

DS8 - Centrale Corrigé

I - Un miroir pour les ondes électromagnétiques

1 - Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \end{cases}$$

Dans une région vide de charges et de courants, elles deviennent :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{cases} \quad \text{où } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

2 - On a alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) &= \operatorname{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} \quad \text{équation de Maxwell-Faraday} \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{par l'équation de Maxwell-Ampère} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} = 0 \quad (\text{équation de Maxwell-Gauss})$$

On conclut :

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

3 - Il s'agit d'une onde plane progressive monochromatique se propageant selon (Ox) dans le sens des x croissants, et polarisée rectilignement selon \vec{u}_y .

On l'injecte dans l'équation de d'Alembert avec $\Delta \leftrightarrow -k^2$ et $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \leftrightarrow -\omega^2$, on obtient $\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$ relation de dispersion

4 - Un conducteur est dit parfait lorsque sa conductivité γ tend vers $+\infty$. Alors par la loi d'Ohm: $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} = \vec{0}$ où \vec{j} est la densité volumique de courants qui reste finie dans le volume du conducteur.

5 - En $x = 0^-$, on a: $\vec{E}_i(M, t) = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_y$
 En $x = 0^+$, on a $\vec{E} = \vec{0}$ car on est dans le conducteur.
 Or le champ électrique tangentiel doit être continu par la relation de passage (2), il existe donc nécessairement une onde réfléchie telle que: $\vec{E}_i(x=0^-, t) + \vec{E}_r(x=0, t)$ ait une composante tangentielle nulle, soit:

$$\vec{E}_{\text{tot}}(0, t) = E_0 \vec{u}_y \cos(\omega t) + \vec{E}_{r0} \cos(\omega' t)$$

$$\text{On en conclut que } \begin{cases} \vec{E}_{r0} \cdot \vec{u}_y = 0 \\ \vec{E}_{r0} \cdot \vec{u}_x = -E_0 \\ \omega = \omega' \end{cases}$$

$$\text{De plus } k'^2 = \frac{\omega'^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{c^2} = k^2 \text{ donc } k' = k \text{ (car } k' > 0)$$

Enfin par l'équation de Maxwell-Gauss appliquée à \vec{E}_r on a:

$$0 = \text{div } \vec{E}_r = \frac{\partial}{\partial x} [(\vec{E}_{r0} \cdot \vec{u}_x) \cos(\omega t + k'x)] = -\vec{E}_{r0} \cdot \vec{u}_x k' \sin(\omega t + k'x)$$

D'où $\vec{E}_r \cdot \vec{u}_x = 0$. On conclut que $\vec{E}_{r0} = -E_0 \vec{u}_y$

$$\text{et } \vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{u}_y$$

L'onde se propage selon Ox dans le sens des x décroissants et est polarisée rectilignement selon \vec{u}_y .

6 - On a alors:

$$\begin{aligned} \vec{E}(M, t) &= \vec{E}_i(M, t) + \vec{E}_r(M, t) \\ &= E_0 [\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)] \vec{u}_y \\ &= -2E_0 \cos(\omega t) \sin(kx) \vec{u}_y \end{aligned}$$

- * P_1 et P_2 se comportent comme des conducteurs parfaits et réfléchissent totalement les ondes (ce sont des miroirs)
- * S transmet une partie des ondes et en réfléchit une autre partie, elle joue le rôle de lame semi-réfléchissante

10- On note R la constante telle que $U = R \langle \vec{E}^2 \rangle$

- * e la différence de position entre P_2 et l'image de P_1 par S

- * T le coefficient de transmission par S et $R = 1 - T$ le coefficient de réflexion en énergie.

