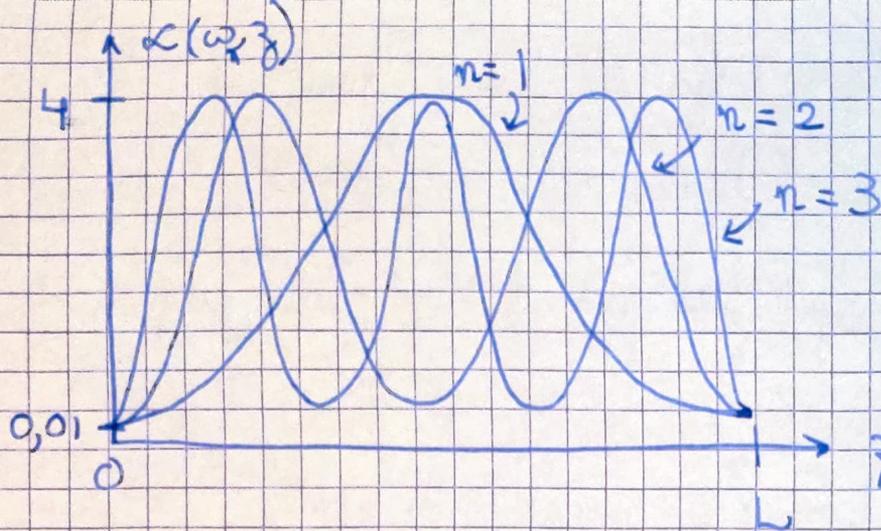
Mais on a $I_I(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\vec{E}_I \cdot \vec{E}_I^* \right)$

et $I_i = \frac{1}{2} |\mathcal{E}_i|^2$ donc $I_I(z) = \frac{|\Theta(\omega)|^2}{T} \mathcal{L}(\omega, z) I_i$

8. Lorsque $\omega = \omega_0$ alors on a $\frac{\omega L}{c} = n\pi$ et :

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\omega(L-z)}{c}\right) &= \sin\left(n\pi\left(1 - \frac{z}{L}\right)\right) = -\sin\left(n\pi\frac{z}{L}\right) \cos(n\pi) \\ &= (-1)^n \sin\left(n\pi\frac{z}{L}\right) \end{aligned}$$

Et $\mathcal{L}(\omega, z) = \underbrace{\left(1 - \sqrt{R}\right)^2}_{=0,01} + \underbrace{4\sqrt{R}}_{\approx 4} \sin^2\left(n\pi\frac{z}{L}\right)$ d'où l'allure :



Si $R = 1$ alors $S(\omega, z) = 4 \sin^2\left(n\pi \frac{z}{L}\right)$, on a alors une cavité résonante entre deux miroirs parfaits et on a des points pour lesquels $I_H = 0$: ce sont des nœuds, l'onde est stationnaire.

9. On écrit: $\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = \sin\left(\frac{(\omega - \omega_n)L}{c} + \frac{\omega_n L}{c}\right)$
 $= \sin\left(\frac{(\omega - \omega_n)L}{c}\right) \underbrace{\cos\left(n\pi\right)}_{=(-1)^n}$

En réutilisant Q5: $| \Theta(\omega) |^2 = \frac{T^2}{T^2 + 4R \sin^2\left(\frac{(\omega - \omega_n)L}{c}\right)}$

Si on suppose $|\omega - \omega_n| \ll \frac{c}{L}$ alors on a:

$$| \Theta(\omega) |^2 = \frac{1}{1 + 4\left(\frac{\omega - \omega_n}{\Delta\omega_{1/2}}\right)^2} \quad \text{avec} \quad \boxed{\Delta\omega_{1/2} = \frac{Tc}{L\sqrt{R}}}$$

$\Delta\omega_{1/2}$ représente la largeur des pics de $| \Theta(\omega) |$ donc du coefficient de transmission de la cavité et si $T \ll 1$ alors $R \approx 1$ et on a donc:

$$\Delta\omega_{1/2} \approx \frac{Tc}{L}$$

Physiquement, $\Delta\omega_{1/2}$ est la bande passante du filtre ainsi formé.

10. Cette cavité sélectionne uniquement des fréquences bien précises capables

de la traverser ; ceci est analogue à l'expérience de la corde de Melde (et à tous les instruments à corde) ainsi qu'aux cavités résonantes pour les ondes sonores, dans les instruments à vent.

