

Corrigé - DS 8
Type CCNP/E³A

I - Blindage électromagnétique (EBA)

1 - Préliminaires

1. On peut appliquer une différence de potentiel aux bornes d'un conducteur (par exemple en le branchant sur un générateur), ceci va le soumettre à un champ $\vec{E} = -\text{grad}(V)$.

2. Dans le référentiel lié au métal supposé galiléen, l'électron est soumis à :

- * la force électrique $\vec{F}_e = -e \vec{E}_0$
- * la force de frottement \vec{f}
- * le poids négligeable.

Le principe fondamental de la dynamique fournit alors :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m_e}{\tau} \vec{v} - e \vec{E}_0$$

3. On peut réécrire : $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{\vec{v}_0}{\tau}$

où τ est le temps caractéristique nécessaire pour atteindre la vitesse limite qui est relié aux chocs entre l'électron et les ions du réseau

et $\vec{v}_0 = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}_0$ est la vitesse limite des porteurs en régime permanent.

4. On a $\vec{j}_0 = -n e \vec{v}_0 = \frac{n e^2 \tau}{m} \vec{E}_0$. Il se mesure en $A \cdot m^{-2}$.

5. On constate que la loi d'Ohm est bien vérifiée avec $\gamma = \frac{n e^2 \tau}{m}$

On trouve $\gamma_{Al} = 3,7 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

6. L'équation différentielle est toujours valide mais en régime sinusoïdal forcé on trouve :

$$m i\omega \underline{\vec{v}} = -\frac{\pi e}{\epsilon} \underline{\vec{v}} - e \vec{E}_0 e^{i\omega t} = -e \underline{\vec{E}}$$

$$\text{D'où : } \underline{\vec{v}} = -\frac{e\tau}{m} \cdot \frac{1}{1+i\omega\tau} \underline{\vec{E}}$$

$$\text{Et : } \underline{\vec{j}} = \underline{\Gamma}(\omega) \underline{\vec{E}} \quad \text{avec} \quad \underline{\Gamma}(\omega) = \frac{\gamma}{1+i\omega\tau} \quad \text{la conductivité}$$

complexe dynamique.

$$7. \text{ On a } |\underline{\Gamma}(\omega)| = \frac{\gamma}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \quad \text{qui diminue avec la pulsation}$$

À basse fréquence ($\omega \ll \frac{1}{\tau}$) on a $\underline{\Gamma}(\omega) \approx \gamma$

À haute fréquence ($\omega \gg \frac{1}{\tau}$) on a $\underline{\Gamma}(\omega) \approx \frac{\gamma}{i\omega\tau} \approx \frac{m_0 e^2}{i\omega m} (*)$

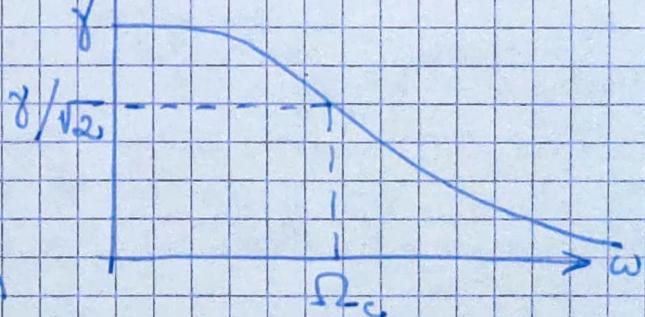
On peut définir la pulsation de coupure $\Omega_c = \frac{1}{\tau} = 1,38 \cdot 10^{14} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$

L'allure de $|\underline{\Gamma}(\omega)|$ est la suivante :

$$\uparrow |\underline{\Gamma}(\omega)|$$

Pour $\omega \gg \Omega_c$ on a l'équation

(*) qui est identique à celle du plasma : à hautes fréquences le conducteur se comporte donc comme un plasma.