La formule de Fresnel est souvent utilisée en optique mais est valable pour toutes les ondes électromagnétiques. On peut l'utiliser ici : on a deux faisceaux qui interfèrent, d'intensités :

$$I_1 = \langle \vec{E}_1^2 \rangle = R \times T \times \frac{E_0^2}{2}$$

\uparrow réflexion sur S \leftarrow traversée de S

Et $I_2 = \langle \vec{E}_2^2 \rangle = T \times R \times \frac{E_0^2}{2} = I_1$

Le déphasage est $\Delta\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = 4\pi \frac{e}{\lambda}$ ($\delta = 2e$ est la différence de marche)

Alors : $\langle \vec{E}^2 \rangle = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi) + I_1 + I_2$

$$= 2RT \frac{E_0^2}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi e}{\lambda}\right) \right)$$

$$= RT E_0^2 \cos^2\left(\frac{2\pi e}{\lambda}\right) \text{ et } U(x) = KRTE_0^2 \cos^2\left(\frac{2\pi(x-a)}{\lambda}\right)$$

On obtient donc un signal périodique en fonction de x de période $\frac{\lambda}{2}$, on lit $4 \frac{\lambda}{2} = 2\lambda = (6,1 - 0,6) \text{ cm} = 5,5 \text{ cm}$

D'où : $f = \frac{c}{\lambda} = \boxed{13,3 \text{ GHz}}$

11 - On a un contraste : $C = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}} = \frac{6 - 2}{6 + 2} = \frac{1}{2}$

Le contraste n'est pas égal à la valeur attendue de 1 ce qui peut

De plus $\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \vec{u}_z = -2E_0 k \cos(\omega t) \cos(kz) \vec{u}_z$

Dans : $\vec{B} = \frac{2E_0 k}{\omega} \sin(\omega t) \cos(kz) \vec{u}_z$

On encore : $\vec{B} = \frac{2E_0}{c} \sin(\omega t) \cos(kz) \vec{u}_z$

Il s'agit d'une onde stationnaire car les variables de temps et l'espace sont découplées.

7 - On a $E^2 = 4E_0^2 \cos^2(\omega t) \sin^2(kx)$

D'où : $\langle E^2 \rangle = 2E_0^2 \sin^2(kx) = E_0^2 (1 - \cos(2kx))$
 $= E_0^2 (1 - \cos(\frac{4\pi x}{\lambda}))$

où λ est la longueur d'onde dans le vide. Donc $\langle E^2 \rangle$ est périodique de période $\frac{\lambda}{2}$. On observe bien une fonction périodique avec $4 \times \frac{\lambda}{2} = (42,8 - 37,3) \text{ cm}$

D'où $\lambda = 2,75 \text{ cm}$ et $f = \frac{c}{\lambda} = 10,9 \text{ GHz}$

8 - On a une double lecture avec une graduation de 1 mm donc $u(5\lambda) = \frac{1 \text{ mm}}{\sqrt{3}}$ soit $u(\lambda) = \frac{1 \text{ mm}}{5\sqrt{3}}$

Alors : $\frac{u(f)}{f} = \frac{u(\lambda)}{\lambda}$ d'où : $u(f) = \frac{f}{\lambda} u(\lambda) = \frac{f^2}{c} u(\lambda)$

Soit : $u_{\text{exp}}(f) = \frac{f^2}{c} \cdot \frac{1 \text{ mm}}{5\sqrt{3}} = 0,5 \text{ GHz}$

On a donc expérimentalement : $f = 10,9 \pm 0,5 \text{ GHz}$

L'écart normalisé vaut : $\chi = \frac{|f - f_{\text{cons}}|}{\sqrt{u_{\text{cons}}^2 + u_{\text{exp}}^2}} = 0,13$

χ est d'ordre 1 donc la mesure est compatible avec les données du constructeur.

9 - Ce montage est analogue à un interféromètre de Michelson :

être dû à une asymétrie de la séparatrice (S) (les coefficients de transmission et réflexion ne sont pas les mêmes dans chaque sens); ou à une "pollution" d'ondes arrivant directement au récepteur depuis l'émetteur sans passer par la séparatrice et les miroirs.