On définit le facteur de qualité $Q = \frac{\omega}{\Delta\omega}$ où $\Delta\omega$ est la largeur pour laquelle $|D(\omega)|^2 = \frac{1}{2}$, alors on aura :

$$4 \left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_{1/2}} \right)^2 = 1 \quad \text{soit} \quad \Delta\omega = \frac{1}{2} \Delta\omega_{1/2} \quad \text{et} :$$

$$Q = \frac{2\omega}{\Delta\omega_{1/2}} = \frac{2\omega L}{Tc} = \boxed{\frac{2\pi nL}{T}} \quad \text{avec} \quad \omega \approx \omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$

Plus le facteur de qualité est grand et plus la résonance est aiguë.

11. Le photon se déplaçant à la vitesse c : $\boxed{\Delta t = \frac{L}{c}}$

12. Statistiquement, si le photon part d'un point aléatoire de la cavité, il subit un (et seulement un) rebond au cours de cet intervalle de temps à condition qu'il reste dans la cavité.

13. La probabilité qu'il s'échappe est égale à la probabilité de traverser le miroir lors de cet unique rebond : $P_{\text{transmission}} = T$.

14. Une proportion T des photons aura quitté la cavité, soit :

$$\Delta n_{\text{ph}} = -T \cdot n_{\text{ph}}(t)$$

15. On peut écrire, en supposant que tous les photons ont même pulsation :

$$E_{\text{em}}(t) = \hbar\omega n_{\text{ph}}(t)$$

$$\text{Alors} \quad (\Delta E_{\text{em}})_{\text{perte}} = -\Delta n_{\text{ph}} \times \hbar\omega = -T n_{\text{ph}} \hbar\omega = -T E_{\text{em}}$$

$$\text{D'où} : \quad \left(\frac{dE_{\text{em}}}{dt} \right)_{\text{perte}} = -\frac{T E_{\text{em}}}{\Delta t} = -\frac{T E_{\text{em}} c}{L}$$

$$\text{Ainsi} : \quad \boxed{\gamma = -\frac{1}{E_{\text{em}}} \left(\frac{dE_{\text{em}}}{dt} \right)_{\text{perte}} = \frac{Tc}{L} = \Delta\omega_{1/2} \quad \text{pour} \quad T \ll 1}$$

16. Les ondes $E_{\pm}(\omega) e^{i\omega(t \pm \frac{z}{c})}$ sont des solutions des équations de Maxwell qui sont linéaires, ainsi toute superposition de ces solutions est également solution.

17. Nous avons vu $\theta(\omega) = \frac{T}{1 - R e^{-\frac{2i\omega L}{c}}} = \frac{T}{1 - R e^{-\frac{2i(\omega - \omega_n)L}{c}}}$

car $e^{-\frac{2i\omega_n L}{c}} = 1$ ($\omega_n = \frac{\pi c}{L}$). Or on a

$e^{-\frac{2i(\omega - \omega_n)L}{c}} \approx 1 - \frac{2i(\omega - \omega_n)L}{c}$ d'où :

$\theta(\omega) \approx \frac{T}{T + \frac{2i(\omega - \omega_n)L}{c}} = \frac{1}{1 + \frac{2i(\omega - \omega_n)L}{cT}}$

Alors d'après (12) :

$E_i(\omega) = \sqrt{T} \left(1 + \frac{2i(\omega - \omega_n)L}{cT} \right) E_+(\omega)$

18. On a $\frac{E_i(\omega)}{\sqrt{T}} = E_+(\omega) \left(1 - \frac{2i\omega_n L}{cT} \right) + \frac{2i\omega L}{cT} E_+(\omega)$

Où encore :

$i\omega E_+(\omega) = - \left(\frac{cT}{2L} - i\omega \right) E_+ + \frac{cT}{2L} E_i$

Avec $i\omega \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{c}{L} = \frac{\gamma}{T}$ on retrouve :

$$\boxed{\frac{\partial E_+}{\partial t} = - \left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_c \right) E_+ + \sqrt{\frac{\gamma c}{4L}} E_i}$$

19. On a $\omega_{3000} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 10^8}{9 \cdot 10^{-4}} \approx 3 \cdot 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

$\lambda_{3000} = \frac{2\pi c}{\omega_{3000}} = \frac{2}{3000} \cdot L = \frac{2 \times 9 \cdot 10^{-4}}{3 \cdot 10^3} = 600 \text{ nm}$

Il s'agit d'une onde lumineuse on a alors :

$\Delta\omega_{1/2} = \frac{Tc}{L} \approx \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-2}}{9 \cdot 10^{-4}} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Et $Q = \frac{2 \times 3000 \times \pi}{9 \cdot 10^4} \approx 2 \cdot 10^7 \gg 1$. La résonance est

très aiguë, en électronique de TP on a rarement $Q \geq 100$
 et pour un diapason on a souvent $Q \sim 10^4$.