8. On a :

$$\begin{cases} \text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div}(\vec{B}) = 0 \end{cases}$$

Le champ électrique est tel que $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ ainsi la conservation de la charge s'écrit $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\gamma \vec{E}) = 0$ soit $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho = 0$

La densité volumique de charges tend vers 0 avec un temps caractéristique très court $\frac{\epsilon_0}{\gamma} \ll \frac{2\pi}{\omega}$ donc on peut supposer $\rho \approx 0$.

De plus: $\| \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \| \sim \epsilon_0 \omega \| \vec{E} \| \ll \gamma \| \vec{E} \|$ car $\epsilon_0 \omega \ll \gamma$.

Donc on peut également négliger le courant de déplacement.

Les équations de Maxwell - Gauss et Maxwell - Ampère se réécrivent:

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \gamma \vec{E}$$

9. Dans le modèle que l'on étudie, il n'y a pas de sources surfaciques de courant à la surface du conducteur car le conducteur n'est pas parfait. Donc le champ magnétique est continu à l'interface.

10. On utilise les équations de Maxwell - Faraday et Maxwell - Ampère:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E}_t)) = \operatorname{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t}$$

$$\text{Or } \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E}_t)) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

$$\text{D'où } \Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{Or } \begin{cases} \Delta \vec{E} = f''(z) e^{i\omega t} \vec{u}_x \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = i\omega f(z) e^{i\omega t} \vec{u}_x \end{cases}$$

$$\text{D'où: } \boxed{f''(z) = i \mu_0 \gamma \omega f(z)}$$

$$11. \text{ On en déduit que } f''(z) = \frac{\mu_0 \gamma \omega}{\alpha^2} f(z) \quad \text{Or } \alpha = \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{soit } \underline{\alpha} = \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\delta} \quad \text{soit } \boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}}$$

$$\text{On a alors: } f(z) = \underline{A} e^{\underline{\alpha} z} + \underline{B} e^{-\underline{\alpha} z} \quad \text{soit } \underline{A} \text{ et } \underline{B}$$

sont des constantes. $\underline{A} = 0$ car sinon on aurait une divergence exponentielle de f et en rotant $\Psi = \operatorname{Arg}(\underline{B})$ on a $\underline{B} = |\underline{B}| e^{i\Psi}$

$$\text{Alors } \vec{E}_t = |\underline{B}| e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta} + \Psi)} e^{-\frac{z}{\delta}} \vec{u}_x$$

$$\text{En notant } E_{t0} = |\underline{B}| \text{ on trouve } \vec{E}_t = E_{t0} \cos(\omega t - \frac{z}{\delta} + \Psi) e^{-\frac{z}{\delta}} \vec{u}_x$$

δ est homogène à une longueur et représente la profondeur de pénétration de l'onde dans le conducteur.

Pour l'aluminium à $f = 1 \text{ MHz}$: $\delta = \sqrt{\frac{2}{2\pi \mu_0 \gamma f}} = \boxed{83 \mu\text{m}}$

12. δ est proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{f}}$ donc une onde de plus haute fréquence pénètre moins facilement dans le conducteur.

Pour un conducteur parfait $\delta \rightarrow 0$ et on a une discontinuité de champ à l'interface air-conducteur.

13. On a $e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})} = e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})} e^{-\frac{z}{\delta}}$

Ainsi $-i\underline{k} = -\frac{i}{\delta} - \frac{1}{\delta} = -i\left(-\frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta}\right)$ d'où $\underline{k} = \frac{1-i}{\delta}$

La partie réelle reflète la propagation de l'onde dans le conducteur.

La partie imaginaire indique l'atténuation exponentielle de l'onde liée à l'absorption d'énergie par le conducteur.