12 - On a vu que $\vec{B}(x < 0, t) = \frac{2E_0}{c} \sin(\omega t) \cos(kx) \vec{u}_y$ en Q6
 Or: $\vec{B}(x=0^+) - \vec{B}(x=0^-) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_x = \mu_0 (\vec{j}_s \cdot \vec{u}_y \vec{u}_z - j_s \cdot \vec{u}_z \vec{u}_y)$
 $= \vec{0}$ (conducteur parfait)

On en déduit que: $\vec{j}_s = -\frac{2E_0}{\mu_0 c} \sin(\omega t) \vec{u}_y$

Ces courants oscillants forment une source de champ magnétique et produisent ainsi l'onde électromagnétique réfléchie (\vec{E}_r, \vec{B}_r).

13 - • Dans le premier cas, le champ \vec{E} va exciter un courant \vec{j}_s qui lui est parallèle et qui peut être transmis par les barreaux.
 La configuration est inchangée par rapport à la figure 1 et $\vec{E}(x > 0) = \vec{0}$

• Dans le cas n°2, le champ \vec{E} ne peut pas exciter \vec{j}_s car il ne peut pas y avoir de courant selon $+\vec{u}_y$. On a alors $\vec{j}_s = \vec{0}$ et tout se passe comme s'il n'y avait pas de grille:

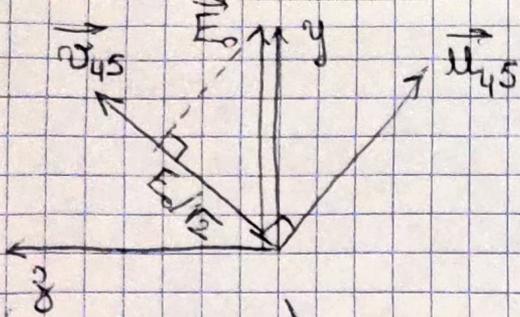
$$\vec{E}(x > 0) = \vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

• Dans le cas n°3, le 1^{er} champ excite une onde selon $+\vec{u}_y$ mais le courant ne peut se propager que selon $\vec{u}_{45} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{u}_y - \vec{u}_z)$.

\vec{j}_s est donc orienté selon \vec{u}_{45} ce qui, par la relation de passage, coupe la composante de \vec{B} perpendiculaire à \vec{u}_{45} et donc la composante de \vec{E} parallèle à \vec{u}_{45} . On a donc:

$$\vec{E}(x > 0) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_{45} = \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - kx) (\vec{u}_y + \vec{u}_z)$$

où les vecteurs sont définis sur le schéma ci-dessous:

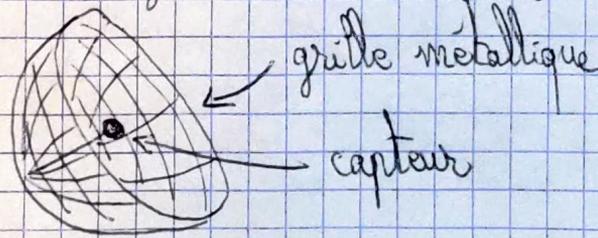


Rq: on peut aussi remarquer que :

$$\vec{E}_0 = \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{u}_{45} + \vec{v}_{45})$$
 et on a donc une combinaison linéaire du cas n°1 et du cas n°2).

14 - Cette grille est analogue à un polariseur.

15 - On doit utiliser une structure métallique. Pour la rendre plus légère on peut la remplacer par une grille métallique avec des mailles carrées (afin de réfléchir les deux directions de polarisation):



II - L'énigme des périties

16 - On a par l'équation de Maxwell - Gauss:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{E} \cdot \vec{u}_x}{\partial x} = 0$$

Donc ρ reste constante et donc nulle ($\rho=0$ avant le passage de l'onde)

Alors on doit avoir $n_e = n_c$. Comme le plasma est froid les cations sont immobiles donc n_c est uniforme et n_e aussi.

n_e est une constante.

17 - On applique le principe fondamental de la dynamique à un électron, soumis à la seule force électrique, dans le référentiel du plasma:

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E}$$

En régime sinusoïdal forcé: $i\omega m_e \vec{v} = -e \vec{E}$

On en sait que $\vec{j} = -ne \vec{v}$ car les cations sont immobiles.