II - Cavité résonante à miroir mobile

20. On a alors une longueur $l(t) = L + \xi(t)$.

21. On a vu $\bar{\omega}_0 = \frac{n\pi c}{L}$ dans la première partie, désormais
 on a $\omega_c(t) = \frac{n\pi c}{l(t)} = \frac{n\pi c}{L + \xi(t)} \approx \bar{\omega}_0 \left(1 - \frac{\xi(t)}{L}\right)$ à l'ordre 1.

Ainsi :
$$\boxed{\omega_c(t) = \bar{\omega}_0 - G_0 \xi(t)}$$

22. Il faut que l'échelle τ_ξ des variations de ξ soit lente
 devant les temps caractéristiques optiques, à savoir :

* la période $\frac{2\pi}{\bar{\omega}_0}$ des ondes électromagnétiques

* le temps caractéristique $\frac{1}{\gamma}$ d'atténuation des ondes dans la
 cavité

23. Si la longueur de la cavité change, ceci va modifier la fonction
 $\Theta(\omega)$ et donc l'amplitude E_+ du champ \vec{E}_+ qui va ainsi
 varier. Cette variation se fait sur le temps caractéristique
 mécanique τ_ξ que l'on a supposé très long devant la
 période de l'onde ainsi $E_+(t)$ ne varie pas significativement
 au cours d'une période.

24. Nous avons
$$\frac{\partial E_+}{\partial t} = \frac{dE_+}{dt} e^{i\omega_c(t-\frac{z}{c})} + i\omega_c E_+ e^{i\omega_c(t-\frac{z}{c})}$$

$$= -\left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_0\right) E_+ e^{i\omega_0(t-\frac{z}{c})} + \sqrt{\frac{\gamma c}{4l(t)}} \varepsilon_i e^{i\omega_0(t-\frac{z}{c})}$$
 d'après (20)

D'où, en combinant ces deux équations :

$$\frac{d\vec{E}_+}{dt} = \left(-\frac{\gamma}{2} + i(\omega_c - \omega_L)\right) \vec{E}_+ + \sqrt{\frac{c\gamma}{4L}} \vec{E}_i$$

Or $\omega_L = \bar{\omega}_c + \Delta$ et $\omega_c = \bar{\omega}_c - G_c \xi(t)$.

De plus: $\sqrt{\frac{c\gamma}{4L}} = \sqrt{\frac{c\gamma}{4L}} \left(1 - \frac{\xi}{2L}\right) = \sqrt{\frac{c\gamma}{4L}} - \sqrt{\frac{c}{4L}} \cdot \underbrace{\sqrt{\gamma} \frac{\xi}{L}}_{\text{très petit devant les autres termes}}$

D'où:
$$\frac{d\vec{E}_+}{dt} = -\left(\frac{\gamma}{2} + i(\Delta + G_c \xi)\right) \vec{E}_+ + \sqrt{\frac{\gamma c}{4L}} \vec{E}_i$$

25. Lors d'un rebond, un photon perd une quantité de mouvement, $\Delta p = -\frac{2\hbar\omega_L}{c}$. Par conservation de la quantité de mouvement

la même quantité est transmise au miroir:
$$\Delta p = \frac{2\hbar\omega_L}{c}$$

26. Cette force F_{ps} est telle que $F_{ps} = \frac{dp}{dt} = \frac{dN_{ph}}{dt} \Delta p$ par le principe fondamental de la dynamique appliqué au miroir dans le référentiel du laboratoire.