14. La vitesse de phase est la vitesse de propagation des crêtes et creux et se voit dans le terme en cos:

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\text{Re}(\underline{k})} = \omega \delta = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma}}$$

La vitesse de groupe est $v_g = \frac{d\omega}{d\text{Re}(\underline{k})} = \frac{1}{\frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{\delta} \right)}$

or $\frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}}$ donc $\frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{\delta} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma}{2\omega}}$ et donc:

$$v_g = 2 \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma}} = 2 v_{\phi}$$

v_{ϕ} dépend de ω donc la propagation est dispersive.

15. On a continuité du champ électrique à l'interface, que l'on applique en $z=0$ et à $t=0$, on trouve:

$$\underline{E}_i + \underline{E}_r = \underline{E}_t \quad \text{soit} \quad 1 + r = t \quad (*)$$

De plus par la relation de structure dans le vide:

$$\underline{B}_i = \frac{\underline{u}_z \wedge \underline{E}_i}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \underline{u}_y$$

$$\underline{B}_r = \frac{-\underline{u}_z \wedge \underline{E}_r}{c} = -\frac{r E_0}{c} e^{i(\omega t + kz)} \underline{u}_y$$

propagation selon $-\underline{u}_z$ car c'est le champ réfléchi

Et par la relation de structure pour une O.F.M.P.P.M.:

$$\underline{B}_t = \frac{k \underline{u}_z \wedge \underline{E}_t}{\omega} = t \frac{1-i}{\delta} \frac{E_0}{\omega} e^{i(\omega t - kz)} \underline{u}_y$$

La continuité du champ magnétique en $z=0$ et à $t=0$ s'écrit donc:

$$\underline{B}_i + \underline{B}_r = \underline{B}_t \quad \text{à } z=0, t=0$$

D'où:
$$\frac{E_0}{c} (1 - r) = \frac{(1-i) E_0}{\delta \omega} t$$

Où encore
$$1 - r = \frac{(1-i) c}{\delta \omega} t \quad (**)$$

$(*) + (**)$ donne:
$$2 = \left(1 + \frac{(1-i) c}{\delta \omega}\right) t \quad \text{d'où:}$$

$$t = \frac{2 \delta \omega}{\delta \omega + (1-i) c}$$

Et:
$$r = t - 1 = \frac{-(1-i) c + \delta \omega}{(1+i) c + \delta \omega} = \frac{\delta \omega - c + ic}{\delta \omega + c + ic}$$

Ainsi:
$$R = |r|^2 = \frac{c^2 + (\delta \omega - c)^2}{c^2 + (\delta \omega + c)^2} = \frac{2c^2 + (\delta \omega)^2 - 2c\delta \omega}{2c^2 + (\delta \omega)^2 + 2c\delta \omega}$$

On constate que: * $R = 1$ dans le cas du conducteur parfait ($\delta \rightarrow 0$, réflexion totale)

* $R = 0$ en l'absence de conduction (pas de blindage, $\delta \rightarrow \infty$, onde totalement transmise).

16. On a en réel: $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - k_0 z) \vec{u}_x$
 $\vec{B}_i = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - k_0 z) \vec{u}_y$

D'où $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - k_0 z) \vec{u}_z$

Et $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \cdot c \cdot \vec{u}_z$

Par définition du vecteur de Poynting:

$P_n = \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \cdot c$

17. La puissance de l'onde réfléchie est:

$P_r = R^2 \times P_i = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \cdot c \cdot R^2$

Par conservation de l'énergie, la puissance perdue est cédée au métal:

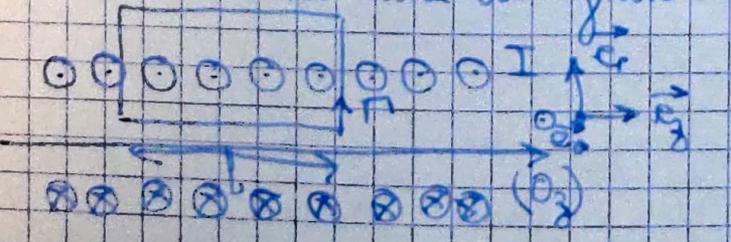
$P_t = (1 - R^2) P_i = \frac{4c \delta \omega}{c^2 + (\delta \omega + c)^2} \times \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$

