Correction - TD19

1- Antenne assimilable à un dipôle oscillant

1. La longueur l doit être petite devant la longueur d'onde λ, ainsi que devant la distance entre l'antenne et le point d'observation r. $l \ll \lambda$ et $l \ll r$.

2. On a en 3D : $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$.

Ici, il s'agit de la même équation mais à une dimension :

* $\dfrac{\partial \lambda}{\partial t}$ indique la variation temporelle locale de la densité linéique de charge
* $\dfrac{\partial I}{\partial z}$ indique la divergence de courant à la cote z : si $\dfrac{\partial I}{\partial z} < 0$ le courant converge en z et apporte de la charge ; sinon il diverge.

On a alors $\dfrac{\partial \lambda}{\partial t} = -\dfrac{\partial I}{\partial z} = I_0 \cos(\omega t) \times \dfrac{2}{l} \dfrac{\partial |z|}{\partial z}$

Or $\dfrac{\partial |z|}{\partial z} = \begin{cases} 1 & \text{si } z > 0 \\ -1 & \text{si } z < 0 \end{cases}$ donc $\dfrac{\partial \lambda}{\partial t} = \dfrac{2 I_0}{l} \cos(\omega t) \underbrace{\operatorname{sgn}(z)}_{\text{fonction signe}}$

Et en intégrant : $\boxed{\lambda(z,t) = \dfrac{2 I_0}{l \omega} \sin(\omega t) \operatorname{sgn}(z)}$

3. À un instant t, la partie $z > 0$ et la partie $z < 0$ de l'antenne portent des charges opposées $+q(t)$ et $-q(t)$

On a : $q(t) = \lambda(z>0, t) \times \underbrace{\dfrac{l}{2}}_{\text{longueur de la branche } z>0} = \dfrac{I_0}{\omega} \sin(\omega t)$

Par définition le moment dipolaire est $\vec{p}(t) = q(t) \times \overrightarrow{NP}$

où N est le barycentre des charges négatives en $z = -\frac{l}{4}$

P ——————————— positives ——— $z = +\frac{l}{4}$.

D'où $\overrightarrow{NP} = \frac{l}{2}\vec{e_z}$ et $\boxed{\vec{p}(t) = \frac{I_0 l}{2\omega}\sin(\omega t)\vec{e_z}}$

2 - Positionnement par comparaison de puissance

1. Notons K la constante de proportionnalité, on aura alors

$$P_A = \frac{K}{x^2 + (y-d)^2} \qquad P_B = \frac{K}{(x-d)^2 + y^2}$$

$$P_C = \frac{K}{x^2 + (y+d)^2} \qquad P_D = \frac{K}{(x+d)^2 + y^2}$$

Alors $\frac{1}{P_A} - \frac{1}{P_C} = (y-d)^2 - (y+d)^2 = 2y \times (-2d) = -4yd$

De même $\frac{1}{P_B} - \frac{1}{P_D} = (x-d)^2 - (x+d)^2 = -4xd$

D'où : $K_1 = \frac{1/P_A - 1/P_C}{1/P_B - 1/P_D} = \frac{y}{x}$.

On remarque qu'on a la même configuration pour A, B, E et F en faisant l'opération $x \leftarrow x+d$ et $y \leftarrow y+d$ ainsi :

$$K_2 = \frac{1/P_E - 1/P_B}{1/P_F - 1/P_A} = \frac{y-d}{x-d}.$$

2. On a alors $y = K_1 x$ et $y - d = K_2(x-d)$

D'où $K_1 x - d = K_2 x - K_2 d$ soit $\boxed{x = \frac{K_2 - 1}{K_2 - K_1} d}$

et $\boxed{y = \frac{K_2 - 1}{K_2 - K_1} . K_1 d}$ On peut ainsi déterminer la position du téléphone à partir des puissances reçues par chaque antenne.

3. Le déphasage φ_i du signal reçu par l'antenne i est relié à

la distance r_i à l'antenne : $\varphi_i = k r_i = 2\pi \cdot \frac{f}{c} \cdot r_i$.
Connaissant la fréquence f et mesurant φ_i, on trouve donc r_i.
Si on a un nombre suffisant d'antennes, on pourra ainsi déterminer la position du téléphone.