Ainsi:
$$F_{ps} = \frac{2\hbar\omega_L}{c} \dot{N}_{ph}(t)$$

27. On a une puissance réfléchie par le miroir:
$$P_{em} = \frac{dN_{ph} \times \hbar\omega}{dt}$$
 } énergie réfléchie pendant dt

d'où
$$P_{em} = \hbar\omega_L \dot{N}_{ph}(t)$$

28. L'onde incidente sur le miroir mobile vérifie:

$$\vec{E}_+ = |\vec{E}_+| \cos\left(\omega_L t - \frac{z}{c} + \varphi\right) \vec{e}_x \quad \text{où } \varphi = \text{Arg}(\vec{E}_+)$$

Par la relation de structure pour une onde plane dans le vide:

$$\vec{B}_+ = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}_+}{c} = \frac{|\vec{E}_+|}{c} \cos\left(\omega_L t - \frac{z}{c} + \varphi\right) \vec{e}_y$$

$$\text{Et } \vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_+ \wedge \vec{B}_+ = \frac{|\vec{E}_+|^2}{\mu_0 c} \cos^2\left(\omega_L t - \frac{z}{c} + \varphi\right)$$

En notant S la section des cylindres, nous obtenons alors que

$$P_{em} = \|\langle \vec{\Pi} \rangle\| \cdot \mathcal{V} = \frac{\mathcal{V} |\mathcal{E}_+|^2}{2\mu_0 c} \quad \text{d'où } \Pi_{ph} = \frac{\mathcal{V} |\mathcal{E}_+|^2}{2\hbar\omega_L \mu_0 c}$$

On réinjecte dans le résultat de Q26 :

$$F_{pz} = \frac{\mathcal{V} |\mathcal{E}_+|^2}{\mu_0 c^2} = \boxed{\varepsilon_0 |\mathcal{E}_+|^2 \cdot \mathcal{V}} \quad (\text{où } c^2 \mu_0 \varepsilon_0 = 1)$$

29. On a : $\mathcal{E}_+ = a \sqrt{\frac{\hbar\omega_L}{\varepsilon_0 \mathcal{V} L}} = a \sqrt{\frac{\hbar\omega_L}{m \cdot L}} \cdot |\mathcal{E}_+|$ d'après Q28

D'où $|a| = \sqrt{\frac{F_{pz} \cdot L}{\hbar\omega_L}} = \sqrt{\frac{2L \Pi_{ph}}{c}}$ d'après Q26

Et $[a] = \sqrt{\frac{m \cdot s^{-1}}{m \cdot s^{-1}}} = 1$ est sans unité.

Alors $|a|^2 = \frac{2L \Pi_{ph}}{c}$ représente le nombre (adimensionné) de photons dans la cavité c'est-à-dire l'intensité électromagnétique dans la cavité.

On a $[a_i] = [a] \times \sqrt{\frac{c}{L}} = \sqrt{\frac{m \cdot s^{-1}}{m}} = s^{-1/2}$, et :

$$|a_i|^2 = \frac{\frac{1}{2} \varepsilon_0 |\mathcal{E}_i|^2 \times c \times \mathcal{V}}{\hbar\omega_i} = \frac{\langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \mathcal{V}}{\hbar\omega_i}$$
 est le nombre de photons

incidentes par unité de temps.

30. Les facteurs reliant \mathcal{E}_+ , \mathcal{E}_i à a , a_i étant constants, on a en multipliant (22) par $\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \mathcal{V} L}{\hbar\omega_L}}$:

$$\boxed{\frac{da}{dt} = - \left[i(\Delta + G_c \xi) + \frac{\gamma}{2} \right] a + \sqrt{\frac{\gamma}{2}} a_i}$$

31. Le miroir, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, est soumis à la force de rappel du ressort $\vec{F}_2 = -K \xi(t) \vec{e}_y$ et à la force de pression $\vec{F}_{pz} = \varepsilon_0 \mathcal{V} |\mathcal{E}_+(t)|^2 \vec{e}_y = \frac{\hbar\omega_L}{L} |a|^2 \vec{e}_y$

Alors par le principe fondamental de la dynamique :

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -K \xi + \frac{\hbar\omega_L}{L} |a|^2$$

On définit $\Omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ alors:

$$\ddot{z} + \Omega^2 z = \frac{\hbar \omega_L}{mL} |a|^2$$

32. Cela signifie que l'équilibre optique dans la cavité est atteint bien plus rapidement que l'équilibre mécanique, on pourra donc considérer qu'on est en régime stationnaire pour l'équation d'évolution de a établie en Q30.