Où: $\frac{\delta \omega}{c} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega} \times \frac{\omega^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{2\epsilon_0 \omega}{\gamma}} \ll 1$

Donc: $P_t \approx \frac{4c \delta \omega}{2c^2} \times \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 = \boxed{\delta \omega \epsilon_0 E_0^2}$

Cette puissance est ensuite dissipée par effet Joule dans le métal.

On remarque que, $\frac{P_t}{P_i} = \frac{2\delta \omega}{c} \ll 1$ donc seule une petite partie de l'énergie chauffe le métal ce qui évite d'endommager le blindage: le choix d'un matériau de grande conductivité est adapté.

18.  On note M un point de l'espace, alors $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ est un plan de symétrie de la distribution de charges et $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à ce plan. De

plus on a invariance par rotation d'angle ϑ et translation selon \vec{e}_z donc

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_z$$

On applique le théorème d'Ampère au contour Γ : ↙ nombre de spires par unité de longueur

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r) \times l = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0 \frac{N}{\varrho} \cdot l \cdot I$$

D'où :
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{\varrho} \vec{e}_z$$

19. Le flux de \vec{B} à travers le solénoïde est :

$$\begin{aligned} \Phi &= N \int_{\text{spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = N \times \pi r^2 \times \|\vec{B}\| \quad \text{car } \vec{B} \text{ est uniforme dans le solénoïde} \\ &= N \pi r^2 \cdot \frac{\mu_0 N I}{\varrho} \end{aligned}$$

Or l'inductance étant définie par $\Phi = LI$:
$$L = \frac{\pi N^2 r^2 \mu_0}{\varrho}$$

20. Il s'agit du flux du même champ mais à travers N' spires de section $\pi r'^2$ d'où :

$$\Phi' = N' \int_{\text{petite spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = N' \times \pi r'^2 \|\vec{B}\| = N' \pi r'^2 \cdot \frac{\mu_0 N I}{\varrho}$$

Or $\Phi' = M I$ par définition de l'inductance mutuelle donc on a

$$M = \mu_0 \frac{\pi r'^2}{\varrho} \alpha \quad \text{où } \alpha = N N'$$

21. Dans l'approximation des régimes quasi stationnaires, on peut écrire $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$ et le théorème d'Ampère reste valable. Tous les résultats précédents sur les bobines sont donc encore valides.

22. On applique une loi d'Ohm complexe en utilisant les impédances complexes :

$$\frac{i\omega}{EA} = (R_0 + R + iL\omega)^{-1} = \frac{I_m e^{j\omega t}}{E_m e^{j\omega t} e^{j\varphi_e}} = \frac{I_m}{E_m} e^{-j\varphi_e}$$

On a donc $I_m = \frac{E_m e^{j\varphi_e}}{R + R_0 + jL\omega}$ et on cherche à avoir $I_m \in \mathbb{R}$

$$\text{Arg}(I_m) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\varphi_e = \arctan\left(\frac{L\omega}{R + R_0}\right)}$$

Dans ce cas :

$$e^{j\varphi_e} = \frac{R + R_0 + iL\omega}{\sqrt{(R + R_0)^2 + (L\omega)^2}} \quad \text{et} \quad I_m = \frac{E_m}{\sqrt{(R + R_0)^2 + (L\omega)^2}}$$

On retrouve bien l'expression suggérée par l'énoncé.

23. On a alors en appliquant un pont diviseur de tension avec les impédances complexes :

$$\frac{U_c}{E} = \frac{jL\omega}{R + R_0 + jL\omega} = \frac{i \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + i \frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{où} \quad \boxed{\omega_c = \frac{R + R_0}{L}}$$

Le filtrage obtenu aux bornes de la bobine correspond donc à un filtre passe-haut.