3 - Diffusion de la lumière par des particules chargées

1. Par la relation de structure :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e_x} \wedge \vec{E}}{c} = -\frac{E_0}{c} e^{i(kx-\omega t)} \vec{e_y}.$$

2. Les charges sont soumises à :
   * la force de rappel élastique $\vec{F_r} = -m\omega_0^2 \cdot \vec{r}$.
   * la force de frottement que l'on néglige
   * la force de Lorentz $\vec{F_L} = -q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

Or les charges liées sont non relativistes donc :

$\|\vec{v} \wedge \vec{B}\| \simeq v \cdot \|\vec{B}\| \simeq \frac{v}{c} \|\vec{E}\| \ll \|\vec{E}\|$ et on peut négliger la force magnétique.

On applique le PFD aux charges liées dans le référentiel du noyau : $m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2 \vec{r} - q\vec{E}$

En complexes : $-m(\omega^2 - \omega_0^2) \underline{\vec{r}} = -q E_0 e^{i(kx-\omega t)} \vec{u_z}$

D'où : $\boxed{\underline{\vec{r}} = \frac{qE_0}{m} \times \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} e^{i(kx-\omega t)} \vec{u_z}}$

3. Comme $\omega_0 \gg \omega$ on a $\underline{\vec{r}} \simeq -\frac{qE_0}{m\omega_0^2} e^{i(kx-\omega t)} \vec{u_z}$

Alors $\vec{p} = -q \times \vec{r} = \frac{q^2 E_0}{m\omega_0^2} \cos(kx - \omega t) \vec{u_z}$.

D'où $\vec{p} = p(\omega) \cos(\omega t) \vec{u_z}$ en utilisant l'approximation du dipôle oscillant ($r \ll \lambda$ donc $kx \simeq 0$). On utilise alors (3) :

$$\vec{\Pi} = \frac{\mu_0 \omega^4}{16\pi^2 r^2 c} \times \left(\frac{q^2 E_0}{m\omega_0^2}\right)^2 \times \sin^2\theta \times \cos^2\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{e_r} .$$

La puissance totale moyenne rayonnée est l'intégrale de $\langle\vec{\Pi}\rangle$ sur toute une sphère :

$$\mathcal{P}_{tot} = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \langle\vec{\Pi}\rangle \cdot \vec{dS} = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \langle\vec{\Pi}\rangle \cdot \vec{e_r} \times r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 q^4 E_0^2 \omega^4}{16\pi^2 c\, m^2 \omega_0^4} \times 2\pi \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{moyenne de } \cos^2} \times \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta$$

Or : $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta = \int_0^{\pi} (1 - \cos^2\theta)\sin\theta \, d\theta = \int_{-1}^{1} (1 - u^2)\, du$

$$= 2\int_0^1 (1 - u^2)\, du = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$$

D'où : $\displaystyle\mathcal{P}_{tot} = \frac{\mu_0 q^4 E_0^2 \omega^4}{16\pi c\, m^2 \omega_0^4}$

4. On a $\displaystyle\mathcal{P}_{tot} \propto \omega^4 \propto \frac{1}{\lambda^4}$.

Donc $\displaystyle\frac{\mathcal{P}_{bleu}}{\mathcal{P}_{rouge}} = \left(\frac{\lambda_{rouge}}{\lambda_{bleu}}\right)^4 \simeq 2^4 = 16$

Ainsi le bleu est beaucoup plus diffusé que le rouge, d'où la couleur bleue du ciel.

4 - Calcul classique de la durée de vie d'une transition atomique

1. On applique le PFD à l'électron dans le référentiel du noyau supposé galiléen. L'électron est soumis à la seule force électrostatique : $\displaystyle m\vec{a} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$

Ainsi, en notant $\vec{a} = -a\,\vec{e_r}$: $a = \dfrac{e^2}{m 4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

De plus $a = \dfrac{v^2}{r}$ car le mouvement est circulaire uniforme, donc

$v = \sqrt{ra} = \dfrac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m r}}$. Enfin l'énergie mécanique est

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

Pour $r = 0{,}1$ nm $= 10^{-10}$ m on trouve :

$a = 2{,}5 \cdot 10^{22}\ m\cdot s^{-2}$; $v = 1{,}6 \cdot 10^{6}\ m\cdot s^{-1}$ et $E = -7{,}2\,eV$.

2. On a ici un dipôle $\vec{p}(t) = -e r \vec{e_r}$ et donc $\ddot{\vec{p}}(t) = +ea\vec{e_r}$

d'où $\|\ddot{\vec{p}}(t)\|^2 = (ea)^2 = c^{ste}$.