33. Le résultat est alors immédiat en prenant $\frac{da}{dt} = 0$ dans la solution de Q30:

$$a(t) \approx \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{a_i}{\left[\Delta + G_c \xi(t) \right] + \frac{\gamma}{2}}$$

34. On a alors:

$$F_{pr}(t) = \frac{\hbar \omega_L}{L} |a|^2 = \frac{\hbar \omega_L \gamma}{2L} \cdot \frac{|a_i|^2}{\left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 + \left(\Delta + G_c \xi(t) \right)^2}$$

ou encore:

$$F_{pr}(t) = \frac{2\hbar \omega_L}{\gamma L} \cdot \frac{|a_i|^2}{1 + 4 \left(\frac{\Delta + G_c \xi(t)}{\gamma} \right)^2}$$

35. Il faut que $\ddot{z}_{eq} = 0$ d'où $\xi_{eq} = \frac{\hbar \omega_L}{mL \Omega^2} |a|^2$ d'après Q31

$$\text{Ainsi } \xi_{eq} = \frac{1}{m \Omega^2} \cdot \frac{2\hbar \omega_L}{\gamma L} \cdot \frac{|a_i|^2}{1 + 4 \left(\frac{\Delta + G_c \xi_{eq}}{\gamma} \right)^2}$$

ou encore:

$$\gamma L m \Omega^2 \xi_{eq} \left(1 + 4 \left(\frac{\Delta + G_c \xi_{eq}}{\gamma} \right)^2 \right) = 2\hbar \omega_L |a_i|^2$$

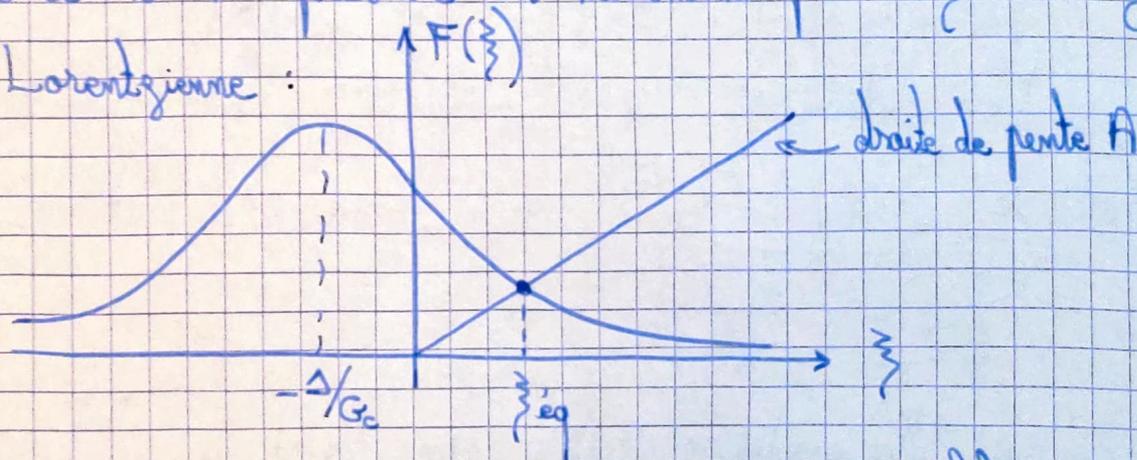
36. En l'absence de champ incident, $|a_i|^2 = 0$. Par ailleurs $1 + 4 \left(\frac{\Delta + G_c \xi_{eq}}{\gamma} \right)^2 > 0$ donc la seule solution est $\xi_{eq} = 0$. \square

s'agit d'un équilibre stable: une petite perturbation fera revenir le miroir à sa position d'équilibre via la forme de rappel du ressort.

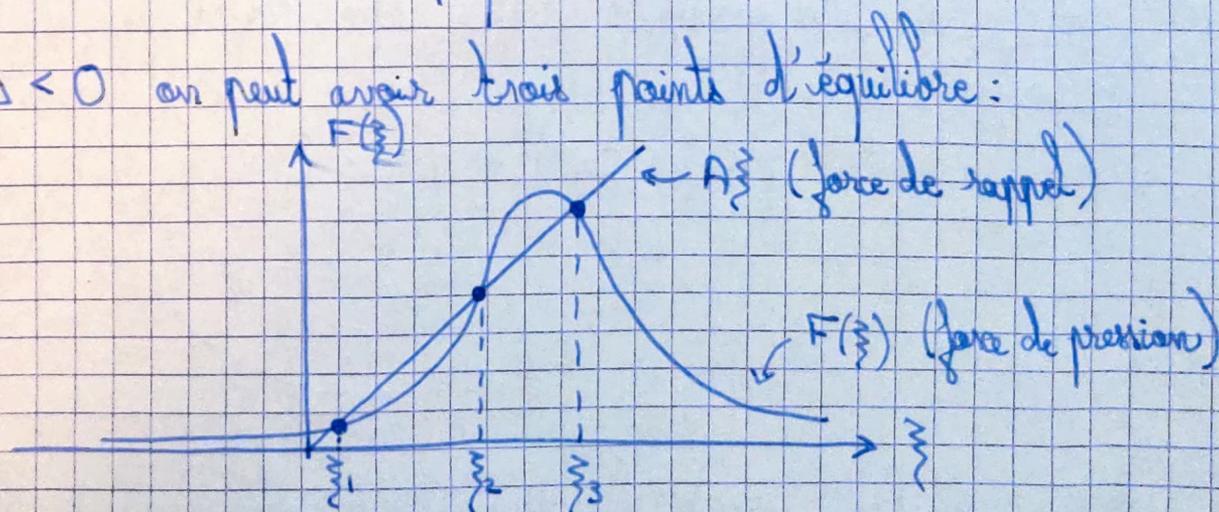
37. On a alors en reprenant le résultat de Q35, $A\tilde{z} = F(\tilde{z})$