Donc: $\vec{j} = \underline{\underline{\partial_B}} \vec{E}$ où $\underline{\underline{\partial_B}} = \frac{ne^2}{i\omega me}$

18 - On réinjecte dans l'équation de Maxwell-Ampère:

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \underline{\underline{\partial_B}} \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On en prend le rotationnel, et on utilise l'équation de Maxwell-Faraday:

$$\text{rot} \text{rot} \vec{B} = -\mu_0 \underline{\underline{\partial_B}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\text{On } \text{rot} \text{rot} \vec{B} = \underbrace{\text{grad div} \vec{B} - \Delta \vec{B}} = -\Delta \vec{B} = 0 \text{ (équation de Maxwell-Thomson)}$$

On conclut que $\Delta \vec{B} = \mu_0 \underline{\underline{\partial_B}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$

ou encore: $-k^2 = \mu_0 i\omega \underline{\underline{\partial_B}} + \frac{(i\omega)^2}{c^2} = \frac{\mu_0 ne^2}{me} - \frac{\omega^2}{c^2}$

Ainsi: $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ où $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 me}}$

(on a utilisé $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$).

19 - L'onde peut se propager si $\text{Re}(k) \neq 0$ donc si $k^2 > 0$.

Il faut donc que $\omega > \omega_p$

20 - Dans ce cas, on a $k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$ et:

$$v_g^{-1} = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{c} \times \frac{2\omega}{2\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}\right)^{-1} \Rightarrow v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

21 - On a $v_g = c$ dans le vide (la plus grande partie du chemin)

Mais $v_g < c$ dans l'ionosphère.

L'intégrale permet de tenir compte de l'hétérogénéité de v_g .

22 - Quand $\omega \rightarrow \infty$ on a $v_g = c$ et:
 $t(\infty) = \int_0^L \frac{dl}{c} = \frac{L}{c}$. Il s'agit du temps que mettrait

L'onde à atteindre la Terre en l'absence de l'ionosphère (dans le vide).

23. Étant donné que $v_g < c$, on a $\frac{1}{v_g(\omega)} > \frac{1}{v_g(\infty)}$ et donc

$\tau(\omega) = t(\omega) - t(\infty) > 0$. Il s'agit du retard d'arrivée de l'onde causé par la présence de l'ionosphère.

24. On a :

$$\tau(\omega) = \int_0^L \left(\frac{1}{v_g(\omega)} - \frac{1}{c} \right) dl$$

$$= \int_0^L \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega p}{c}\right)^2}} - 1 \right) \frac{dl}{c} = \int_0^L \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega p}{c}\right)^2}} - 1 \right) \frac{dl}{c}$$

Or : $\frac{p}{\omega} = \frac{1}{2\pi f} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{n e^2}{\epsilon_0 m_e}} \approx 90 \text{ Hz}$ avec $n_e \sim 10^{14} \text{ cm}^{-3} \sim 10^2 \text{ m}^{-3}$

D'où $\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 \ll 1$ et $\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p}{\omega}\right)^2$

Ainsi $\tau(\omega) \approx \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{p}{\omega}\right)^2 \times \frac{dl}{c} = \int_0^L \frac{e^2}{8\pi^2 \epsilon_0 m_e c} \times n_e dl \times \frac{1}{f^2}$

On conclut que : $\tau(f) = A \frac{DM}{f^2}$ où $A = \frac{e^2}{8\pi^2 \epsilon_0 m_e c}$

25. On trouve $A = 1,34 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

26. Le temps d'arrivée est décroissant en fonction de la fréquence donc on s'attend à voir les hautes fréquences arriver en premier à la surface de la Terre et les basses fréquences plus tard. C'est bien ce que l'on observe sur la figure.

