DM17 - Correction

I - Conductivité électrique dans le modèle de Drude

1. Dans le référentiel lié au métal, supposé galiléen, l'électron est soumis à son poids négligeable, la force de Coulomb qui s'applique à l'électron $\vec{f_c} = -e\vec{E}$ et la force d'interaction avec le réseau métallique $\vec{f_D} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$. Le principe fondamental de la dynamique donne : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$

En régime stationnaire $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ et $\boxed{\vec{v} = -\frac{e\tau}{m}\vec{E}}$

Le matériau est alors le siège d'une densité volumique de courant $\vec{j} = -ne\vec{v}$; on a ainsi $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ où γ est la conductivité électrique du métal : $\boxed{\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}}$

II - Interprétation de la durée τ

2. Nous avons :

$$\vec{p_i}(t+dt) = \mathbb{P}(\text{collision})\,\underbrace{\vec{p}_{i,0}^{\,+}}_{\text{quantité de mouvement après collision}} + \underbrace{\left(1-\mathbb{P}(\text{collision})\right)\vec{p_i}(t)}_{\text{quantité de mouvement en l'absence de collision}} + \underbrace{\vec{f_c}\,dt}_{\text{variation de quantité de mouvement pendant } dt \text{ due au champ } \vec{E}}$$

probabilité de collision $\mathbb{P}(\text{collision}) = \frac{dt}{\theta}$

Ici on a supposé que $\vec{p_i}(t+dt)$ est l'espérance de la quantité de mouvement de l'électron i (on étudie le mouvement moyen des électrons)

3. On en déduit :

$$\vec{p_i}(t+dt) - \vec{p_i}(t) = \frac{dt}{\theta}\left(\vec{p}_{i,0}^{\,+} - \vec{p_i}(t)\right) + \vec{f}_{c,i}\,dt$$

On somme sur tous les électrons :

$$\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = \frac{dt}{\theta}\left(\left(\sum_i \vec{p}_{i,0}^{\,+}\right) - \vec{p}(t)\right) + \vec{f_c}\,dt$$

Or $\vec{p}_{j0}^{+}$ est a priori de direction aléatoire donc $\sum_i \vec{p}_{j0}^{+} \simeq \vec{0}$ et on peut supposer que : $\boxed{\dfrac{d\vec{p}}{dt} = -\dfrac{\vec{p}}{\theta} + \vec{f}_c}$

On retrouve le résultat de Q1 avec $\boxed{\theta = \tau}$

4. On peut écrire, en supposant les collisions indépendantes :

$$\mathbb{P}(\text{pas de collision avant } t+dt) = \mathbb{P}(\text{pas de collision avant } t) \times \mathbb{P}(\text{pas de collision entre } t \text{ et } t+dt)$$

Ce qui se réécrit : $\Pi(t+dt) = \Pi(t) \times \left(1 - \dfrac{dt}{\theta}\right)$

Ou encore : $\Pi(t+dt) - \Pi(t) = -\dfrac{dt}{\theta}\Pi(t)$

Soit : $\dfrac{d\Pi}{dt} + \dfrac{\Pi}{\theta} = 0$. Or $\Pi(t=0) = 1$ donc on conclut que $\boxed{\Pi(t) = e^{-t/\theta}}$.

La probabilité que la première collision se produise entre t et $t+dt$ s'écrit :

$$\delta\mathbb{P}_{1^e c} = \underbrace{\Pi(t)}_{\text{pas de collision avant } t} \times \underbrace{\frac{dt}{\theta}}_{\text{collision entre } t \text{ et } t+dt} = \frac{dt}{\theta} e^{-t/\theta}$$

La durée moyenne entre deux collisions est l'espérance du temps t pondéré par cette probabilité :

$$t_{moy} = \int_0^\infty t \times \delta\mathbb{P}_{1^e c} = \int_0^\infty \frac{t}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}} dt = \theta \int_0^\infty u e^{-u} du$$

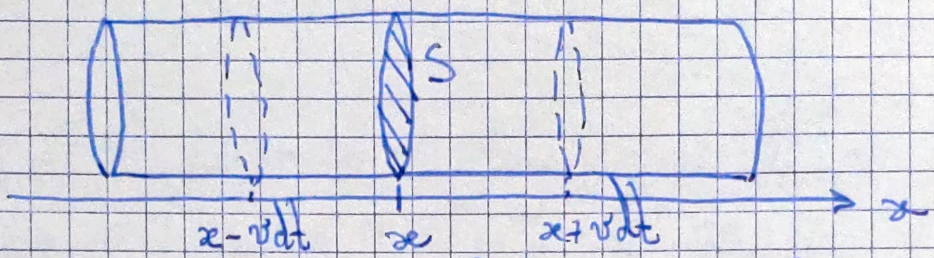
$$= \theta \times \Gamma(2) = \theta \times 1! = \theta = \tau$$

(Γ fonction gamma d'Euler)

On en déduit que τ est la durée moyenne entre deux collisions pour un électron.

