DM19 - Correction

I - Équations simplifiées du lidar atmosphérique

1. L'impulsion a un temps de parcours $\Delta t = \frac{2z}{c}$ car le signal doit parcourir un aller-retour. Ainsi l'impulsion est reçue à la date $\boxed{t_0 + \frac{2z}{c}}$

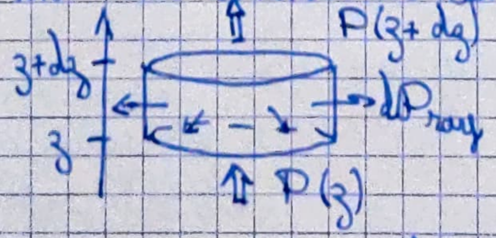
2. On reçoit le signal des molécules telles que l'impulsion reçue a été émise entre $t = t_0$ et $t = t_0 + t_l$ d'où :
$$t_l = \frac{2\Delta z}{c} \quad \text{soit} \quad \Delta z = \frac{t_l c}{2} = \frac{7\cdot 10^{-9}\cdot 3\cdot 10^{8}}{2} = 1{,}0\ \text{m}$$

3. L'altitude maximale sondée est telle que l'impulsion revient juste avant l'envoi de l'impulsion suivante, soit $\frac{2z_{max}}{c} = T = \frac{1}{F_l}$

D'où $z_{max} = \frac{c}{2f_l} = \frac{3\cdot 10^{8}}{40} \sim 10^{7}\ \text{m} \gg 12\ \text{km}$

Donc on peut sonder sans problème jusqu'à 12 km.

4. Par conservation de l'énergie, la puissance arrivant en z se décompose en une somme de celle ressortant en $z+dz$ et celle rayonnée :



$$P(z) = P(z+dz) + dP_{ray} \Rightarrow \frac{dP}{dz}dz = -dP_{ray} = -\alpha(z)P(z)\,dz$$

D'où : $\frac{dP}{dz} + \alpha(z)P(z) = 0$

Ou encore : $\frac{d}{dz}\ln P(z) = -\alpha(z)$

On en déduit : $\ln P(z) = \ln(P_0) - \int_0^z \alpha(z)\,dz$, soit :

$$\boxed{P(z) = P_0 \exp\left(-\int_0^z \alpha(u)\,du\right)}$$

5. On peut écrire : $P_{rd} = \underbrace{\int_z^{z+\Delta z} k \times dP_{ray}}_{\text{puissance rétrodiffusée entre } z \text{ et } z+\Delta z}$

Alors : $P_{rd} = k \int_z^{z+\Delta z} \alpha(z') P(z') dz'$

$\simeq k \; \Delta z \times \alpha(z) P(z)$

en supposant Δz petit devant l'échelle de variation de $P(z)$ (de telle sorte que l'intégrand soit constant). Nous avons alors en utilisant $\Delta z = \frac{ct_i}{2}$: $\boxed{P_{rd}(z) = \frac{1}{2} c t_i \beta(z) P(z)}$ où $\beta = k\alpha$

6. On a :

$P_{\text{détecteur}} = e^{-\int_0^z \alpha(u)du} \times \frac{1}{2} c t_i \beta(z) P(z) \times \frac{KA}{z^2}$

$= \underbrace{P_{rd}(z)}_{\text{puissance rétrodiffusée en } z} \times \underbrace{e^{-\int_0^z \alpha(u)du}}_{\text{pertes par rayonnement sur le trajet retour}} \times \underbrace{\frac{K}{z^2}}_{\text{facteur lié à l'amplitude de l'onde sphérique générée lors de la diffusion}} \times \underbrace{A}_{\text{énergie reçue proportionnelle à l'aire du capteur}}$

II - Dipôle rayonnant

7. On a $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ d'où $\boxed{\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}}$

8. • $l_0 \ll \lambda \Leftrightarrow l_0 \ll \frac{2\pi c}{\omega} \Leftrightarrow l_0 \cdot \frac{\omega}{2\pi} \ll c \Leftrightarrow v \ll c$
où v est la vitesse de la charge en mouvement. Cette

hypothèse revient donc à considérer que l'électron est non relativiste.

- $l_0 \ll r$ revient à considérer que l'on se trouve loin par rapport à la taille de la molécule diffusante, qui peut être considérée comme ponctuelle.

9. La zone de rayonnement est définie par $r \gg \lambda$. Ici on est dans le visible donc $\lambda \sim 500$ nm, ainsi on est clairement dans cette zone dans les conditions d'observation du lidar.

10. Les courants équivalents au dipôle sont orientés sur l'axe (Ox), ainsi le plan contenant M et (Ox) est un plan de symétrie de la distribution de courants et $\vec{B}(M)$ est normal à ce plan. Donc $\vec{B}$ est orienté selon $\vec{u_\varphi}$.