27. On note : $t_1 = 200 \text{ ms}$ pour $f_1 = 1480 \text{ MHz}$
 $t_2 = 600 \text{ ms}$ pour $f_2 = 1220 \text{ MHz}$

Alors : $t_2 - t_1 = \tau(f_2) - \tau(f_1) = A \cdot DM \left(\frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_1^2} \right)$

D'où : $DM = \frac{\tau(f_2) - \tau(f_1)}{A \left(\frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_1^2} \right)} = 1,3 \cdot 10^{25} \text{ m}^2$

31. On constate que $|\sin(k_x x)|^2$ présente 3 maxima d'amplitude (figures 8a et 8c) donc $m = 3$.

$|\sin(k_z z)|^2$ présente aussi 3 maxima donc $l = 3$ (fig 8a et 8b)

Et $|\cos(k_y y)|^2$ présente deux nœuds (fig 8b et 8c) donc $n = 2$.

En effet les points de coloration du cobalt correspondent aux maxima d'énergie donc aux ventres de l'onde, c'est à dire aux points où le module carré de \vec{E} est maximal.

On a alors $f = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} + \frac{9}{c^2}} = 2,45 \text{ GHz}$ ce qui est

en accord avec la valeur proposée par l'énoncé.

Sur la figure 8b on se trouve en $x = \frac{a}{2}$ donc, comme $m = 3$,

on a $|\sin(k_x x)| = \sin\left(\frac{3\pi}{a} \cdot \frac{a}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

$|\cos(k_x x)| = 0$

Le champ \vec{E} vérifie donc $\vec{E} = E_y \vec{u}_y + E_z \vec{u}_z$

• En $y = 0$ on a $\sin(k_y y) = 0$ et :

$\vec{E} = -E_2 \sin(k_z z) \cos(\omega t) \vec{u}_z$

D'où $\langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{1}{2} E_2^2 \sin^2(k_z z) = \frac{E_2^2}{2} \sin^2\left(\frac{3\pi z}{a}\right)$ ce qui correspond aux observations

• $E_y = 0$ on a $\sin(k_z z) = 0$ et :

$\vec{E} = -E_3 \sin(k_y y) \cos(\omega t) \vec{u}_z$

Et $\langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{1}{2} E_3^2 \sin^2(k_y y) = \frac{E_3^2}{2} \sin^2\left(\frac{2\pi y}{b}\right)$

Cela laisse supposer que $E_3 = 0$.

Mais si on fait la même chose sur la paroi $x = 0$ de 8c on en

déduit alors $E_1 = 0$. Puis $E_2 = 0$ par Maxwell-Gauss

⇒ En fait, $E_2 \neq E_3$ et les maxima sur la paroi $z = 0$ sont nœuds dans les maxima et minima du champ selon \vec{u}_y . Pour le démontrer il faut faire une simulation Python ce qui n'est évidemment pas possible pendant l'épreuve.

On $1 \text{ pc} \cdot \text{cm}^{-3} = 3,1 \cdot 10^{16} \text{ m} \cdot 10^6 \text{ m}^{-3} = 3,1 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-2}$.

D'où: $\boxed{DM = 4,2 \cdot 10^2 \text{ pc} \cdot \text{cm}^{-3}}$

28 - Nous obtenons un ordre de grandeur compatible avec une origine extragalactique.

II - Le four à micro-ondes

29. D'après les relations de passage, on doit avoir continuité du champ électrique tangentiel au niveau des parois métalliques.

On a ainsi en $x = a$: $\forall (y, z, t), E_y(x=a) = E_z(x=a) = 0$

Ceci impose soit $E_2 = E_3 = 0$ (cas inintéressant)

soit $\sin(k_x a) = 0 \Leftrightarrow \boxed{k_x = \frac{n\pi}{a}, n \in \mathbb{N}^*}$

De même la continuité du champ électrique tangentiel en $y = b$ et en $z = d$ impose $\boxed{k_y = \frac{p\pi}{b}; k_z = \frac{q\pi}{d}; (n, p, q) \in \mathbb{N}^{*3}}$

On conclut que seules des valeurs discrètes de k_x, k_y et k_z sont possibles.