En utilisant la formule de Larmor on trouve que la puissance rayonnée est :

$$P_m = \frac{e^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \times \frac{e^4}{16\pi^2\varepsilon_0^2 m^2 r^4}$$

$$= \frac{e^6}{96\pi^3\varepsilon_0^3 m^2 c^3 r^4}.$$

Or la période du mouvement T est telle que $a = r\omega^2 = r\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$

d'où $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{r}{a}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{4\pi\varepsilon_0 m r^3}{e^2}}$

L'énergie perdue sur un tour est alors :

$$\Delta E = -P_m \times T = -\frac{e^5}{24\pi^{3/2}\varepsilon_0^{5/2} m^{3/2} r^{5/2} c^3}$$

Et :

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{e^3}{8\sqrt{\pi}\,\varepsilon_0^{3/2} m^{3/2} r^{3/2} c^3} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \times \left(\frac{e^2}{m r \varepsilon_0 c^2}\right)^{3/2}$$

Rq : ici on peut vérifier que l'expression est homogène car

* $\dfrac{e^2}{r\varepsilon_0}$ est homogène à une énergie $\left(\sim \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)$
* mc^2 est aussi homogène à une énergie $(E = mc^2)$.

3. Comme l'énergie de l'orbite change, le rayon ne peut pas être constant car $E = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$ donc $r = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 E}$.

On en déduit par différentielle logarithmique : $\frac{\Delta r}{r} = -\frac{\Delta|E|}{|E|}$.

signe - car $E<0$

d'où $\frac{\Delta r}{r} = -\frac{\Delta E}{E} = -4{,}7\cdot 10^{-7}$ en faisant l'application numérique.

4. On constate $\frac{\Delta r}{r} \ll 1$, or on a $\Delta r = r(t+T) - r(t)$.

$$\simeq T \times \frac{dr}{dt}$$

D'où : $T\cdot\frac{dr}{dt} = r \times \frac{\Delta r}{r}$

$$= -r \times \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \times \left(\frac{e^2}{m r \varepsilon_0 c^2}\right)^{3/2}$$

Ainsi on a $\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{r}} \times \frac{1}{8\sqrt{\pi}\,T} \times \left(\frac{e^2}{m\varepsilon_0 c^2}\right)^{3/2}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{r}} \times \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \times \left(\frac{e^2}{m\varepsilon_0 c^2}\right)^{3/2} \times \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m r^3}\right)^{1/2}$$

$$= -\frac{1}{r^2} \times \frac{1}{32\pi^2} \times \frac{e^4}{m^2\varepsilon_0^2 c^3}$$

D'où $3r^2\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(r^3) = -\frac{3}{32\pi^2}\cdot\frac{e^4}{m^2\varepsilon_0^2 c^3}$

Et : $r(t)^3 = r_0^3 - \frac{3}{32\pi^2}\cdot\frac{e^4 t}{m^2\varepsilon_0^2 c^3}$

5. On a alors $r(t) = 0$ pour $t = \frac{32\pi^2 m^2 \varepsilon_0^2 c^3 r_0^3}{3e^4}$

(on peut à nouveau vérifier que t est bien homogène à un temps).

On trouve après application numérique $t = 2{,}8\cdot 10^{-10}$ s.

Autrement dit, dans un modèle classique l'atome est instable

et l'électron tomberait sur le proton en une fraction de seconde.
Il faut un modèle quantique pour décrire correctement l'atome.

6. On a vu $r(t)^3 = r_0^3 - \frac{3}{32\pi^2} \cdot \frac{e^4 t}{m^2 \varepsilon_0^2 c^3}$

Ou encore : $$t = \frac{32\pi^2 \cdot m^2 \varepsilon_0^2 c^3}{3e^4} \left(r(t)^3 - r_0^3\right) \quad (*)$$

Pour $E = E_2$ on a $r_2 = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 E_2} = 2{,}1 \cdot 10^{-10}\ m$

Pour $E = E_1$ on a $r_1 = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 E_1} = 5{,}3 \cdot 10^{-11}\ m$

On réinjecte dans (*) avec $r_0 = r_2$ et $r(t) = r_1$, on trouve une durée de transition :

$$\boxed{\tau = 2{,}6\ ns}$$

Le temps observé est environ la moitié de celui prédit ce qui montre que le modèle classique n'est pas exact, on s'attend à ce que l'erreur soit moins importante pour les niveaux les plus excités car l'écart entre les niveaux quantiques d'énergie y est plus faible.