où: $A = \frac{\gamma L k}{2h\omega_L a_1^2}$ et $F(\tilde{z}) = \frac{1}{1 + 4\left(\frac{\Delta + G_c \tilde{z}}{\gamma}\right)^2}$

La fonction F présente un maximum pour $\tilde{z} = -\frac{\Delta}{G_c}$, c'est une Lorentzienne:



38. Si $\Delta < 0$ on peut avoir trois points d'équilibre:



Autour de \tilde{z}_1 l'équilibre est stable: si \tilde{z} augmente la force de rappel est supérieure à la force de pression et \tilde{z} diminue à nouveau. Il en est de même en \tilde{z}_3 . En revanche \tilde{z}_2 est instable et ne peut donc pas être atteint physiquement.

On a donc deux équilibres stables: le système est bistable.

39. Le cas limite se produit lorsque $\tilde{z}_1 = \tilde{z}_2$. Alors la tangente à F

doit passer par l'origine soit $F'(\frac{\lambda}{\gamma}) = F(\frac{\lambda}{\gamma})$, c'est-à-dire :

$$\frac{\lambda}{\gamma} = \frac{F'(\frac{\lambda}{\gamma})}{F(\frac{\lambda}{\gamma})} = \frac{d}{d\frac{\lambda}{\gamma}} \ln(F) = - \frac{d}{d\frac{\lambda}{\gamma}} \ln\left(\frac{1}{F}\right)$$

$$\frac{\lambda}{\gamma} = - \frac{8 \frac{G_c}{\gamma} \cdot \frac{\Delta + G_c \frac{\lambda}{\gamma}}{\gamma}}{1 + 4 \left(\frac{\Delta + G_c \frac{\lambda}{\gamma}}{\gamma}\right)^2} \text{ soit } 0 = 1 + 4 \left(\frac{\Delta + G_c \frac{\lambda}{\gamma}}{\gamma}\right)^2 + 8 \frac{G_c \frac{\lambda}{\gamma}}{\gamma} \cdot \frac{\Delta + G_c \frac{\lambda}{\gamma}}{\gamma}$$

ou encore $4X^2 + 8X(X - \frac{\Delta}{\gamma}) + 1 = 0$ où $X = \frac{\Delta + G_c \frac{\lambda}{\gamma}}{\gamma}$

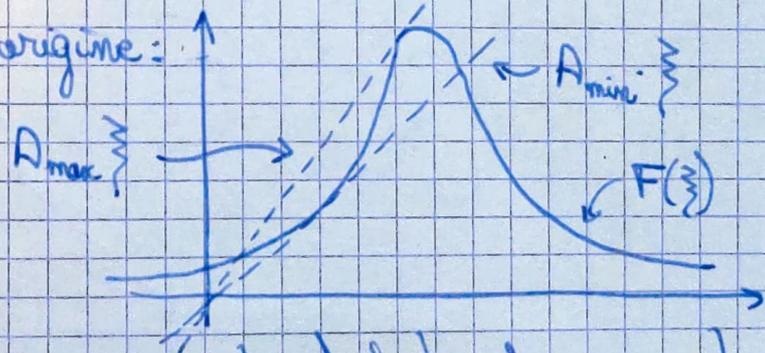
$$\Leftrightarrow 12X^2 - \frac{8\Delta}{\gamma}X + 1 = 0 \quad (*_4)$$

Il y a des solutions si $\left(\frac{4\Delta}{\gamma}\right)^2 - 12 > 0$ soit $\left(\frac{\Delta}{\gamma}\right)^2 > \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