30. Nous avons:

$$\Delta E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) E_x$$

Il en est de même pour E_y et E_z , ainsi:

$$\Delta \vec{E} = (\Delta E_x \vec{u}_x + \Delta E_y \vec{u}_y + \Delta E_z \vec{u}_z) = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \vec{E}$$

$$E \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}. \text{ En réinjectant dans l'équation de}$$

$$\text{d'Alembert nous obtenons: } \omega^2 = c^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2).$$

Les fréquences des modes propres sont donc quantifiés:

$$f_{\text{min}} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{d}\right)^2}$$

ou encore: $f_{\text{min}} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{p}{b}\right)^2 + \left(\frac{q}{d}\right)^2}$

33. On a $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \vec{u}_z = \frac{n\tilde{\nu} E_0}{a} \cos\left(\frac{n\tilde{\nu} x}{a}\right) \sin(\omega t) \vec{u}_z$

On intègre: $\vec{B} = + \frac{n\tilde{\nu} E_0}{a\omega} \cos\left(\frac{n\tilde{\nu} x}{a}\right) \cos(\omega t) \vec{u}_z$

L'amplitude maximale est $B_0 = \frac{n\tilde{\nu} E_0}{a\omega}$, or par (Q30) avec $m=l=0$ on a $\omega^2 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{n\tilde{\nu}}{a}\right)^2$ soit $\frac{n\tilde{\nu}}{a\omega} = \frac{1}{c}$ (relation de dispersion)

Et donc: $\boxed{B_0 = \frac{E_0}{c}}$ volume entre x et $x+dx$

34. On a $W = \int_0^a \left(\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 \right) \times S dx$

U_{em} densité d'énergie électromagnétique

Or $U_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \sin^2\left(\frac{n\tilde{\nu} x}{a}\right) \sin^2(\omega t) + \frac{B_0^2}{2\mu_0} \cos^2\left(\frac{n\tilde{\nu} x}{a}\right) \cos^2(\omega t)$
 $= \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \left[\sin^2\left(\frac{n\tilde{\nu} x}{a}\right) \sin^2(\omega t) + \cos^2\left(\frac{n\tilde{\nu} x}{a}\right) \cos^2(\omega t) \right]$

On intègre sur un nombre entier de demi-longueurs d'ondes donc on peut utiliser $\langle \cos^2 \alpha \rangle = \langle \sin^2 \alpha \rangle = \frac{1}{2}$ pour calculer l'intégrale

et: $W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \left(\frac{1}{2} \sin^2 \omega t + \frac{1}{2} \cos^2 \omega t \right) \times Sa$

$W = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \times Sa = \frac{B_0^2}{4\mu_0} \times Sa$

On constate que W ne dépend pas du temps.

35. On a $\left\| \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| \approx \epsilon_0 \omega E_0$ et $\|\vec{j}\| = \sigma \|\vec{E}\| \approx \sigma E_0$

Donc, si $\epsilon_0 \omega \ll \sigma$ on peut négliger le terme de courant de déplacement dans l'équation de Maxwell - Ampère et:

$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$

Dans le conducteur on a $\frac{\epsilon_0 \omega}{\sigma} \sim \frac{10^{-11} \times 10^{10}}{10^6} \sim 10^{-7} \ll 1$

donc l'approximation est vérifiée.

36. On peut alors reprendre le calcul de Q18 en remplaçant la conductivité complexe $\underline{\sigma}_B$ par σ et en négligeant le terme de courant de déplacement, on obtient:

$$\Delta \vec{B} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

La dérivée temporelle est d'ordre 1 donc l'équation n'est pas invariante par renversement du temps: elle est irréversible.

C'est une équation de diffusion; elle décrit également la conduction thermique dans un solide.

37. On réinjecte dans l'équation de diffusion et on simplifie par $B_0 e^{i\omega t}$:

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) = i\omega \mu_0 \sigma f(x)$$

On a par ailleurs $f(0) = B_0$ par continuité du champ \vec{B} .