11. Ce terme indique la propagation du champ électromagnétique rayonné à la vitesse c dans le sens des r croissants.

12. L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit $\vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$

donc $[\vec{B}] = m \cdot [\mu_0] \cdot A \cdot m^{-2} = [\mu_0] \cdot A \cdot m^{-1}$

$= [\mu_0] \cdot C \cdot s^{-1} \cdot m^{-1}$ car $1A = 1C \cdot s^{-1}$

Or $\left[\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right] = C \cdot m \cdot s^{-2}$

Donc $[\vec{B}] = [\alpha] \cdot [\mu_0] \cdot C \cdot s^{-2}$

On conclut que $[\alpha] \cdot C \cdot s^{-2} = C \cdot s^{-1} \cdot m^{-1}$ d'où $[\alpha] = s \cdot m^{-1}$

α est bien homogène à l'inverse d'une vitesse.

13. L'onde ayant localement la structure d'une onde plane progressive : $\vec{B} = \frac{1}{c}(\vec{u_r} \wedge \vec{E})$

D'où $c\vec{u_r} \wedge \vec{B} = \vec{u_r} \wedge (\vec{u_r} \wedge \vec{E}) = \underbrace{(\vec{E} \cdot \vec{u_r})}_{= 0 \text{ (onde transverse)}} \vec{u_r} - \overbrace{(\vec{u_r} \cdot \vec{u_r})}^{= 1} \vec{E}$

Ainsi $\vec{E} = -c\,\vec{u_r} \wedge \vec{B} = \boxed{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r}\,p''\left(t-\frac{r}{c}\right)\vec{u_\theta}}$

III - Puissance rayonnée

14. $\vec{R} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\wedge\vec{B} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c}\frac{\sin^2\theta}{r^2}\,p''\left(t-\frac{r}{c}\right)^2 \cdot \vec{u_r}$

15. On a alors : $p''\left(t-\frac{r}{c}\right) = -e L_0 \omega^2 \cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) = -p_0\omega^2\cos\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$

D'où $\left\langle p''\left(t-\frac{r}{c}\right)^2\right\rangle = \frac{p_0^2}{2}\omega^4$

Et : $\langle\vec{R}\rangle = \frac{\mu_0 p_0^2\omega^4}{32\pi^2 c r^2}\sin^2\theta\,\vec{u_r}$

Alors : $\langle P_m\rangle = \iint_{\text{sphère}} \langle\vec{R}\rangle\cdot\vec{dS} = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{\mu_0 p_0^2\omega^4}{32\pi^2 c r^2}\sin^2\theta\cdot r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

$$= \frac{\mu_0 p_0^2\omega^4}{32\pi^2 c}\times 2\pi\times\int_0^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta$$

$$\int_0^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta = \int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta = \int_{-1}^{1}(1-u^2)\,du = 2\int_0^1(1-u^2)\,du = \frac{4}{3}$$

Donc : $\boxed{\langle P_m\rangle = \frac{\mu_0 p_0^2\omega^4}{12\pi c}}$

16. On n'a pas d'accumulation de puissance ou d'absorption dans la sphère, ainsi l'intégralité de la puissance rayonnée en O est transmise à travers la sphère de rayon r.

17. Alors $p_0^2 = \frac{e^4\vec{E_0}^2}{m^2\omega_0^4}$ et $\langle P_m\rangle = \frac{\mu_0 e^4 \vec{E_0}^2}{12\pi c m^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4$

De plus le champ émis par le laser étant une onde plane progressive monochromatique on a vu que $\mathcal{E}_0 = \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0\cdot\vec{E_0}^2}_{\langle u_{em}\rangle}\times c$ dans le cours

Et on remarque que $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$ si bien que :

$$\langle \mathcal{P}_m \rangle = \frac{e^4 \mu_0}{12\pi c m^2} \times \underbrace{\mu_0 c^2}_{1/\varepsilon_0} \times \frac{2\mathcal{E}_0}{c} \times \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 = \sigma \mathcal{E}_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4$$

avec $\boxed{\sigma = \frac{\mu_0^2 e^4}{6\pi m^2}}$

18. La puissance rayonnée par les molécules est alors, entre z et $z+dz$:

$$d\mathcal{P}_{ray} = \underbrace{S\,dz \times n(z)}_{\text{nombre de molécules entre } z \text{ et } z+dz} \times \underbrace{\langle \mathcal{P}_m \rangle}_{\text{puissance rayonnée par 1 molécule}}$$

$$d\mathcal{P}_{ray} = n(z) \cdot S \cdot \sigma\, \mathcal{E}_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 dz = n(z)\,\sigma \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \mathcal{P}(z)\,dz$$

avec $\mathcal{P}(z) = S\,\mathcal{E}_0$ la puissance du faisceau laser à travers S.

Alors on retrouve : $d\mathcal{P}_{ray} = \alpha(z)\,\mathcal{P}(z)\,dz$ avec :

$$\boxed{\alpha(z) = \sigma\, n(z) \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}$$