Il faut donc $|\Delta| > \frac{\gamma\sqrt{3}}{2}$, or on a vu qu'il faut aussi $\Delta < 0$

D'où : $\Delta < -\frac{\gamma\sqrt{3}}{2}$

40. Supposons cette condition vérifiée, alors les trois solutions sont possibles si A est compris entre deux solutions donnant des tangentes passant par l'origine :



A_{\min} et A_{\max} sont tels que $(*_4)$ est satisfaite, alors en notant X_1 et X_2 les solutions de $(*_4)$ on a $\frac{\lambda}{\gamma}_{1/2} = \frac{\gamma X_{1/2} - \Delta}{G_c}$

Et aux points $\frac{\lambda}{\gamma}_{1/2}$ on sait que $F'(\frac{\lambda}{\gamma}_{1/2}) = \frac{F(\frac{\lambda}{\gamma}_{1/2})}{\frac{\lambda}{\gamma}_{1/2}} = A_{1/2}$

D'où :

$$\begin{cases} A_{\min} = \frac{G_c}{\gamma X_1 - \Delta} F\left(\frac{\gamma X_1 - \Delta}{G_c}\right) \\ A_{\max} = \frac{G_c}{\gamma X_2 - \Delta} F\left(\frac{\gamma X_2 - \Delta}{G_c}\right) \end{cases} \text{ avec } F\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta + G_c \frac{\lambda}{\gamma}}{\gamma}\right)^2}$$

On a alors :

$$\begin{cases} A_{\min} = \frac{G_c}{\gamma X_1 - \Delta} \cdot \frac{1}{1 + X_1^2} \\ A_{\max} = \frac{G_c}{\gamma X_2 - \Delta} \cdot \frac{1}{1 + X_2^2} \end{cases} \text{ avec } X_{1/2} = \frac{-\frac{4\Delta}{\gamma} \pm \sqrt{\left(\frac{4\Delta}{\gamma}\right)^2 - 12}}{12}$$

$$= -\frac{\Delta}{3\gamma} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta}{3\gamma}\right)^2 - \frac{1}{12}}$$

(Les calculs ne se simplifient pas si on essaye d'aller plus loin)
 On doit alors avoir $A_{\min} < A = \frac{\gamma L K}{2\pi \omega_L |a|^2} < A_{\max}$

D'où :

$$\frac{\gamma L K}{2\pi \omega_L} \left(\frac{4\Delta}{3} - \sqrt{\left(\frac{\Delta}{3\gamma}\right)^2 - \frac{1}{12}} \right) \times \left(\frac{2\Delta^2}{9\gamma^2} + \frac{11}{12} - \frac{2\Delta}{3\gamma} \sqrt{\left(\frac{\Delta}{3\gamma}\right)^2 - \frac{1}{12}} \right) < |a|^2 < \frac{\gamma L K}{2\pi \omega_L} \left(\frac{4\Delta}{3} + \sqrt{\left(\frac{\Delta}{3\gamma}\right)^2 - \frac{1}{12}} \right) \times \left(\frac{2\Delta^2}{9\gamma^2} + \frac{11}{12} + \frac{2\Delta}{3\gamma} \sqrt{\left(\frac{\Delta}{3\gamma}\right)^2 - \frac{1}{12}} \right)$$

41. On a $\frac{P_t}{P_i} = \frac{|e_+|^2}{|e_-|^2} \times \frac{|e_+|^2}{|e_-|^2} = T \times \frac{c}{2L} \frac{|a|^2}{|a|^2}$
 d'après (24) et (25).

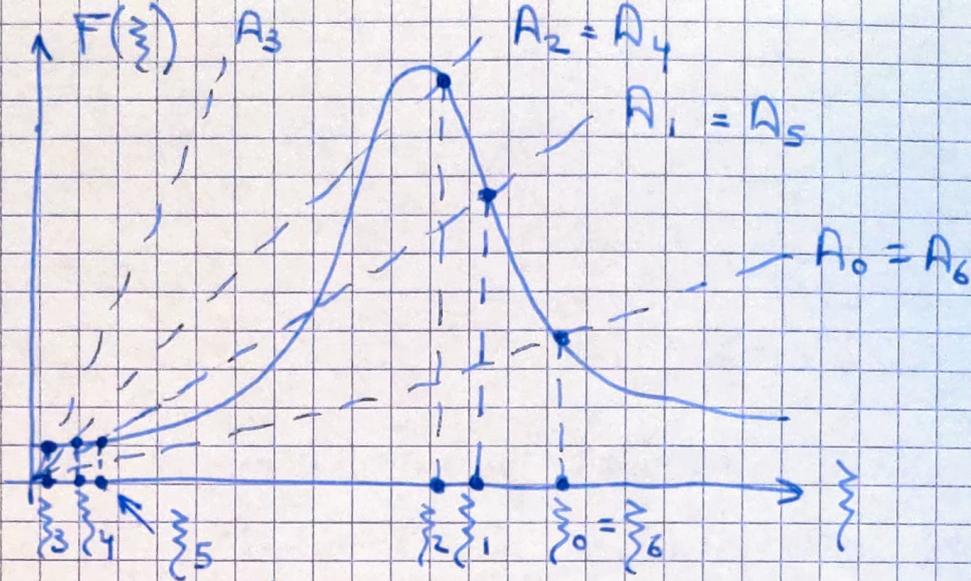
On encore :