III - Conductivité thermique

5. On étudie les électrons qui traversent une section de métal de surface S à l'abscisse x :



Entre t et $t+dt$, la moitié des électrons qui se trouvaient entre $x-v\,dt$ et x ont avancé de $v\,dt$ vers la droite et ont donc traversé la surface S, ce qui correspond à un transfert thermique :

$$\delta Q_{\text{droite}} = \underbrace{S\,v\,dt \times n}_{\substack{\text{nombre d'}e^- \\ \text{entre } x-v\,dt \text{ et } x}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\text{la moitié des} \\ e^- \text{ va vers la droite}}} \times \underbrace{\mathcal{E}\left(T\left(x-\frac{v\,dt}{2}\right)\right)}_{\substack{\text{énergie des électrons} \\ \text{concernés}}}$$

De même pour les électrons situés dans l'autre sens :

$$\delta Q_{\text{gauche}} = S\,v\,dt \times n \times \frac{1}{2} \times \mathcal{E}\left(T\left(x+\frac{v\,dt}{2}\right)\right)$$

Or la densité de courant thermique est définie telle que son flux à travers S soit la puissance qui traverse S vers la droite :

$$j_q \times S \times dt = \delta Q_{\text{droite}} - \delta Q_{\text{gauche}}$$
$$= S\,v\,dt \times n \times \frac{1}{2}\left[\mathcal{E}\left(T\left(x-\frac{v\,dt}{2}\right)\right) - \mathcal{E}\left(T\left(x+\frac{v\,dt}{2}\right)\right)\right]$$

D'où :

$$j_q = \frac{1}{2} n v \left[\mathcal{E}\left(T\left(x-\frac{v\tau}{2}\right)\right) - \mathcal{E}\left(T\left(x+\frac{v\tau}{2}\right)\right)\right]$$

en prenant $dt = \tau$: en effet on souhaite que pendant dt les électrons aient un choc à la fin du mouvement pour transmettre leur énergie au réseau à l'endroit de leur nouvelle position.

6. On en déduit, en supposant que la température varie lentement dans l'espace, par un développement de Taylor :

$$j_q = -\frac{1}{2} n v \times v\tau \, \frac{d\mathcal{E}}{dT} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{n v^2 \tau}{2} c_v \frac{\partial T}{\partial x}$$

On retrouve la loi de Fourier dans le cas unidimensionnel avec $j_q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$

et $\boxed{\lambda = \frac{1}{2} n v^2 \tau c_v}$

7. Dans le modèle du gaz parfait (en négligeant les interactions entre électrons), on peut utiliser le théorème d'équipartition, en effet l'énergie d'un électron est simplement son énergie cinétique selon $\vec{u_x}$ et donc : $\mathcal{E} = \frac{1}{2} m v^2$

Comme les électrons sont supposés indépendants et à l'équilibre avec le réseau cristallin à la température T : $\langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T$

On en déduit que $\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{2} k_B T$ et $c_v = \frac{1}{2} k_B$

et que $\langle v^2 \rangle = \frac{k_B T}{m}$

Ainsi : $\lambda = \frac{1}{2} n \cdot \frac{k_B T}{m} \cdot \tau \cdot \frac{1}{2} k_B$ soit $\boxed{\lambda = \frac{n k_B^2 \tau T}{4m}}$

IV - Loi de Wiedemann - Franz

8. On a alors : $\frac{\lambda}{\gamma T} = \frac{n k_B^2 \tau T}{4m} \times \frac{m}{n e^2 \tau} \times \frac{1}{T} = \frac{1}{4} \left(\frac{k_B}{e}\right)^2$

En 3D, on utilisera toujours $\langle v_x^2 \rangle = \frac{k_B T}{m}$ mais on aura en revanche $\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$ donc $c_v = \frac{3}{2} k_B$. Ainsi on trouve une valeur de c_v (et donc de λ) trois fois plus importante : $\lambda = \frac{1}{2} \frac{n k_B T \tau}{m} c_v = \frac{3 n k_B^2 \tau T}{4m}$

et $\boxed{\frac{\lambda}{\gamma T} = \frac{3}{4} \left(\frac{k_B}{e}\right)^2}$

9. On a désormais $\lambda = \frac{1}{2} n \cdot v_F^2 \tau \overbrace{\frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{k_B^2 T}{\varepsilon_F}}^{c_v} = \frac{\pi^2}{2} \frac{k_B^2 T n \tau}{m}$

car $\varepsilon_F = \frac{1}{2} m v_F^2$. (On a repris le résultat de Q6).

On peut ainsi conclure que : $\boxed{\mathcal{K} = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{k_B}{e}\right)^2}$ dans le cadre de ce modèle quantique.

10. On a $\frac{\mathcal{K}_{quantique}}{\mathcal{K}_{classique}} = \frac{\pi^2}{2} \times 4 = 2\pi^2 \simeq 20$ donc les effets quantiques ne sont pas du tout négligeables. Ceci s'explique par le fait que le niveau d'énergie des électrons ε_F et l'écart entre niveaux (supposés du même ordre de grandeur) est grand devant $k_B T$.