2 - Étude du blindage

24. À haute fréquence, on constate que le blindage est d'autant plus efficace que la fréquence est élevée, ce qui s'explique par le fait que l'épaisseur de peau est alors plus faible donc le champ pénètre moins facilement à travers le blindage.

25. La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday s'écrit :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_{S_C} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Où \vec{B} est uniforme et le long du contour C on sait que

$\vec{E}_{int,r}$ épouse les parois, donc est colinéaire à \vec{dt} . Ainsi on a

$$\vec{E}_{int,r} \cdot \vec{dt} = \mathcal{L} \cdot \frac{d\vec{B}_{int}}{dt}$$

Et $\vec{B} = \vec{B}_{int} \cdot \vec{e}_y \cdot S_L = \vec{B}_{int} S_L$ car \vec{B}_{int} est colinéaire à \vec{B}_{ext} .

Enfin $\frac{d\vec{B}_{int}}{dt} = i\omega \vec{B}_{int}$. On conclut :

$$\vec{E}_{int,r} \times \mathcal{L} + i\omega S_L \vec{B}_{int} = 0$$

26. À basse fréquence on aura, en prenant $\omega \rightarrow 0$:

$$\vec{E}_{int,r} \approx - \frac{i\omega S_L B_0}{\mathcal{L}} \quad \text{et} \quad \vec{B}_{int} \approx B_0$$

Donc le blindage sera d'autant plus efficace que la fréquence est basse pour le champ électrique mais il sera inefficace (même inexistant) pour le champ magnétique ce qui correspond bien aux observations de la figure 3.

27. À basse fréquence : $\vec{E}_{int,r} \propto \omega$ donc on s'attend à

avoir une pente de +20 dB/décade et on aura une fréquence de coupure ω_c telle que :

$$i \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{\mathcal{L}}{S_L} i \gamma \omega \mu_0 h S_L \quad \leftarrow 4 \cdot e$$

$$\text{D'où } \omega_c = \frac{\mathcal{L}}{\mu_0 \gamma h S_L} \quad \text{et} \quad f_c = \frac{\mathcal{L}}{2\pi \mu_0 \gamma h S_L} = 230 \text{ Hz}$$

De plus on aura $\vec{B}_{int} \approx B_0$ avec une fréquence de coupure f_c identique (le dénominateur des fractions est le même).

À haute fréquence on a vu (Q17) le rapport des champs transmis et incidents $\underline{t} = \frac{2S\omega}{S\omega + (1-i)e}$. De plus on a une

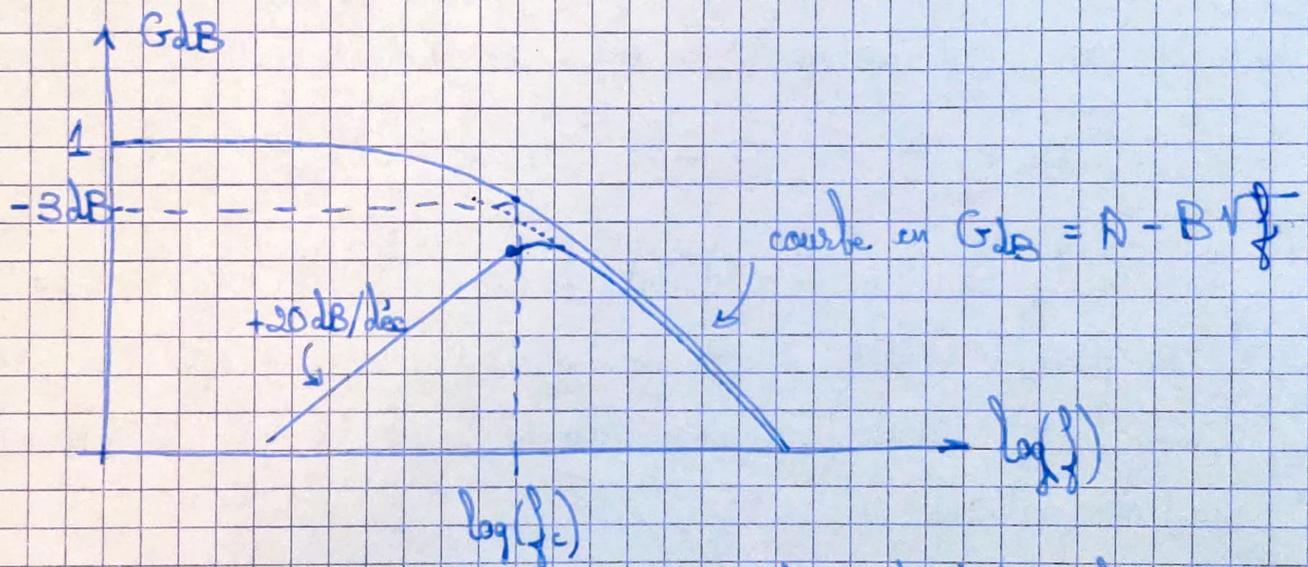
atténuation exponentielle en $e^{-\frac{z}{\delta}}$ dans le conducteur.