$$\frac{P_t}{P_i} = \frac{cT}{2L} \times \frac{\frac{\gamma}{2}}{(\Delta + G_c \frac{\gamma}{2})^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \text{ d'après Q33}$$

$$= \frac{cT}{\gamma L} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta + G_c \frac{\gamma}{2}}{\gamma}\right)^2}$$

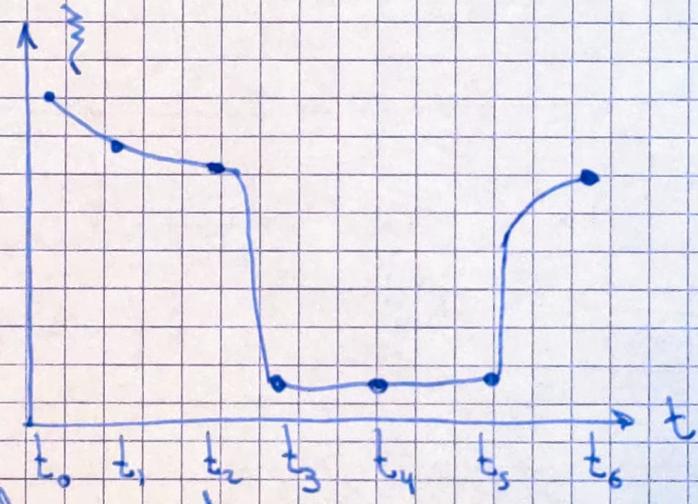
$$\boxed{\frac{P_t}{P_i} = \frac{cT}{\gamma L} F\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

42. On atteint successivement les deux positions d'équilibre et on y reste tant que A n'a pas franchi les valeurs extrêmes :



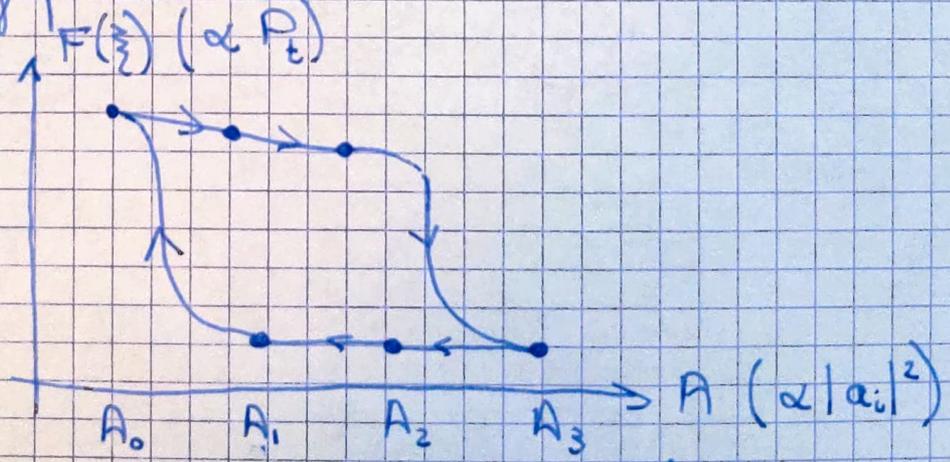
On suppose :
 $A = A_0$ à t_0
 $A = A_1$ à $t_1 > t_0$
 \vdots
 $A = A_6$ à $t_6 > t_5$

Dans l'ordre :



on passe entre
deux plateaux
correspondant aux
positions d'équilibre

On a ainsi le graphe suivant :



On obtient bien un cycle entre deux plateaux, on reste dans une position d'équilibre métastable jusqu'à ce que celle-ci disparaisse.