On peut écrire: $f''(x) + \alpha^2 f(x) = 0$ où $\alpha^2 = e^{+i\frac{\pi}{2}} \mu_0 \sigma \omega$

$$\text{D'où } \alpha = \pm e^{+i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\mu_0 \sigma \omega} = \pm (1+i) \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}} = \pm \frac{1+i}{\delta}$$

$$\text{avec } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$$

$$\text{Alors } f(x) = \underline{A} e^{\frac{(1+i)x}{\delta}} + \underline{B} e^{-\frac{(1+i)x}{\delta}}$$

Or f ne peut pas diverger pour $x \rightarrow +\infty$ donc $\underline{A} = 0$ et la condition aux limites impose $\underline{B} = B_0$. On a ainsi:

$$\vec{B} = B_0 \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) e^{-x/\delta} \vec{u}_z$$

38. On observe un effet de peau: il y a une propagation du champ vers le conducteur accompagnée d'une atténuation exponentielle de son amplitude sur une distance caractéristique δ .

39. Cette puissance volumique est $P_{\text{vs}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma \vec{E}^2 = \frac{j^2}{\sigma}$

40. On sait que $\mu_0 \vec{j} = \text{rot } \vec{B} = -\frac{\partial B_z}{\partial x} \vec{u}_y$

Donc $\vec{f} = \frac{B_0}{\mu_0} \times \frac{1+i}{\delta} e^{-(1+i)\frac{x}{\delta}} e^{i\omega t} = \sqrt{2} \cdot \frac{B_0}{\mu_0 \delta} e^{i\omega t - (1+i)\frac{x}{\delta} + \frac{\pi}{4}} \rightarrow \text{My}$

Et $\vec{j} = \frac{\sqrt{2} B_0}{\mu_0 \delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) e^{-\frac{x}{\delta}} \rightarrow \text{My}$

La puissance dissipée entre x et $x+dx$ est en moyenne:

$$dP = \langle \vec{f} \cdot \vec{j} \rangle \times S dx = \frac{S}{\sigma} \times \frac{2B_0^2}{\mu_0^2 \delta^2} \underbrace{\langle \cos^2\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) \rangle}_{= 1/2} e^{-\frac{2x}{\delta}} dx$$

$$dP = \frac{S B_0^2}{\sigma \mu_0^2 \delta^2} e^{-\frac{2x}{\delta}} dx$$

On intègre pour obtenir la puissance dissipée dans une paroi:

$$P_{\text{paroi}} = \int_0^{\infty} dP = \frac{S B_0^2}{\sigma \mu_0^2 \delta^2} \times \frac{\delta}{2} = \frac{S B_0^2}{2 \sigma \mu_0^2 \delta}$$

On conclut que la puissance totale dissipée est:

$$P_{\text{tot}} = 2P_{\text{paroi}} = \frac{S B_0^2}{\sigma \mu_0^2 \delta} \quad \text{ou} \quad \sigma = \frac{2\delta^2}{\mu_0 \omega}$$

D'où:

$$P_{\text{tot}} = \frac{S B_0^2 \omega \delta}{2 \mu_0}$$

41. On a alors: $Q = 2\pi \times \frac{W}{P_{\text{tot}} \times \frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega W}{P_{\text{tot}}} = \frac{\frac{B_0^2}{4\mu_0} S a \omega}{\frac{1}{2\mu_0} S B_0^2 \omega \delta} = 2,2 \cdot 10^4$

On trouve $Q = \frac{a}{2\delta}$

42. On a alors: $Q = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}} = \frac{a}{2} \sqrt{\pi \mu_0 \sigma} = 2,2 \cdot 10^4$

43. On peut écrire, comme $Q \gg 1$:

$$W(t+T) \approx W(t) - \frac{dW}{dt} \cdot T$$

Or $W(t+T) - W(t) = -Q \times W$ par définition.

Donc $\frac{dW}{dt} \cdot T + \frac{W}{Q} = 0$ soit $W(t) = W(t=0) e^{-t/Q}$

$$\text{où } \tau = T \times Q = \boxed{\frac{2\pi}{\omega} \times Q}$$

44. On trouve $\tau = \frac{Q}{f} = 1,4 \mu\text{s}$

Cette durée est trop faible pour expliquer les observations (durée de 400 ms).

Rq: Il a été montré que l'atténuation observée vient du magnétion du fer (source du champ magnétique).