Donc $\left\| \frac{\vec{E}_{int}}{\vec{E}_{ext}} \right\| \approx |z| \times e^{-\frac{h}{\delta}}$ où h est l'épaisseur des parois.

Or $|z| \approx 2$ à haute fréquence et $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$.

Donc : $\ln \left\| \frac{\vec{E}_{int}}{\vec{E}_{ext}} \right\| = c^{ste} - h \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}} = c^{ste} - h \sqrt{\mu_0 \gamma f}$

L'allure attendue est la suivante :



28. Par rapport à la courbe observée, la pente est différente (on observe plutôt 50 dB/dec) et on observe aussi une fréquence de coupure bien plus élevée.

II - Voie solaire

29. On a continuité du champ électrique tangentiel d'après la relation de passage donc : $\vec{E}_i(z=0^-) + \vec{E}_r(z=0^-) = \vec{0}$ car le champ est nul dans le conducteur parfait.

Ainsi si on projette sur \vec{e}_y et \vec{e}_z :

$$\begin{cases} E_{0y} e^{i\omega t} = 0 \\ (E_0 + E_{0y}) e^{i\omega t} = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} E_{0y} = 0 \\ E_{0z} = -E_0 \end{cases} \quad \text{et on}$$

II - Mesure du niveau des océans

29. Il s'agit d'une onde plane progressive monochromatique se propageant selon (Oz) dans le sens des z croissants et polarisée rectilignement selon \vec{e}_x .

30. On a: $\|\vec{v} \wedge \vec{B}\| \approx \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{B}\| \approx \frac{\|\vec{v}\|}{c} \cdot \|\vec{E}\|$ par la relation de structure

La composante magnétique $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ peut donc être négligée devant la composante électrique $q\vec{E}$ si l'électron est non relativiste, soit $\|\vec{v}\| \ll c$.

31. On applique le PFD à une particule de masse m et de charge q dans le référentiel terrestre supposé galiléen:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} \quad \text{d'où} \quad i\omega m \vec{v} = q\vec{E} \quad \text{en régime sinusoïdal}$$

Ainsi:
$$\vec{v}_e = \frac{-e\vec{E}}{i\omega m_e} \quad \text{et} \quad \vec{v}_c = \frac{e\vec{E}}{i\omega m_c}$$

32. Nous avons alors:

$$\vec{j} = -ne\vec{v}_e + ne\vec{v}_c \quad (\text{Chaque porteur de charge apporte une contribution})$$
$$= \frac{ne^2}{i\omega} \left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_c} \right) \vec{E}$$

Or on sait que $m_c \gg m_e$ donc $\vec{j} \approx \gamma \vec{E}$ où $\gamma = \frac{ne^2}{i\omega m_c}$

on peut retrouver le résultat de l'énoncé avec $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e}}$

33. On a $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ car l'onde est transverse, c'est-à-dire que la polarisation est perpendiculaire à la direction de propagation, ainsi $\text{div} \vec{E} = \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$, d'où $\rho = 0$.

34. Sous forme complexe, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{cases} i\vec{k} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ i\vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \epsilon_0 i\omega \vec{E}) \end{cases} \quad \begin{cases} i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B} \\ i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} i\vec{k} \wedge (i\vec{k} \wedge \vec{B}) &= \mu_0 i\vec{k} \wedge \vec{j} + \frac{1}{c^2} (i\omega)^2 (i\vec{k} \wedge \vec{E}) \\ &= -i \mu_0 \epsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} \times (-i\omega \vec{B}) + \frac{1}{c^2} (i\omega)^2 (-i\omega \vec{B}) \\ &= \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \vec{B} \end{aligned}$$

$$\text{Or } i\vec{k} \wedge (i\vec{k} \wedge \vec{B}) = \underbrace{(i\vec{k} \cdot \vec{B})}_{=0} i\vec{k} - (i\vec{k})^2 \vec{B} = k^2 \vec{B}$$

D'où : $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$

35. On a alors $k = \pm i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}$.

Or $\text{Im}(k) < 0$ car la solution ne peut pas diverger, donc

$k = -\frac{i}{\delta}$ avec $\delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$ et :

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{M}, t) &= E_0 e^{i\omega t} e^{-\frac{z-z_0}{\delta}} \vec{e}_x \\ \vec{B} &= \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{-i}{\delta \omega} \vec{e}_z \wedge \vec{E} = \frac{E_0}{\delta \omega} (-i e^{i\omega t}) e^{-\frac{z-z_0}{\delta}} \vec{e}_y \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{M}, t) = E_0 \cos(\omega t) e^{-\frac{z-z_0}{\delta}} \vec{e}_x \\ \vec{B}(\vec{M}, t) = \frac{E_0}{\delta \omega} \sin(\omega t) e^{-\frac{z-z_0}{\delta}} \vec{e}_y \end{cases} \quad \text{Il s'agit d'une onde évanescente.}$$

36. $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \frac{E_0^2}{\mu_0 \delta \omega} \cos(\omega t) \sin(\omega t) e^{-2\frac{z-z_0}{\delta}} \vec{e}_z$

D'où $\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$: l'onde ne transporte pas d'énergie ce qui

est caractéristique d'une onde évanescente.

37. On a désormais: $k = \pm \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$

On $k > 0$ car l'onde se propage dans le sens des z croissants.

Donc: $k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$

Alors $\vec{E} = E_0 \exp\left(i\left(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}(z - z_0)\right)\right) \vec{e}_x$

$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{E_0}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \exp\left(i\left(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}(z - z_0)\right)\right) \vec{e}_y$

D'où les champs réels:

$\vec{E} = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}(z - z_0)\right) \vec{e}_x$

$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} \cos\left(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}(z - z_0)\right) \vec{e}_y$

Il s'agit d'une onde plane progressive monochromatique se propageant selon $+\vec{e}_z$ et polarisée rectilignement selon \vec{e}_x .

38. On en déduit que seules les pulsations $\omega > \omega_p$ peuvent se propager, le plasma se comporte donc comme un filtre passe-haut de pulsation de coupure: $\omega_p = \sqrt{\frac{n e^2}{\epsilon_0 m_e}}$

39. Il faut que $\omega > \omega_p$ pour toutes les circonstances donc:

$f > \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{n_{\max} e^2}{\epsilon_0 m_e}}$ avec $n_{\max} \approx 10^{12} \text{ m}^{-3}$

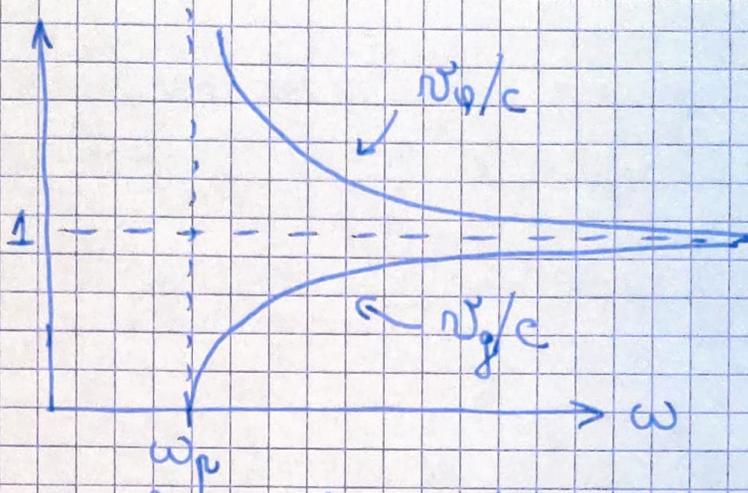
On obtient $f > 9,0 \text{ MHz}$

La bande de fréquences utilisée par Jason satisfait largement le critère.

40. On a $v_g = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$

$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$

L'allure des fonctions
est la suivante :



41. v_g dépend de ω donc l'ionosphère est dispersive.

42. Dans le vide les deux impulsions se propagent à la même vitesse donc l'écart est uniquement dû à la traversée de l'ionosphère :

$$\Delta t = \frac{l}{v_g(f_1)} - \frac{l}{v_g(f_0)} = \frac{l}{c} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_1}{f_p}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_0}{f_p}\right)^2}} \right)$$

Or $f_0 \gg f_p$ d'après 39 ; de même $f_1 \gg f_p$ donc par développement limite :

$$\Delta t \approx \frac{l}{c} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{f_1}{f_p} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{f_0}{f_p} \right)^2 \right) = \frac{l f_p^2}{2c} \left(\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_0^2} \right)$$

ou encore :

$$\Delta t = \frac{l \omega_p^2}{2c} \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_0^2} \right)$$

43. On a alors un temps de parcours :

$$t_0 = \underbrace{\frac{2(d-l)}{c}}_{\text{dans le vide}} + \underbrace{\frac{2l}{v_g(\omega_0)}}_{\text{dans l'ionosphère}} = \frac{2d}{c} + 2l \left(\frac{1}{v_g(\omega_0)} - \frac{1}{c} \right)$$

$$\text{D'où : } d = \frac{c t_0}{2} - \epsilon \text{ où } \epsilon = 2l \left(\frac{1}{v_g(\omega_0)} - \frac{1}{c} \right)$$

$$\epsilon = l \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)^2}} - 1 \right) \approx \frac{l}{2} \left(\frac{\omega_p}{\omega_0} \right)^2 \approx \left(\frac{\omega_p}{\omega_0} \right)^2 \times \frac{c \Delta t}{\omega_p^2} \times \frac{1}{\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_0^2}}$$

$$\epsilon = \frac{c \Delta t}{\left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \right)^2 - 1}$$

44. L'erreur commise serait:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p}{\omega_0} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{n e^2}{\varepsilon_0 m_e \omega_0^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{n e^2}{8 \pi^2 m_e \varepsilon_0 \omega_0^2} \right)^2$$

L'application numérique donne $\varepsilon \approx 5,4 \text{ cm}$

Cette erreur est non négligeable devant la précision à laquelle est connue l'orbite du satellite donc il est intéressant de la calculer pour corriger l'altitude du niveau des océans. Elle est aussi à corriger absolument si on veut mesurer la hausse du niveau des océans liée au réchauffement climatique ($\approx + 4 \text{ mm} \cdot \text{an}^{-1}$).